Aplicación de la derivada.

Ejercicio 1.

Calcula los puntos máximos y mínimos utilizando el criterio de la primera derivada, hallar los intervalos en donde es creciente, decreciente, donde es cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo y además hallar las coordenadas de los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Igualamos $f'(x)$ con cero para hallar donde la pendiente es nula y así encontrar los puntos críticos.

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x-2) = 0$$

O bien $3x = 0$ y tenemos $x = \frac{0}{3}$ entonces $x_1 = 0$

O bien $x - 2 = 0$ y tenemos $x_2 = 2$

- Criterio de la primera derivada:

Sea $f(x)$ una función sobre un intervalo (a, b) que contenga un punto crítico c.

$a)\ Si\ f'(x) > 0\ \ \forall x \in (a,c)\ y\ f'(x) < 0\ \ \forall x \in (c,b), entonces\ f(c) es\ un\ máximo\ local\ de\ f.$

$b)\ Si\ f'(x) < 0\ \ \forall x \in (a,c)\ y\ f'(x) > 0\ \ \forall x \in (c,b), entonces\ f(c) es\ un\ mínimo\ local\ de\ f.$

$c)\ Si\ f'(x) < 0\ tiene\ el\ mismo\ signo, entonces\ f(c) no\ es\ un\ extremo\ local\ de\ f.$

Primero sustituimos en la derivada dos valores cercanos a cada punto crítico:

$para\ x = 0\ utilizaremos\ los\ valores -1\ y\ 1$

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = 9$$

$$f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = -3$$

Observamos que hubo un cambio de signo de positivo a negativo por lo que tenemos un máximo en $x = 0$.

$para\ x = 2\ utilizaremos\ los\ valores\ 1\ y\ 3$

$$f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = -3$$

$$f'(3) = 3(3)^2 - 6(3) = 9$$

Observamos que hubo un cambio de signo de negativo a positivo por lo que tenemos un mínimo en $x = 2$.

Para encontrar las coordenadas de los puntos, evaluamos los valores en $f(x)$

$$f(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 2 = 2 \;\; entonces\; P(0{,}2) es\; máximo$$

$$f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 2 = -2 \;\; entonces\; P(2, -2) es\; mínimo$$

- Creciente y decreciente.

f *es creciente en* (a, b) *si* $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, *se cumple que* $f(x_2) > f(x_1)$ *cuando* $x_2 > x_1$.

f *es decreciente en* (a, b) *si* $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, *se cumple que* $f(x_2) < f(x_1)$ *cuando* $x_2 > x_1$.

Para que la función sea decreciente la pendiente debe ser positiva:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x > 0 \;\; entonces\; 3x(x-2) > 0$$

Tenemos dos casos

caso 1: $3x > 0 \;\; y \;\; x - 2 > 0, \quad entonces \quad x > 0 \;\; y \;\; x > 2$

$$las\; soluciones\; se\; intersectan\; en\; (2, \infty)$$

caso 2: $3x < 0 \;\; y \;\; x - 2 < 0, entonces \;\; x < 0 \;\; y \;\; x < 2$

$$las\; soluciones\; se\; intersectan\; en (-\infty, 0)$$

De los dos casos concluimos que los intervalos donde la función es creciente son

$$x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$$

Para que la función sea decreciente la pendiente debe ser negativa:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x < 0 \;\; entonces\; 3x(x-2) < 0$$

caso 1: $3x < 0 \;\; y \;\; x - 2 > 0, entonces\; x < 0 \;\; y \;\; x > 2$

$$los\; intervalos\; no\; se\; intersectan, tenemos\; al\; conjunto\; \emptyset$$

caso 2: $3x > 0 \;\; y \;\; x - 2 < 0, entonces\; x > 0 \;\; y \;\; x < 2$

$$se\; intersectan\; en\; el\; conjunto\; (0{,}2)$$

Concluimos que el intervalo donde la función es decreciente es

$$x \in (0,2)$$

- Concavidad.

Sea $f(x)$ una función dos veces derivable sobre un intervalo abierto (a, b).

$$a)\ Si\ f''(x) > 0\ \ \forall x \in (a, b), entonces\ f\ es\ cóncava\ hacia\ arriba\ en\ el\ intervalo\ (a, b).$$

$$a)\ Si\ f''(x) < 0\ \ \forall x \in (a, b), entonces\ f\ es\ cóncava\ hacia\ abajo\ en\ el\ intervalo\ (a, b).$$

En nuestro caso tenemos

$$f''(x) = 6x - 6$$

Para hallar el intervalo donde es cóncava hacia arriba

$$f''(x) = 6x - 6 > 0\ , \qquad 6x > 6, \qquad x > 1$$

Por lo tanto es cóncava hacia arriba en el intervalo $x \in (1, \infty)$

Para el intervalo donde es cóncava hacia abajo

$$f''(x) = 6x - 6 < 0\ , \qquad 6x < 6, \qquad x < 1$$

Por lo tanto es cóncava hacia abajo en el intervalo $x \in (-\infty, 1)$

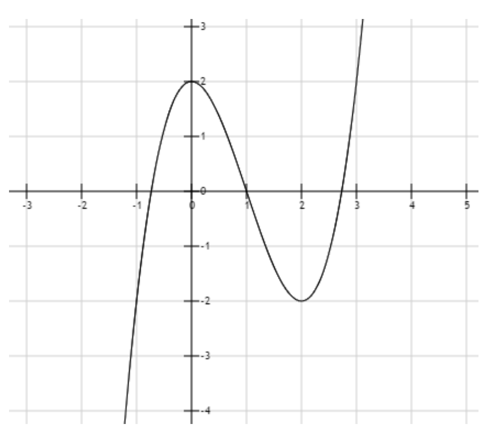
- Punto de inflexión

$$f''(x) = 6x - 6 = 0, \ \ 6x = 6, \ \ \ x = 1$$

Sustituyendo en $f(x)$

$$f(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 2 = 0\ \ entonces\ P(1,0) es\ punto\ de\ inflexión$$

A continuación se muestra la grafica de la función, para que se puedan corroborar los resultados obtenidos.



Ejercicio 2.

Hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la grafica $y = x^2 - 3x$ en el punto $P(1, -2)$.

Solución:

$$y' = 2x + 3$$

Sustituyendo $x = 1$ para encontrar la pendiente de la recta tangente

$$m = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$$

La ecuación de la recta tangente se halla sustituyendo $P = (1, -2)$ Y $m = -1$ en la ecuación canoníca de la recta $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - (-2) = -1(x - 1)$$

$$y + 2 = -1(x - 1)$$

$$y + 2 = -x + 1$$

$$x + y + 2 - 1 = 0$$

$$x + y + 1 = 0 \ldots \; ecuación\ de\ la\ recta\ tangente$$

Para la recta normal utilizamos que para que dos rectas sean perpendiculares deben cumplir que $m_1 m_2 = -1$, y como la pendiente de la recta tangente es -1

$$(-1)(m_2) = -1$$

$$m_2 = \frac{-1}{-1}$$

$$m_2 = 1$$

Sustituyendo $P(1, -2)\ y\ m = 1$ en $y - y_1 = m(x - x_1)$ obtenemos la ecuación de la recta normal

$$y - (-2) = 1(x - 1)$$

$$y + 2 = 1(x - 1)$$

$$y + 2 = x - 1$$

$$x - y - 1 - 2 = 0$$

$$x - y - 3 = 0 \ldots ecuación\ de\ la\ recta\ normal.$$