

Universidad Nacional Autónoma de México

Principio de Inducción Matemática

19 de marzo de 2015

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo orientar a los alumnos de primer ingreso a entender los fundamentos y aplicaciones del método de inducción matemática. Para ello se presenta una construcción de los números naturales \mathbb{N} empleando conocimientos básicos de teoría de conjuntos y lógica. Posteriormente se plantea y analiza el Principio de Inducción Matemática. Finalmente, se muestran algunos ejemplos explicando detalladamente cada paso.

1. El conjunto de los números naturales

El conjunto de los números naturales, \mathbb{N} , es el conjunto ordenado $\{0,1,2,3,\dots\}$. Como sabemos, los elementos de éste conjunto nos permiten realizar sumas y multiplicaciones, y el resultado de éstas operaciones es también un elemento del conjunto. En términos del álgebra, esto se traduce en que si $n, m \in \mathbb{N}$ entonces $(n + m) \in \mathbb{N}$ y $n \cdot m \in \mathbb{N}$.

Notemos que ésto no sucede con cualquier operación, pues por ejemplo, si $m = 1$ y $n = 10$, al hacer $m - n = -9$, éste elemento no pertenece al conjunto de los naturales. Por otro lado, si ahora hacemos $n/m = 1/10$, el resultado es un número racional, que tampoco pertenece al conjunto de los naturales. Entonces podemos identificar algunas características de los números naturales: primero, la posibilidad de pasar de manera precisa de cada número n , al que sigue dado por $\Phi(n)$. Notemos que eso no sucede en los racionales, pues ¿qué número sigue del $1/10$? Además, para números distintos, corresponden sucesores distintos.

Podemos entonces a cada número natural, relacionarlo con su sucesor. Pero ese sucesor es también un número natural, por lo cual, podemos tomar ahora el sucesor del sucesor. Y podemos hacer éste proceso de manera iterativa, dado que los naturales son un conjunto con un número infinito -numerable- de elementos. Éstas observaciones son la base de los axiomas de Peano:

Axioma 1. 0 es un número natural.

Axioma 2. Si n es un número natural, existe un único número natural $\Phi(n)$ tal que es el sucesor de n .

Axioma 3. Para todo número natural n , $\Phi(n) \neq 0$.

Axioma 4. Para todos los números naturales n y m , si $\Phi(n)=\Phi(m)$ entonces $n = m$.

Axioma 5. Si S es un subconjunto de \mathbb{N} , tal que $0 \in S$ y $\Phi(n) \in S$ para cada $n \in S$, entonces $S = \mathbb{N}$.

Podemos notar que 0 es un elemento de los naturales considerando éstos axiomas, sin embargo en otras definiciones no es considerado, como haremos más adelante.

2. Principio de Inducción Matemática

Definición. Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ el conjunto de los números naturales, y $P(n)$ una cierta propiedad que puede ser o no cierta para cada número natural n . El principio de inducción matemática afirma que si:

- i) $P(1)$ es cierta, es decir, el número natural 1 satisface la propiedad, y
- ii) suponiendo que $P(k)$ es cierta se puede probar que $P(k + 1)$ también es cierta, entonces, cualquier número natural satisface la propiedad.

El principio de inducción se basa en los axiomas de Peano, ya que éstos nos garantizan que los naturales tienen un primer elemento, y que además forman un conjunto bien ordenado, es decir, que todo subconjunto suyo tiene un primer elemento.

3. Ejercicios resueltos

Ejemplo. Demuestra que para cualquier número natural n se cumple que:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

- i) Veamos si $P(1)$ satisface la propiedad, sustituyendo $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2}$$

- ii) Ahora supongamos que $P(k)$ es válida (para algún natural k arbitrario), es decir:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k + 1)}{2}$$

Y hay que probar que se cumple para $n=k+1$, es decir, debemos llegar a que:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)((k + 1) + 1)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

Usando nuestras hipótesis i) y ii). Partiendo del lado izquierdo de la igualdad, podemos sustituir ii), de la siguiente manera:

$$(1 + 2 + 3 + \dots + k) + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1)$$

Y después debemos desarrollar el lado derecho de la igualdad:

$$\frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

Por lo tanto llegamos a lo que queríamos demostrar:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

Por lo tanto la propiedad es cierta para cualquier número natural.

Ejemplo. Demuestra que para cualquier número natural n se cumple que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

i) La propiedad es cierta para $n=1$, ya que:

$$1^2 = \frac{1(1 + 1)((2 \cdot 1) + 1)}{6}$$

ii) Suponemos válido para $n=k$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}$$

Hay que probar que es válido para $n=k+1$, entonces debemos llegar a que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k + 1)((k + 1) + 1)(2(k + 1) + 1)}{6} = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}$$

Partiendo del lado izquierdo de ésta igualdad, sustituimos ii) y desarrollamos:

$$\begin{aligned} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2) + (k + 1)^2 &= \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1) + 6(k + 1)^2}{6} = \\ &= \frac{(k + 1)(k(2k + 1) + 6(k + 1))}{6} = \frac{(k + 1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6} \end{aligned}$$

Que es a lo que debíamos llegar, por lo tanto la propiedad es válida para cualquier número natural.

Ejemplo. Demuestra que para cualquier número natural n se cumple que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

i) Para $n = 1$ la propiedad se satisface, pues:

$$1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$$

ii) Suponemos válido para $n = k$, es decir:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

Hay que probar que se cumple para $n = k+1$, es decir, debemos llegar a que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

Nuevamente, desarrollamos del lado izquierdo, y después usamos la hipótesis de inducción ii).

$$\begin{aligned} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3) + (k+1)^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \\ &= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)(k+2)}{4} = \frac{(k+1)^2 + (k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto la propiedad es válida para cualquier número natural.

Observación. Como podemos notar en los ejercicios anteriores, el paso importante en el proceso de inducción, es en el que se muestra que la propiedad es válida para $n=k+1$. La única dificultad que podría presentarse es la de agrupar y factorizar adecuadamente para llegar a la expresión deseada. Veamos un ejemplo un poco más complicado.

Ejemplo. La Sucesión de Fibonacci

La sucesión $S_n = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$ se llama sucesión de Fibonacci y queda definida como sigue: $S_{n+1} = S_n + S_{n-1}$, salvo para los primeros dos valores, pues $S_1 = 1$ y $S_2 = 1$. (Notemos que S_n es un conjunto ordenado). Claramente, el primer elemento de la sucesión ($n=0$) es el 1, el séptimo elemento de la sucesión ($n=7$) es el 13, y de esa manera, a cada número natural n le corresponde un elemento de la sucesión.

Para encontrar qué elemento de la sucesión le corresponde a un natural arbitrario, se usa la fórmula:

$$S_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

Mostremos que ésta fórmula es válida para cualquier natural.

i) Veamos que $S_1 = 1$, es decir, que la propiedad es válida para $n=1$.

$$S_1 = \frac{(1 + \sqrt{5})^1 - (1 - \sqrt{5})^1}{2^1 \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$$

ii) Supongamos válido para $n=k$

$$S_k = \frac{(1 + \sqrt{5})^k - (1 - \sqrt{5})^k}{2^k \sqrt{5}}$$

Debemos mostrar que es válido para $n=k+1$, entonces debemos llegar a la expresión:

$$S_{k+1} = \frac{(1 + \sqrt{5})^{k+1} - (1 - \sqrt{5})^{k+1}}{2^{k+1} \sqrt{5}}$$

En este caso estamos trabajando con una sucesión, por lo que debemos emplear la regla que conocemos para obtener sus elementos:

$$S_{k+1} = S_k + S_{k-1}$$

Pero podemos sustituir por la fórmula que nos da al término n y al $n-1$:

$$S_k + S_{k-1} = \frac{(1 + \sqrt{5})^k - (1 - \sqrt{5})^k}{2^k \sqrt{5}} + \frac{(1 + \sqrt{5})^{k-1} - (1 - \sqrt{5})^{k-1}}{2^{k-1} \sqrt{5}}$$

Para poder llegar al resultado deseado se deben hacer algunos trucos. El primero es multiplicar el primer sumando por $2/2=1$ y al segundo sumando por $4/4=1$. En realidad ésto no altera la fórmula, pues sólo se está multiplicando por 1.

$$S_k + S_{k-1} = \frac{2[(1 + \sqrt{5})^k - (1 - \sqrt{5})^k]}{2[2^k \sqrt{5}]} + \frac{4[(1 + \sqrt{5})^{k-1} - (1 - \sqrt{5})^{k-1}]}{4[2^{k-1} \sqrt{5}]}$$

El resto del proceso es agrupar y factorizar adecuadamente. Recordemos que $a^k = a \cdot a^{k-1}$, entonces aplicando ésto:

$$S_k + S_{k-1} = \frac{2[(1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})^{k-1} - (1 - \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})^{k-1}]}{2^{k+1} \sqrt{5}} + \frac{4[(1 + \sqrt{5})^{k-1} - (1 - \sqrt{5})^{k-1}]}{2^{k+1} \sqrt{5}}$$

Notemos como el primer truco nos permitió tener ambos sumandos con el denominador que deseamos, que es el que tiene S_{k+1} .

$$S_k + S_{k-1} = \frac{2(1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})^{k-1} - 2(1 - \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})^{k-1} + 4(1 + \sqrt{5})^{k-1} - 4(1 - \sqrt{5})^{k-1}}{2^{k+1} \sqrt{5}}$$

Agrupando respecto a $(1 + \sqrt{5})^{k-1}$ y $(1 - \sqrt{5})^{k-1}$:

$$S_k + S_{k-1} = \frac{(1 + \sqrt{5})^{k-1}[2 + 2\sqrt{5} + 4] - (1 - \sqrt{5})^{k-1}[2 - 2\sqrt{5} - 4]}{2^{k+1}\sqrt{5}}$$

Lo cual puede reescribirse para tener un trinomio cuadrado perfecto:

$$S_k + S_{k-1} = \frac{(1 + \sqrt{5})^{k-1}[1 + 2\sqrt{5} + 5] - (1 - \sqrt{5})^{k-1}[1 - 2\sqrt{5} - 5]}{2^{k+1}\sqrt{5}}$$

Escribiendo el binomio al cuadrado que corresponde a ese TCP:

$$S_k + S_{k-1} = \frac{(1 + \sqrt{5})^{k-1}[1 + \sqrt{5}]^2 - (1 - \sqrt{5})^{k-1}[1 - \sqrt{5}]^2}{2^{k+1}\sqrt{5}} = \frac{(1 + \sqrt{5})^k - (1 - \sqrt{5})^k}{2^k\sqrt{5}}$$

Por lo tanto:

$$S_k = \frac{(1 + \sqrt{5})^k - (1 - \sqrt{5})^k}{2^k\sqrt{5}}$$

Con lo cual mostramos que la fórmula es válida para cualquier número natural.

Observación. Las demostraciones por inducción matemática sólo pueden emplearse cuando la propiedad que se desea probar es válida para números naturales, a partir de cierto valor. La propiedad que se desea probar no debe ser necesariamente una igualdad, como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo. Demuestra que para cualquier número natural se cumple que $n^3 - n$ es divisible entre 6.

i) La propiedad es válida para $n=1$

$$1^3 - 1 = 0,$$

que es divisible entre 6.

ii) Supongamos que la propiedad es válida para $n = k$, entonces $n^3 - n = 6m$ para alguna $m \in \mathbb{N}$.

P.D. La propiedad es válida para $n = k+1$. Sustituyendo $n = k+1$ en ii):

$$(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 + 3k^2 + 2k = (k^3 - k) + 3k^2 + 3k = 6m + 3k(k+1)$$

En el último término tenemos $k(k+1)$, por lo que tenemos el producto de un número por el siguiente. Dado que uno de los dos es necesariamente par, el producto es múltiplo de 2. Entonces $k(k+1) = 2p$, para algún $p \in \mathbb{N}$.

Entonces sustituyendo eso:

$$(k+1)^3 - (k+1) = 6m + 3 \cdot 2p = 6(m+p)$$

De donde se concluye que es múltiplo de 6, por lo que la propiedad es válida para $n=k+1$.

Por lo tanto, la propiedad es válida para cualquier número natural.

Ejemplo. Demuestra que para cualquier natural $n \geq 4$ se cumple que $2^n < n!$.

i) En este caso el primer elemento para el que se satisface la propiedad es $n=4$, por lo que debemos verificar para ese valor. Sustituyendo en la propiedad:

$$16 = 2^4 < 4! = 24$$

Por lo tanto la propiedad es válida para $n=4$

ii) Supongamos la propiedad válida para $n=k$, entonces $2^k < k!$. Debemos mostrar que la propiedad es válida para $n = k+1$, es decir, debemos llegar a que $2^{k+1} < (k+1)!$.

Usando la hipótesis de inducción ii), multiplicamos a ambos lados por $(k+1)$:

$$(k+1)2^k < (k+1)k!$$

De donde se sigue que:

$$(k+1)2^k - (k+1)k! < 0$$

Pero sabemos que Si $k \geq 4$, se satisface que $(k+1) > 2$, por lo que empleando esa desigualdad:

$$0 > (k+1)2^k - (k+1)k! > 2 \cdot 2^k - (k+1)k! = 2^{k+1} - (k+1)!$$

Por lo tanto, llegamos a que

$$0 > 2^{k+1} - (k+1)!$$

$$(k+1)! > 2^{k+1}$$

Por lo tanto la propiedad se cumple para todo natural $n \geq 4$.

Ejemplo. Demuestra que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, el número $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible entre 9.

i) Veamos que la propiedad es válida para $n = 1$:

$$1^3 + (1+1)^3 + (1+2)^3 = 1 + 8 + 27 = 36$$

que es divisible entre 9.

ii) Supongamos que la propiedad es válida para $n=k$:

$$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9m,$$

$m \in \mathbb{N}$.

P.D. La propiedad es válida para $n = k+1$. Sustituyendo $(k+1)$ en la hipótesis ii):

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 &= k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + (9k^2 + 27k + 27) = 9m + 9(k^2 + 3k + 3) = \\ &= 9(m + k^2 + 3k + 3). \end{aligned}$$

Que es múltiplo de 9, por lo que la propiedad es válida para $n = k+1$. Entonces es válida para cualquier número natural.

Observación. En los ejemplos para comprobar divisibilidad, comenzamos sustituyendo $n = k+1$ en ii), y después agrupando de tal forma que tengamos exactamente la hipótesis de inducción ii). Después sustituimos la igualdad de la hipótesis de inducción. Finalmente, factorizamos los términos sobrantes para mostrar que el resultado es múltiplo del número deseado.

Ejemplo. Demuestra que para cualquier número natural, se cumple que $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ es múltiplo de 17.

i) La propiedad es válida para $n=1$, pues:

$$3 \cdot 5^{2 \cdot 1 + 1} + 2^{3 \cdot 1 + 1} = 391 = 23 \cdot 17$$

ii) Supongamos que la propiedad es válida para $n=k$. Entonces:

$$3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1} = 17m,$$

para alguna $m \in \mathbb{N}$, P.D. es válida para $n=k+1$. Sustituyendo $n=k+1$ en ii):

$$3 \cdot 5^{2(k+1)+1} + 2^{3(k+1)+1} = 3 \cdot 5^{2k+3} + 2^{3k+4} = 25 \cdot 3 \cdot 5^{2(k+1)+1} + 8 \cdot 2^{3k+1}$$

Usando ii):

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5^{2(k+1)+1} + 2^{3(k+1)+1} &= 25 \cdot (17m - 2^{3k+1}) + 8 \cdot 2^{3k+1} = 25 \cdot 17m - 25 \cdot 2^{3k+1} + 8 \cdot 2^{3k+1} = \\ &= 25 \cdot 17m - 17 \cdot 2^{3k+1} = 17(25m - 2^{3k+1}) \end{aligned}$$

que es múltiplo de 17, por lo que la propiedad es cierta para $n = k+1$. Por lo tanto la propiedad es cierta para cualquier número natural.

Ejemplo. Probar que para cualquier natural es válido:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

i) Mostremos la propiedad para $n=1$

$$1 \cdot 3 = \frac{1(2)(9)}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

ii) Supongamos válido para $n = k$, entonces,

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + k(k+2) = \frac{k(k+1)(2k+7)}{6}$$

P.D. Que es válido para $n = k+1$, es decir, debemos llegar a que:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + k(k+2) + (k+1)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$$

Partimos de la hipótesis de inducción ii), entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + k(k+2) + (k+1)(k+3) &= \frac{k(k+1)(2k+7)}{6} + (k+1)(k+3) = \\
= \frac{k+1}{6}(k(2k+7) + 6(k+3)) &= \frac{k+1}{6}(2k^2 + 13k + 18) = \frac{(k+1)(2k+9)(k+2)}{6}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la propiedad es válida para cualquier natural.

Ejemplo. Demuestre que para todo natural n , $n^5 - n$ es divisible entre 5.

i) Mostremos que es válido para $n = 1$

$$1^5 - 1 = 0 = 0 \cdot 5$$

Por lo tanto se cumple para $n = 1$.

ii) Supongamos válido para $n = k$. Entonces:

$$k^5 - k = 5m$$

Para alguna $m \in \mathbb{N}$. P.D. La propiedad es válida para $n = k+1$.

Es decir, debemos mostrar que:

$$(k+1)^5 - (k+1) = 5m$$

Partiendo del lado izquierdo de ésta igualdad y desarrollando:

$$\begin{aligned}
(k+1)^5 - (k+1) &= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 4k = \\
= k^5 - k + 5k(k^3 + 2k^2 + 2k + 1) &= 5m + 5k(k^3 + 2k^2 + 2k + 1) = \\
= 5(m + k(k^3 + 2k^2 + 2k + 1)) &
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(k+1)^5 - (k+1)$ es divisible entre 5. Entonces la propiedad es válida para cualquier natural.

Ejemplo. Demuestre que para cualquier natural $n \geq 2$ se cumple que:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

i) Mostremos que la propiedad es válida para el primer natural que la debe satisfacer. Para $n = 2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$$

Por lo que es válida para $n = 2$.

ii) Supongamos válido para $n = k$. Entonces se tiene que:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$$

P.D. La propiedad se cumple para $n = k+1$, es decir, que:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$$

Usando ii) y sumando $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$, se tiene que:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Por otro lado tenemos que:

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k(k+1)} + 1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k^2 + k} + 1}{\sqrt{k+1}} > \frac{k+1}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1}$$

Por lo tanto, la propiedad es válida para cualquier natural mayor o igual a 2.