Introducción

El objetivo de los matemáticos es descubrir y comunicar ciertas verdades. Las matemáticas son el lenguaje de los matemáticos y una demostración, es un método para comunicar una verdad matemática a otra persona que también habla el mismo idioma. Una propiedad del lenguaje de las matemáticas es su presición no deberá contener ambiguedades y no habrá duda de que es correcta. Desafortunadamente, muchas desmotraciones que aparecen en libros de texto y artículos de revistas no tienen la claridad necesaria; dicho en otras palabras, las demostraciones están presentadas adecuadamente para quienes ya conocen el lenguaje de las matemáticas. Por lo tanto, para entender, hacer una demsotración o ambas cosas, usted debe aprender un idioma nuevo, un método nuevo de razonamiento.

Proposición

Es una oración o una expresión matemática que afirma o niega algo.

De esta manera, una proposición tiene un valor de verdad que puede ser verdadera o falsa. En estas notas consideraremos solo proposiciones matemáticas.

Ejemplos de proposiciones verdaderas

- 5 es un número impar
- 2 es un número par

Ejemplos de proposiciones falsas

- 14 es un número impar
- 2=5

Ejemplos de expresiones que no son proposiciones

- 73
- 2x+3=5

Generalmente, para referirnos a proposiciones específicas se usan letras mayúsculas. Por ejemplo
P: 25 es un núero entero impar
Q: 3+4=7
Las proposiciones pueden contener variables. Por ejemplo, sea x un número entero y consideremos
P: 2x+1 es un entero impar.
Esta es una proposición que es verdadera no importa que número entero sea la variable x.
Entonces podemos denotarla por
P(x): 2x+1 es un entero impar.
Hay oraciones o expresiones matemáticas que contienen variables y no son proposiciones.
Por ejemplo,
Q(x) : El número entero x es múltiplo de 3.
Solo será una proposición cuando le otorguemos un valor a x. Una expresión como Q(x), cuyo valor de verdad depende de una o más variables, es lo que se llama una expresión abierta.

Proposiciones compuestas

A partir de proposiciones es posible generar otras proposiciones.

Es decir se puede operar con proposiciones y según sea tales operaciones se utilizan ciertos símbolos, llamados conectivos.

Conectivo	Operación	Significado	Notación
$\neg$	Negación	No P o no es cierto que P	$\neg P$
$\wedge$	Conjnución	P y Q	$P \wedge Q$
$\vee$	Disyución	P o Q	$P \vee Q$
$\Rightarrow$	Implicación	Si P entonces Q	$P \Rightarrow Q$
$\Leftrightarrow$	Doble implicación	P si y solo si Q	$P \Leftrightarrow Q$

Tablas de verdad

Una tabla de verdad es un método para determinar cuando una proposición es verdadera

Debiendo examinarse todos los posibles valores de verdad de las proposiciones individuales.

Ejemplo 1 Consideremos las siguientes proposiciones
P: El número 4 es un entero par.
Q: El número 5 es un entero impar.
Para formar la nueva proposición
R: El número 4 es un entero par y el número 5 es un entero impar.
Así, dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q, podemos combinarlas para formar una nueva proposición "P y Q". Se usa el símbolo $\wedge$ para indicar la palabra "y". De esta manera, P$\wedge$Q significa "P y Q".
La proposición P $\wedge$ Q es verdadera si ambas proposiciones P y Q son verdaderas. En cualquier otro caso, es falsa. Esto se resume en la siguiente tabla de verdad.

P	Q	P $\wedge$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo 2 Consideremos las siguientes proposiciones
P: El número 4 es un entero par.
Q: El número 5 es un entero impar.
Para formar la nueva proposición
R: El número 4 es un entero par o el número 5 es un entero impar.
Así, dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q, podemos combinarlas para formar una nueva proposición "P o Q". Se usa el símbolo $\vee$ para indicar la palabra "o". De esta manera, P$\vee$Q significa "P o Q".
La proposición P $\vee$ Q significa que una o ambas proposiciones son verdaderas. Esto difiere del significado usual que tiene "o" en el lenguaje cotidiano, donde significa una alternativa o la otra, de manera excluyente, cuando hay dos alternativas. Esto se resume en la siguiente tabla de verdad.

P	Q	P ∨ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo 3 Otra manera de obtener nuevas proposiciones a partir de otras es usando la palabra no.
Dada una proposición cualquiera P; podemos formar una nueva proposición no es verdadero que P.
Por ejemplo, si consideramos la proposición (verdadera)
El núumero entero 3 es impar
podemos formar la nueva proposición No es verdadero que el núumero entero 3 es impar, la cual evidentemente es falsa.
Esto se resume en la siguiente tabla de verdad.

P	¬ P
V	F
F	V

Proposiciones codicionales

Otra manera de conectar dos proposiciones es mediante el uso de condicionales. Dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q; podemos formar la nueva proposición Si P; entonces Q. Esta proposición se escribe de manera simbólica como P⇒ Q; la cual también se lee P implica Q. Que la proposición P⇒Q es verdadera significa que si P es verdadera entonces Q también debe ser verdadera (P verdadera obliga a que Q sea verdadera). Una proposición de la forma P⇒Q se conoce como proposición condicional (Q sería verdadera bajo la condición de que P sea verdadera). El signi

cado de P⇒ Q nos dice que la única manera en que la proposición P⇒ Q es falsa es cuando P es verdadera y Q falsa. Así, la tabla de verdad para P⇒ Q es la siguiente.

P	Q	P ⇒ Q
verdadero	verdadero	verdadero
verdadero	falso	falso
falso	verdadero	verdadero
falso	falso	verdadero

La proposición P se llama a menudo hipótesis y el postulado Q conclusión, esto se puede reducir a:
Si P entonces Q
P implica Q
En simbolos matemáticos $P \Rightarrow Q$
Hay entonces cuatro posibles casos a considerar:
1. P es verdadero y Q es verdadero
2. P es verdadero y Q es falso
3. P es falso y Q es verdadeo
4. P es falso y Q es falso

Proposiciones bicondicionales

Dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q; podemos considerar tanto P$\Rightarrow$ Q como su recíproca Q $\Rightarrow$ P:
En primer lugar, P $\Rightarrow$ Q no es lo mismo que Q $\Rightarrow$ P; pues tienen distinto signifcado, y en consecuencia, pueden tener valores de verdad diferentes.
Consideremos ahora la proposición

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

Ésta afrma que tanto P $\Rightarrow$ Q como Q $\Rightarrow$ P son verdaderas.
Se usa el símbolo $\Leftrightarrow$, para expresar este significado. En consecuencia, leemos P $\Leftrightarrow$ Q, P si y solo si Q. Una proposición de la forma P $\Leftrightarrow$ Q se conoce como proposición bicondicional.

Ejemplo Por ejemplo, sea a un número entero fijo y consideremos:
P : a es par,
Q : a es múltiplo de 2.
Entonces:
P $\Rightarrow$ Q : Si a es par, entonces a es múltiplo de 2;
Q $\Rightarrow$ P : Si a es múltiplo de 2; entonces a es par.
Así, tenemos la proposición (que es verdadera)
P $\Leftrightarrow$ Q : a es par, **si y solo si**, a es múltiplo de 2:

Así, la tabla de verdad para P$\Leftrightarrow$ Q es la siguiente.

P	Q	P $\Rightarrow$ Q	Q $\Rightarrow$ P	(P $\Rightarrow$ Q) $\wedge$ (Q $\Leftrightarrow$ P)
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Por lo que la tabla de verdad para P$\Leftrightarrow$ Q es la siguiente.

P	Q	P $\Leftrightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Equivalencia Lógica

Dos proposiciones lógicamente equivalentes son dos proposiciones cuyos valores de verdad coinciden línea por línea en una tabla de verdad, y de esta manera tienen el mismo significado.

Ejemplo Las proposiciones P $\Leftrightarrow$ Q y (P $\wedge$ Q) $\vee$ ($\neg$P $\wedge$ $\neg$Q) son lógicamente equivalentes, como podemos ver en la siguiente tabla de verdad.

P	Q	$\neg$ P	$\neg$Q	(P $\wedge$ Q)	($\neg$P $\wedge$ $\neg$Q)	P $\Leftrightarrow$ Q	(P $\wedge$ Q)$\vee$ ($\neg$P $\wedge$ $\neg$Q)
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V	V

Esto se evidencia en la coincidencia línea por línea de las dos últimas columnas. La equivalencia lógica de P $\Leftrightarrow$ Q y (P $\wedge$ Q) $\vee$ ($\neg$P $\wedge$ $\neg$Q) la expresamos de la siguiente manera

$$(P \Leftrightarrow Q) \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

Teorema

Es una proposición matemática que es verdadera, y puede ser (y ha sido)verificada como verdadera.

Ejemplo

Teorema 1. *Existe una infidad de números primos.*

Lema

Es una proposición demostrada, utilizada para establecer un teorema.

Ejemplo

Lema 1. *Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena (subconjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior, contiene al menos un elemento maximal.*

Corolario

Es un término que se utiliza en matemáticas y en lógica para designar la evidencia de un teorema.

Ejemplo

Corolario 1. *Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto, ni más de un obtuso.*

Conjetura

Estas son proposiciones cuya verdad o falsedad aún no ha sido demostrada, pero hay indicios de que son verdaderas.

Ejemplo Cualquier número entero par mayor que 2 es la suma de dos números primos

Demostración

Es un argumento deductivo para una afirmación matemática

Consideremos las siguientes proposiciones.

Ejemplo 1 Dos rectas diferentes en un plano son paralelas o se cortan sólo en un punto.

Ejemplo 2 1=0.

Ejemplo 3 $3x = 5$ y $y = 1$

Ejemplo 4 x no es > 0.

Ejemplo 5 Existe un ángulo θ tal que $\cos(\theta) = \theta$

Observamos que:
La proposición del ejemplo 1 es siempre verdadera
La proposición del ejemplo 2 es siempre falsa
La proposición del ejemplo 3 puede ser verdadero o falso dependiendo del valor de una variable
La proposición del ejemplo 4 puede ser verdadero o falso dependiendo del valor de una variable
La proposición del ejemplo 5 no es tan obvio que es siempre verdadera.
Por lo tanto, es necesario tener algún método para demostrar que tales proposiciones son verdaderas.

Métodos de demostración

Se aplican cuando se desea deducir una proposición Q a partir de una proposición P que se considera verdadera.

Es decir se aplican para demostrar la veracidad de Q, suponiendo la veracidad de P.
Considerando la hipótesis P verdadera, si la implicación se construye utilizando los métodos de demostración y una sucesión de razonamientos verdaderos, por consecuencia se arribará a una conclusión Q verdadera.

Demostraciones directas

Las demostraciones directas, por lo regular, tratan de demostrar una implicación de la forma $P \Rightarrow Q$.

La estrategia a seguir es encontrar una sucesión finita de pequeñas implicaciones todas ellas verdaderas, partiendo de $p = q_1$ y terminando en $p_n = q$. En cada paso, se pueden usar la hipótesis p y resultados previamente establecidos, como definiciones, axiomas u otras proposiciones, incluyendo las que se van construyendo en la sucesión.

Tautología

Una tautología es una proposición compuesta que siempre tiene valor de verdad

Sin importar el valor de verdad de sus partes constituyentes.

La expresión lógica de este método es la siguiente:

$$p \Rightarrow q_1$$

$$q_1 \Rightarrow q_2$$

$$q_2 \Rightarrow q_3$$

$$\vdots$$

$$q_{n-1} \Rightarrow q_n$$

con $q_n = q$, y haciendo uso de la tautología, se tiene

$$(p \Rightarrow q_1) \wedge (q_1 \Rightarrow q_2) \wedge (q_2 \Rightarrow q_3) \wedge \cdots \wedge (q_{n-1} \Rightarrow q_n) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

Ejemplo 1 Si k es un número impar, entonces k^2 es un número impar

Demostración. k es impar entonces $k = 2m + 1$ con $m \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ elevando al cuadrado ambos miembros

$$k^2 = (2m+1)^2 \quad m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Desarrollando el binomio

$$k^2 = 4m^2 + 4m + 1 \quad m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Factorizando el 2

$$k^2 = 2(2m^2 + 2m) + 1 \quad m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ y como la suma de números enteros es un número entero

$$k^2 = 2k + 1 \quad k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto k^2 es un número impar □

Ejemplo 2 Si k es un número par, entonces k^2 es un número par

Demostración. k es par entonces $k = 2m$ con $m \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ elevando al cuadrado ambos miembros

$$k^2 = (2m)^2 = 4m^2 \quad m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Factorizando el 2

$$k^2 = 2(2m^2) \quad m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ y como el producto de números enteros es un número entero

$$k^2 = 2k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto k^2 es un número par □

Ejemplo 3 Si $\sqrt{x^2+1} = x-1$, entonces $x = 0$

Demostración.

$$\sqrt{x^2+1} = x-1$$

$\Rightarrow$ elevando al cuadrado ambos miembros

$$x^2+1 = (x-1)^2$$

$\Rightarrow$ desarrollando el binomio

$$x^2+1 = x^2+2x+1$$

$\Rightarrow$ simplificando términos semejantes

$$0 = -2x$$

Por lo tanto $x = 0$ $\square$

Ejemplo 4 Si m es par y n es impar, entonces $m+n$ es impar

Demostración.

$$\begin{pmatrix} m \ par \\ n \ impar \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m = 2k & k \in \mathbb{Z} \\ n = 2\ell + 1 & \ell \in \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow m+n = 2k+2\ell+1, \quad k, \ell \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m+n = 2(k+\ell)+1, \quad k+\ell \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto m+n es impar $\square$

Demostraciones por Contrarreciproca

Observa la siguiente tabla de verdad

P	Q	P⇒Q	¬ Q	¬ P	¬ Q⇒ ¬ P
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

c

Este método de demostración esta basado en la equivalencia lógica

$$P \ \Rightarrow \ Q \ \equiv \ \neg Q \ \Rightarrow \ \neg P$$

es decir se parte de la negación de la conclusión ($\neg Q$) y de ello se deduce la negación de la hipótesis ($\neg P$)

Ejemplo 1 Demostrar lo siguiente: Si $A \subset B$, entonces $B^c \subset A^c$

Demostración. Negación de la conclusión

$$B^c \not\subset A^c$$

$\Rightarrow$ por definición de subconjunto

$$\exists \ x \ \in \ B^c, \quad \ni \quad x \ \notin \ A^c$$

$\Rightarrow$ por la definición de complemento

$$\exists \ x \ \in \ A, \quad \ni \quad x \ \notin \ B$$

$\Rightarrow$ por la definición de subconjunto

$$A \not\subset B$$

que es la negación de la hipótesis □

Ejemplo 2 Demostrar lo siguiente: Si A es cualquier conjunto, entonces $A \bigcap A^c = \emptyset$

Demostración. Negación de la conclusión

$$A \bigcap A^c \neq \emptyset$$

$\Rightarrow$

$$\exists \ x \ \in \ A \bigcap A^c$$

$\Rightarrow$ por la definición de intersección

$$\exists \ x \ \in \ A \ \ y \ \ x \in A^c$$

$\Rightarrow$ por la definición de complemento

$$x \in A \ \ y \ \ x \notin A$$

Por lo tanto A no es un conjunto, que es la negación de la hipótesis □

Ejemplo 3 Demostrar lo siguiente:
Si $p,\ q\ \in\ \mathbb{R}^{+}$ son tal que $\sqrt{pq} \neq \dfrac{p+q}{2}$ entonces $p \neq q$

Demostración. Negación de la conclusión
$$p = q$$
$\Rightarrow$
$$\sqrt{pq} = \sqrt{pp} = p$$
$\Rightarrow$
$$\frac{p+q}{2} = \frac{p+p}{2} = \frac{2p}{2} = p$$
por lo tanto
$$\sqrt{pq} = \frac{p+q}{2}$$
que es la negación de la hipótesis □

Ejemplo 4 Demostrar lo siguiente:
Sea $k \in \mathbb{Z}$. Si k^2 es par, entonces k es par

Demostración. Negación de la conclusión k no es par $\Rightarrow$ k es de la forma
$$2n+1, \quad n \in \mathbb{Z}$$
$\Rightarrow$ elevando k al cuadrado
$$k^2 = (2n+1)^2, \quad n \in \mathbb{Z}$$
$\Rightarrow$ desarrollando el binomio
$$k^2 = 4n^2 + 4n + 1, \quad n \in \mathbb{Z}$$
$\Rightarrow$ factorizando el 2
$$k^2 = 2\underbrace{(2n^2+2n)}_{m\ entero}+1, \quad n \in \mathbb{Z}$$
$\Rightarrow$ sumas y producto de enteros es entero
$$k^2 = 2m+1, \quad m \in \mathbb{Z}$$
por lo tanto k^2 es impar que es la negación de la hipótesis □

Demostraciones por Reducción al absurdo

Observa las siguientes tablas de verdad

P	Q	P⇒Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	P∧Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	¬Q	P∧ ¬Q
V	F	F
V	V	V
F	F	F
F	V	F

W	¬W	W∧ ¬W
V	F	F
V	F	F
F	V	F
F	V	F

P∧ ¬Q	W∧ ¬W	P∧ ¬Q ⇒ W∧ ¬W
F	F	V
V	F	F
F	F	V
F	F	V

Este método de demostración esta basado en la equivalencia lógica

$$P \;\Rightarrow\; Q \;\equiv\; P \;\wedge\; \neg\; Q \;\Rightarrow\; W \;\wedge\; \neg\; W$$

Absurdo

Un absurdo es una proposición que siempre es falsa
Es decir para demostrar $P \;\Rightarrow\; Q$ se construye un absurdo $W \wedge \neg W$ usando la hipótesis P y la negación de la conclusión $\neg\; Q$

Ejemplo 1 Demostrar lo siguiente: Si $A \subset B$, entonces $A - B = \emptyset$

Demostración. Vamos a suponer la hipótesis $A \subset B$ y la negación de la conclusión $A - B \neq \emptyset$

$$\underbrace{A \subset B}_{P} \quad y \quad \underbrace{A - B \neq \emptyset}_{\neg Q}$$

$\Rightarrow$ usando las definiciones

$$\underbrace{\forall\; x \in A \;\Rightarrow\; x \in B}_{P} \quad y \quad \underbrace{\exists\; x \in A \;\; y \;\; x \notin B}_{\neg Q}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\forall\; x \in A \;\Rightarrow\; x \in B}_{P} \quad y \quad \underbrace{\exists\; x \in A \;\; \ni \;\; x \notin B}_{Q}$$

Por lo tanto se tiene

$$\underbrace{\forall\; x \in A \;\Rightarrow\; x \in B}_{W} \quad y \quad \underbrace{\exists\; x \in A \;\; \ni \;\; x \notin B}_{\neg W}$$

esto es un absurdo □

Ejemplo 2 Demostrar lo siguiente: Sean $m,\; n \in \mathbb{N}$. Si mn es impar entonces m y n son impares

Demostración. Vamos a suponer la hipótesis mn es impar y la negación de la conclusión n par ó m par

$$\underbrace{n\cdot m,\quad impar}_{P}\qquad y\qquad \underbrace{m\ par\ ó\ n\ par}_{\neg Q}$$

$\Rightarrow$ usando las definiciones

$$\underbrace{n\cdot m=2k+1,\quad k\in\mathbb{Z}}_{P}\qquad y\qquad \underbrace{n=2r,\quad r\in\mathbb{Z}\ \ ó\ \ m=2t,\quad t\in\mathbb{Z}}_{\neg Q}$$

$$\Rightarrow \underbrace{n\cdot m=2k+1,\quad k\in\mathbb{Z}}_{P}\qquad y\qquad \underbrace{n\cdot m=2r\cdot m\quad ó\quad n\cdot m=n\cdot 2t}_{Q}$$

Por lo tanto se tiene

$$\underbrace{n\cdot m=2k+1,\quad k\in\mathbb{Z}}_{W}\qquad y\qquad \underbrace{n\cdot m=2r\cdot m\quad ó\quad n\cdot m=n\cdot 2t}_{\neg W}$$

esto es un absurdo □

Ejemplo 3 Demostrar lo siguiente: Si $n,\ m\in\mathbb{Z}$,son tal que $n+n^2+n^3=m+m^2$, entonces n es par

Demostración. Vamos a suponer la hipótesis $n+n^2+n^3=m+m^2,\quad n,\ m\in\mathbb{Z}$ y la negación de la conclusión n impar

$$\underbrace{n+n^2+n^3=m+m^2,\quad n,\ m\in\mathbb{Z}}_{P}\qquad y\qquad \underbrace{n=2t+1,\quad t\in\mathbb{Z}}_{\neg Q}$$

$\Rightarrow$ elevando n al cuadrado

$$\underbrace{n+n^2+n^3=m+m^2,\quad n,\ m\in\mathbb{Z}}_{P}\qquad y\qquad n^2=(2t+1)^2=4t^2+4t+1=2(2t^2+t)+1,\quad t\in\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ elevando n al cubo

$$\underbrace{n+n^2+n^3=m+m^2,\quad n,\ m\in\mathbb{Z}}_{P}\quad y\quad n^3=(2t+1)^3=8t^3+12t^2+6t+1=2(4t^3+6t^2+3)+1,\ \ t\in\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ sumando n,n^2 y n^3 se tiene

$$\underbrace{n+n^2+n^3=m+m^2,\quad n,\ m\in\mathbb{Z}}_{P}\quad y\quad n+n^2+n^3=(2t+1)+2(2t^2+t)+1+2(4t^3+6t^2+3)+1,\ \ t\in\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ simplificando

$$\underbrace{n+n^2+n^3=m+m^2,\quad n,\ m\in\mathbb{Z}}_{P}\qquad y\qquad n+n^2+n^3=2(t+2t^2+t+4t^3+6t^2+3+1)+1,\quad t\in\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ suma de impares es impar

$$\underbrace{n+n^2+n^3=m+m^2,\quad n,\ m\in\mathbb{Z}}_{P}\quad y\quad n+n^2+n^3=2(m)+1,\quad m\in\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ el producto $m+m^2=m(m+1)$ es par, por lo tanto

$$\underbrace{n+n^2+n^3=m+m^2=m(m+1),\quad es\quad par\quad n,\ m\in\mathbb{Z}}_{W}\quad y\quad \underbrace{n+n^2+n^3=2(m)+1,\quad es\quad impar\quad m\in\mathbb{Z}}_{\neg W}$$

esto es un absurdo □

Ejemplo 4 Demostrar lo siguiente: $\forall\ a\neq 0$ se tiene que $a^2>0$

Demostración. Vamos a suponer la hipótesis $a\neq 0$ y la negación de la conclusión $a^2\leq 0$

$$\underbrace{a\neq 0}_{P}\quad y\quad \underbrace{a^2=a\cdot a\leq 0}_{\neg Q}$$

$\Rightarrow$

$$\underbrace{a\neq 0}_{W}\quad y\quad \underbrace{a=0}_{\neg W}$$

esto es un absurdo □

Ejemplo 5 Demostrar lo siguiente: Si $a<1$, entponces $a<a^2$

Demostración. Vamos a suponer la hipótesis $a>1$ y la negación de la conclusión $a^2\leq a$

$$\underbrace{a>1}_{P}\quad y\quad \underbrace{a^2\leq a}_{\neg Q}$$

$\Rightarrow$

$$\underbrace{a>1}_{P}\quad y\quad \underbrace{a-a^2\geq 0}_{\neg Q}$$

$\Rightarrow$

$$\underbrace{a>1}_{P}\quad y\quad \underbrace{a(1-a)\geq 0}_{\neg Q}$$

$\Rightarrow$

$$\underbrace{a>1}_{P}\quad y\quad \underbrace{a\geq 0\quad y\quad 1-a\geq 0}_{\neg Q}$$

por lo tanto

$$\underbrace{a>1}_{W}\quad y\quad \underbrace{a\leq 1}_{\neg W}$$

esto es un absurdo □

Demostraciones por casos

Éste método es posible utilizarlo cuando la hipótesis P es una disyución de casos, es decir, cuando

$$P = P_1 \text{ ó } P_2 \text{ ó } P_3 \cdots \text{ ó } P_n$$

Éste método esta basado en la equivalencia

$$P \Rightarrow Q \equiv (P_1 \Rightarrow Q \wedge P_2 \Rightarrow Q \wedge P_3 \Rightarrow Q \wedge \cdots \wedge P_n \Rightarrow Q)$$

Éste método se explica señalando que para demostrar $P \Rightarrow Q$, es necesario demostrar que todos los casos de la hipótesis implican la conclusión

Ejemplo 1 Demostrar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $n^2 + n + 1$ es impar

Demostración. Caso 1
n par $\Rightarrow n^2$ es par $n^2 + n$ es par $\Rightarrow n^2 + n + 1$ es impar Caso 2
n impar $\Rightarrow n^2$ es impar $n^2 + n$ es par $\Rightarrow n^2 + n + 1$ es impar □

Ejemplo 2 Demuestre que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $|a| \geq 0$

Demostración.

Definición 1.

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

Caso 1

$$a \geq 0 \;\Rightarrow\; |a| = a \geq 0$$

Caso 2

$$a < 0 \;\Rightarrow\; |a| = -a > 0 \;\Rightarrow\; |a| \geq 0$$

□

Ejemplo 3 Demuestre que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $|a| = |-a|$

Demostración.

Definición 2. *Se tiene*

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

Caso 1

$$a \geq 0 \;\Rightarrow\; |a| = a$$

por otro lado

$$a \geq 0 \;\Rightarrow\; -a \leq 0 \;\Rightarrow\; |-a| = -(-a) = a$$

por lo tanto

$$|a| = |-a|$$

Caso 2

$$a < 0 \;\Rightarrow\; |a| = -a$$

por otro lado

$$a < 0 \;\Rightarrow\; -a > 0 \;\Rightarrow\; |-a| = -a$$

por lo tanto

$$|a| = |-a|$$

□

Demostraciones por contraejemplo

El método por contraejemplo se aplica de manera muy particular para demostrar la falsedad de proposiciones cuya hipótesis está construída mediante un çuantificador universal". Esto es, se aplica para demostrar la falsedad de una proposición que tenga una conclusión referida para "todos los elementos de un cierto conjunto"Qué entender por un contraejemplo

Para demostrar la falsedad de proposiciones de este tipo, basta exhibir un elemento que satisfaga la hipótesis de la proposición, pero que no satisfaga su conclusión. A dicho elemento se le conoce con el nombre de contraejemplo. El uso del contraejemplo, es muy útil cuando uno se encuentra ante una proposición con cuantificador universal, de la cuál no se sabe si es verdadera o falsa.

La primera idea es buscar un contraejemplo. Si no se encuentra en una primera instancia, se intentará demostrar su veracidad aplicando los otros métodos o una combinación de ellos.

Ejemplo 1 Demuestre que es falsa la siguiente proposición:

$$a,\ b\ \in\ \mathbb{R}\ \Rightarrow\ |a+b| = |a| + |b|$$

Demostración. Si tomamos $a = 5$ y $b = -3$ se tiene

$$|5-3| = |2| = 2 \neq 8 = 5+3 = |5| + |-3|$$

por lo tanto la proposición es falsa □

Ejemplo 2 Demuestre que es falsa la siguiente proposición:

$$a,\ b\ \in\ \mathbb{R}\ \ y\ \ a^2 = b^2\ \Rightarrow\ a = b$$

Demostración. Si tomamos $a = -$ y $b = 2$ se tiene

$$a^2 = 4 = b^2$$

pero

$$-2 = a \neq 2 = b$$

por lo tanto la proposición es falsa □

Ejemplo 3 Demuestre que es falsa la siguiente proposición:

$$A - B = B - A, \ \ \forall \ \ A, \ B \ \ conjuntos$$

Demostración. Si tomamos

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad y \quad B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

se tiene que

$$A - B = \{1, 2\} \neq \{6, 7\} = B - A$$

por lo tanto la proposición es falsa □

Observaciones: No obstante que puede haber muchos casos en los que si se satisfaga la proposición, basta con un solo caso en el que no ocurra, para que tal proposición sea falsa.