Problemas Resueltos de Geometría Moderna I

T. Danae Castillo Camacho

Agosto 2020

Índice general

Geometría del triángulo

Problema 1

Demuestre que un cuadrilátero es un paralelogramo si y sólo si sus lados opuestos son iguales.

¿Qué nos pide el problema?

"Si y sólo si" es una doble implicación, es decir, el enunciado funciona en dos sentidos; la forma más fácil de verlo es separar "si y sólo si" en "si" y "sólo si", de modo que el problema nos pide dos cosas:

1. Demostrar que un cuadrilátero es un paralelogramo **si** sus lados opuestos son iguales.
2. Demostrar que un cuadrilátero es un paralelogramo **sólo si** sus lados opuestos son iguales.

Dicho de otro modo nos pide demostrar que:

1. Si un cuadrilátero es un paralelogramo entonces sus lados opuestos son iguales.
2. Si los lados opuestos de un cuadrilátero son iguales entonces es un paralelogramo.

Procedamos de forma separada.

I. Para el enunciado en 1. Si un cuadrilátero es un paralelogramo entonces sus lados opuestos son iguales.

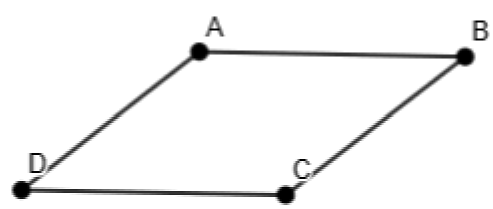
¿Cuáles son los datos?¿Que podemos suponer?

Tenemos un cuadrilátero que es paralelogramo (hipótesis)

¿Qué queremos demostrar?

Queremos demostrar que su lados opuestos son iguales

Entonces sea ABCD un paralelogramo como se muestra



¿Qué sabemos de él?

Por ser un paralelogramo sus lados opuestos son paralelos, es decir AB||DC y AD||BC

Usando la notación (A, B, C, D)¿Qué queríamos demostrar?

Que AB=DC y BC=AD

¿Cómo podemos hacerlo?

Intuitivamente es obvio que es verdad, pero queremos demostrarlo y lo único que podemos usar son los postulados de Euclides y los criterios de congruencia y semejanza de triángulos.

¿Hay algo que podamos usar?¿Alguno que nos permita *igualar* segmentos de recta?

Debemos usar alguno de los criterios de congruencia de triángulos

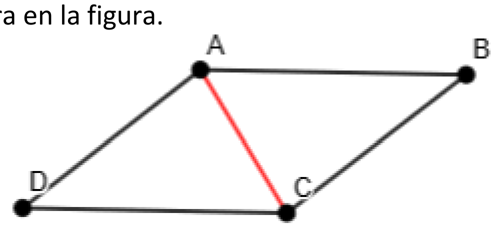
¿Qué necesitamos?

Dos triángulos que tengan a AB, AD, DC y BC como lados.

¿Cómo obtenerlos?

Es fácil ver que dichos triángulos se obtienen al trazar alguna de las diagonales de ABCD (puede ser cualquiera)

Tracemos AC como se muestra en la figura.



Queremos que AB=DC y BC=AD por lo que necesitamos mostrar que ΔABC≡ΔCDA

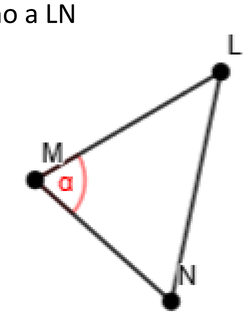
Notemos que los triángulos ΔABC y ΔCDA tienen un lado en común, el lado AD

Ahora bien, para ver que ΔABC≡ΔCDA ¿qué criterio de congruencia debemos usar?

Como queremos demostrar que sus lados son iguales (AB=DC y BC=AD) no podemos suponer que ya lo sean por lo que el único criterio viable es ALA que dice que dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales un lado y los dos ángulos adyacentes a ese lado

**¿A qué se refiere con ángulos adyacentes a ese lado?

Quiere decir que están "pegados" a ese lado, por ejemplo en la figura el ángulo α es adyacente a ML y a MN pero no a LN



Entonces ¿Qué nos falta para poder usar ese criterio?

Ya tenemos que ΔABC y ΔCDA tienen un lado en común por lo que falta mostrar que los ángulos adyacentes a dicho lado son iguales.

¿Cómo podemos hacerlo?¿Qué no hemos usado aún?

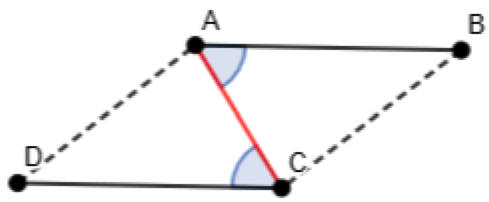
No hemos usado que AB||DC y AD||BC, pero…

¿Cómo se relaciona eso con los ángulos?

Ángulos y paralelas. El 5° postulado de Euclides.

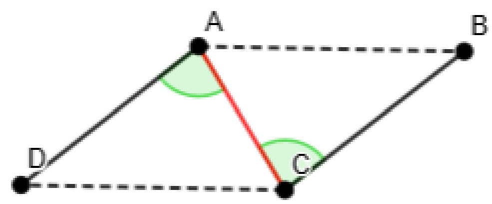
Así como AB||DC y AC transversal a ellas tenemos que

<CAB=<ACD



Y como AD||BC y AC transversal a ellas tenemos que

<BCA=<DAC



Y en consecuencia ΔABC≡ΔCDA (por el criterio ALA)

De donde podemos concluir AB=DC y BC=AD ¿por qué?

Se concluye pues tenemos que <CAB=<ACD y <BCA=<DAC por lo que <ABC=<CDA

Y la correspondencia de lados sería AC=AC, BC=AD y AB=DC

II. Para el enunciado en 2. Si los lados opuestos de un cuadrilátero son iguales entonces es un paralelogramo.

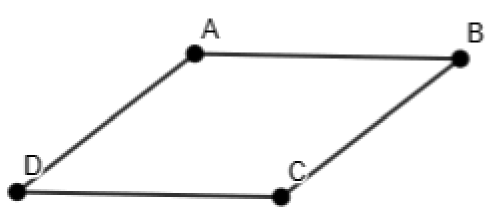
¿Ahora cuál es nuestra hipótesis?

Un cuadrilátero cuyos lados opuestos son iguales

¿Qué es lo que queremos probar?

Que es un paralelogramo, es decir, sus lados opuestos son paralelos

Dibujemos el cuadrilátero



¿Qué es lo que sabemos?

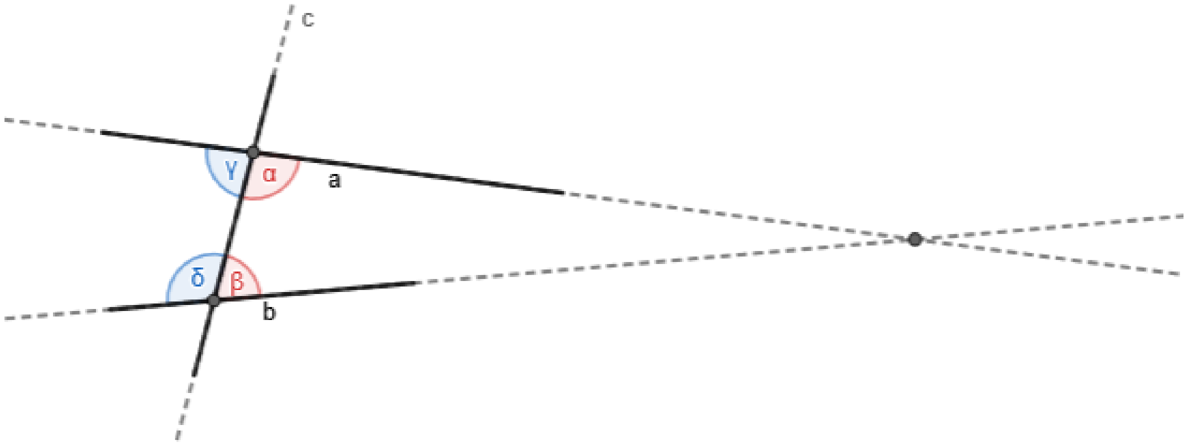
Sabemos que AB=DC y AD=BC

Necesitamos probar que AB‖DC y AD‖BC ¿Qué podemos usar?

Nuevamente necesitamos el 5° postulado de Euclides pues necesitamos paralelas, pero necesitamos enunciarlo de una forma distinta.

¿Cómo lo enunciamos?

Si dos rectas son cortadas por un transversal y en alguno de los lados de la transversal la suma de los ángulos interiores es menor a 180°, las rectas se intersecan



En la figura a y b son las rectas y c es la transversal, los ángulos interiores son los ángulos que se forman en medio de las rectas a y b (α, β, ϒ, δ) y si α+β o ϒ+δ es menor a 180° las rectas a y b se intersecan

¿Entonces que se necesita para dos rectas sean paralelas?

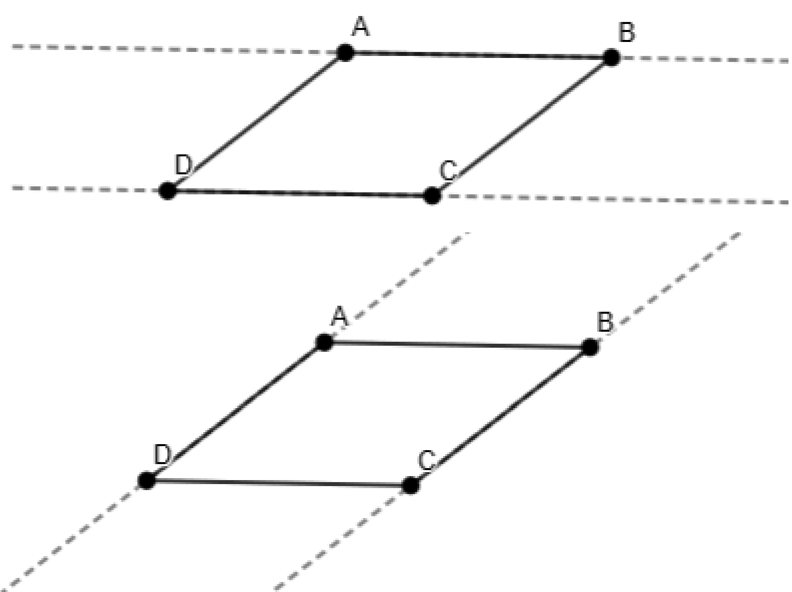
Si dos rectas son cortadas por una transversal, la suma de los ángulos interiores con las rectas es 180°

¿Qué necesitamos para poder usarlo?

Dos rectas y una transversal

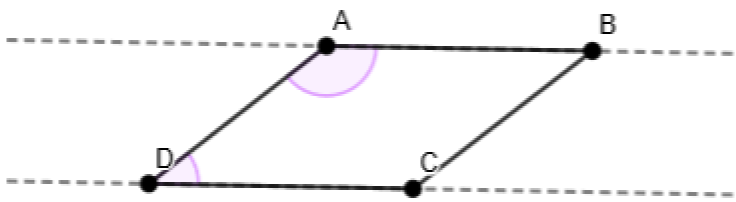
¿En nuestro problema cuales serían las rectas y la transversal?

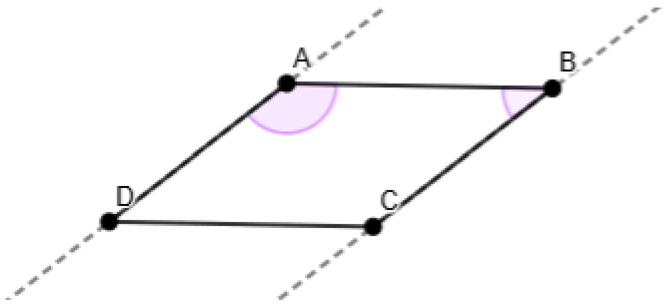
Como necesitamos probar que AB‖DC y AD‖BC; las rectas deben ser AB con DC usando AD o BC como transversal, y AD con BC usando a AB o DC como transversal



¿Cuáles serían los ángulos interiores? Más aun ¿Cuáles nos son más convenientes?

Serían los ángulos interiores del cuadrilátero





Necesitamos probar que <CDA+<DAB=180° y que <DAB+<ABC=180°

¿Cómo lo hacemos?¿Cuáles son nuestros datos?

Los lados opuestos son iguales, AB=DC y AD=BC

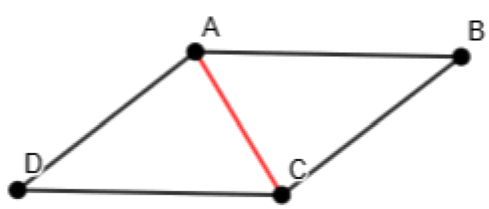
Tenemos segmentos de recta pero necesitamos ángulos ¿Cómo podemos relacionarlos?

Otra vez necesitamos congruencia de triángulos.

¿Qué triángulos? Necesitamos una figura auxiliar pero ¿Cuál?

Necesitamos triángulos que tengan a AB, BC, DC y AD como sus lados, por lo que necesitamos una de las diagonales del cuadrilátero (puede ser cualquiera)

Tracemos AC

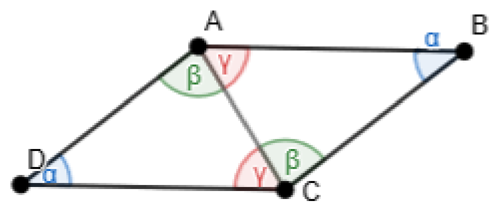


¿Qué podemos decir de los triángulos que obtenemos?¿Están relacionados de alguna forma?

Por hipótesis AB=DC y AD=BC y además tienen a AC como lado común, entonces son congruentes por el criterio LLL

Pero nos interesaban los ángulos ¿Qué podemos decir de ellos ahora?

Como $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ tenemos



$\angle ABC = \angle CDA = \alpha$

$\angle BCA = \angle DAC = \beta$

$\angle CAB = \angle ACD = \Upsilon$

Pero queríamos probar que $AB \parallel DC$ y $AD \parallel BC$ ¿Qué necesitamos para hacerlo?

Probar que $\angle CDA + \angle DAB = 180°$ y que $\angle DAB + \angle ABC = 180°$

Ahora bien, sabemos que $\angle ABC = \angle CDA = \alpha$ y que $\angle DAB = \beta + \Upsilon$, de modo que bastaría mostrar que $\alpha + \beta + \Upsilon = 180°$

Pero $\alpha + \beta + \Upsilon = 180°$ pues son los ángulos internos de un triángulo ya sea ΔABC o ΔCDA

Por lo que $AB \parallel DC$ y $AD \parallel BC$

Problema 2

Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se intersecan en su punto medio

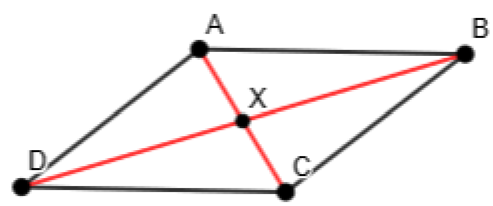
¿Cuáles son los datos?¿Qué es lo que tenemos?

Un paralelogramo

¿Qué tenemos que ver?

Que sus diagonales se intersecan en su punto medio

Dibujemos la figura, sea ABCD un paralelogramo y AC Y BD sus diagonales y llamemos X a su intersección



¿Qué es lo que si sabemos de ABCD?

Pues como es un paralelogramo, sus lados opuestos son paralelos y miden lo mismo (por el problema anterior), es decir, AB||DC y AD||BC y además AB=DC y AD=BC

¿Qué queremos probar?

Que AX=XC y BX=XD

Nuevamente necesitamos igualar segmentos de recta ¿Qué podemos usar?

Los criterios de congruencia de triángulos

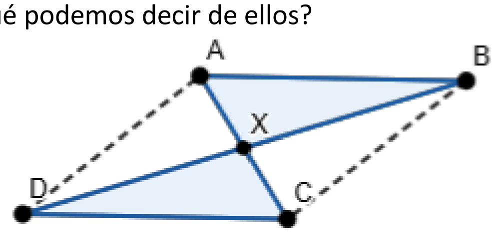
¿Qué triángulos debemos comparar?¿Qué es lo que necesitamos?

Necesitamos que tengan a AX, XC, BX y XD como sus lados pues son los segmentos que queremos igualar

¿Cuáles triángulos podemos usar?¿Qué triángulos nos sirven?

Podemos usar ΔABX y ΔCDX o a ΔAXD y ΔCXB

Usemos a ΔABX y ΔCDX. ¿Qué podemos decir de ellos?



Uno de sus lados es igual AB=DC

¿Cómo podemos ver que sean congruentes?¿Qué criterio de congruencia nos conviene usar?

Como queremos demostrar que sus lados son iguales (AX=XC y BX=XD) no podemos suponer que ya lo sean por lo que el único criterio viable es ALA

Necesitamos que <XAB=<XCD y <ABX=<CDX ¿Cómo lo mostramos?¿Ya usamos todos los datos?

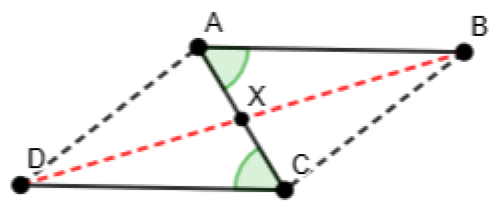
No hemos usado que AB∥DC y AD∥BC

Tenemos ángulos entre paralelas ¿qué podemos usar?

El 5° postulado de Euclides

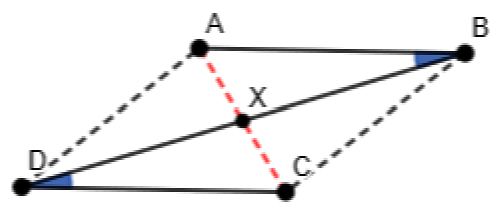
Entonces como AB∥DC y AC transversal a ellas tenemos que

<XAB=<XCD



Y como AB∥DC y BD transversal a ellas tenemos que

<ABX=<CDX



Así como <XAB=<XCD

AB=DC

<ABX=<CDX

Entonces ΔABX≡ΔCDX por el criterio ALA

Y en consecuencia AX=XC y BX=XD

Problema 3

La bisectriz de un ángulo en un triángulo, divide el lado opuesto en segmentos cuya razón es la misma a la de los lados adyacentes del ángulo.

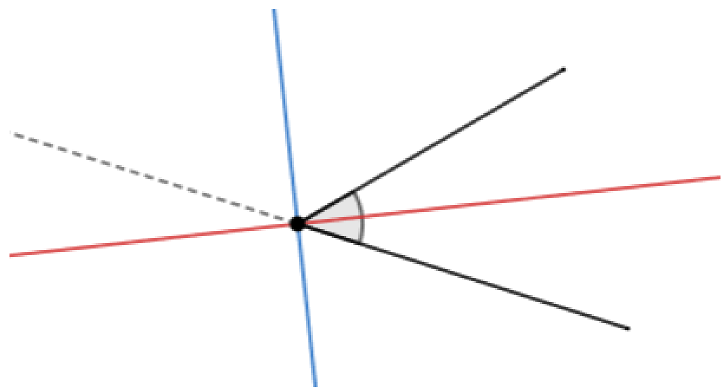
¿Qué nos pide el problema?

> A diferencia de los demás no es explícito, es una afirmación y debemos probar que es cierta

Antes de analizar el enunciado es importante entender todos los conceptos que hay en él.

**¿Cuáles son las bisectrices de un ángulo?

> La bisectriz de un ángulo es la recta que biseca al ángulo, es decir, lo divide en dos ángulos iguales. En general, un ángulo tiene dos bisectrices, la bisectriz interior y la exterior; la interior es la que divide al ángulo en sí, en la figura la recta roja; y la exterior es la que biseca al ángulo que se genera al extender alguno de los lados del ángulo, en la figura la recta azul.

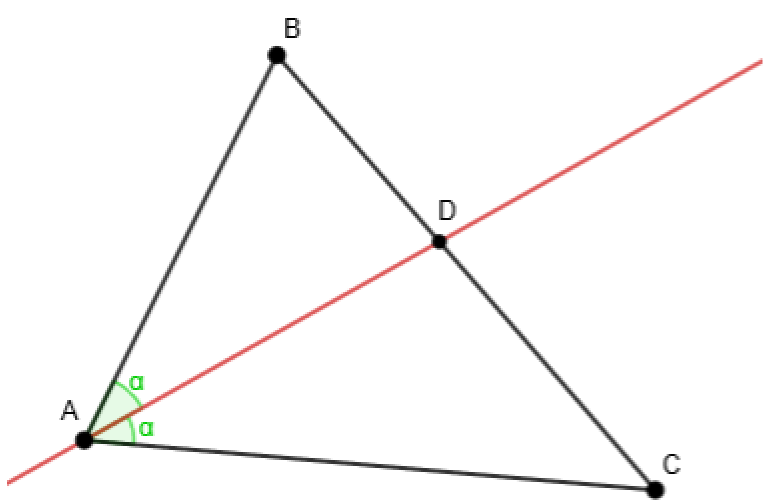


Ahora bien, analicemos el enunciado

"La bisectriz de un ángulo en un triángulo, …" ¿Qué nos dice?

> Habla de un triángulo y la bisectriz de uno de sus ángulos pero no especifica si es la bisectriz interior o la exterior

Primero consideremos el caso de la bisectriz exterior. Dibujemos la figura



"La bisectriz de un ángulo en un triángulo, *divide el lado opuesto en segmentos cuya razón es la misma a la de los lados adyacentes del ángulo*." ¿Qué quiere decir?

Que D divide a BC de modo que $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

Entonces, ¿Qué debemos demostrar?

Que $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

¿Cómo lo hacemos?¿Qué es lo que si sabemos?

Sabemos que <CAD=<DAC=α

Queremos establecer una relación entre segmentos de recta y tenemos ángulos ¿Qué podríamos usar para hacerlo?

Semejanza de triángulos

Pero en nuestra figura no hay triángulos semejantes ¿Qué podemos hacer?

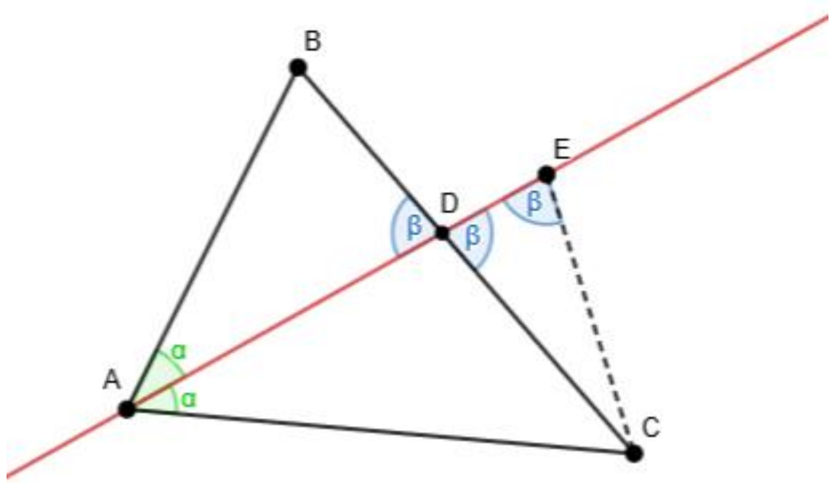
Podemos construirlos

Pero ¿Cómo?¿Qué triángulo debemos construir?

Como queremos que $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$, necesitamos que sea semejante a ΔABD y que tenga a AC o a CD como uno de sus lados. Además como ya tenemos que <CAD=<DAC=α, es conveniente que <CAD sea uno de los ángulos del triángulo que queremos construir, por lo que AD determina uno de sus lados y AC es uno de sus lados

Entonces A y C son dos vértices del triángulo y el tercero está sobre AD, digamos E, y dicho vértice debe cumplir que CD=CE pues queremos que $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

Tomemos E sobre AD tal que CD=CE



*Notemos que, como CD=CE, el ΔCDE es isósceles y por ende <CDE=<DEC=β, y además <CDE=<BDA=β, por ser opuestos por el vértice, y en consecuencia <DEC=<BDA=β

De modo que tenemos que <CAD=<DAC=α y <DEC=<BDA=β, por lo que ΔABD≈ΔACE ¿Por qué?

Es bastante sencillo, sumemos los ángulos internos de ΔABD y ΔACE

α+β+<ABD=180°

α+β+<ECA=180°

y al igualar obtenemos que <ABD=<ECA por lo que los ángulos de los triángulos ΔABD y ΔACE son todos iguales y, por el criterio AAA, ΔABD≈ΔACE

Así, como ΔABD≈ΔACE de su correspondencia de lados tenemos

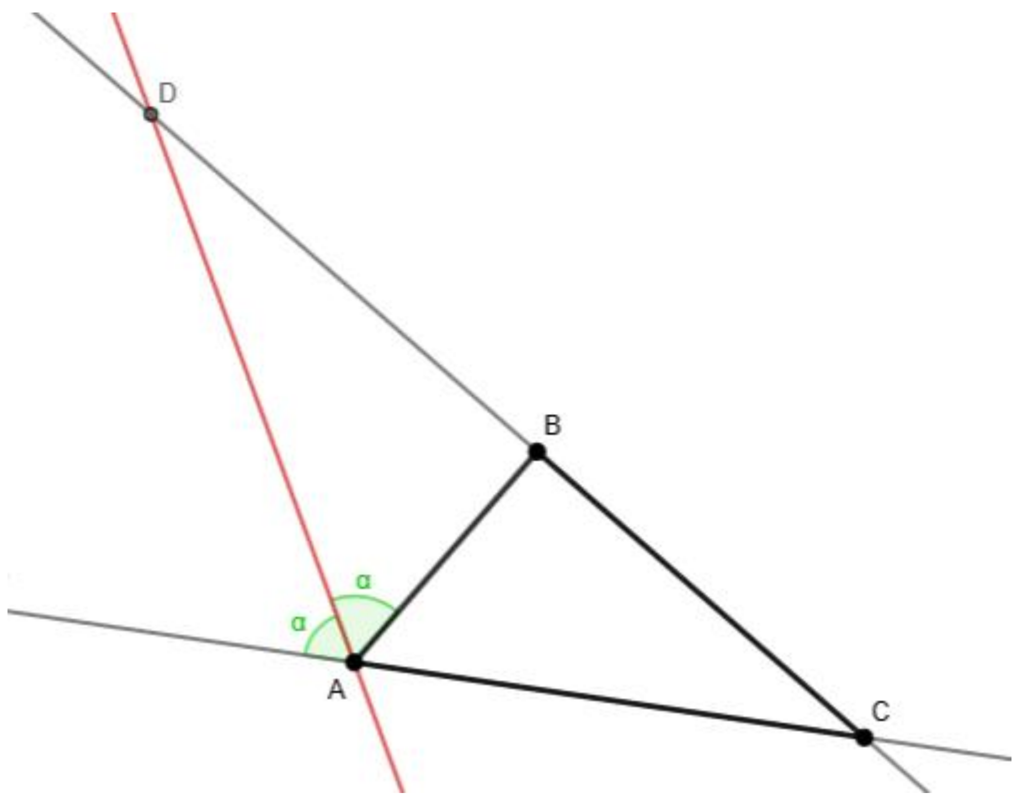
$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CE}=\frac{AD}{AE}$$

Pero por construcción CD=CE, por lo que

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CE}=\frac{BD}{CD}$$

Que es lo que se quería demostrar.

Pero falta considerar el caso en el que la bisectriz sea exterior. Dibujemos la figura para ese caso



Analicemos de nuevo el enunciado

"La bisectriz de un ángulo en un triángulo, *divide el lado opuesto en segmentos cuya razón es la misma a la de los lados adyacentes del ángulo*." ¿Qué quiere decir?

Que D divide a BC de modo que $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$

Entonces, ¿Qué debemos demostrar?

Que $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$

Queremos probar que $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$ ¿Cómo lo hacemos? ¿Qué es lo que tenemos?

Nuevamente tenemos una bisectriz, pero está vez es un bisectriz exterior

¿Podemos usar el caso anterior?¿Cómo?

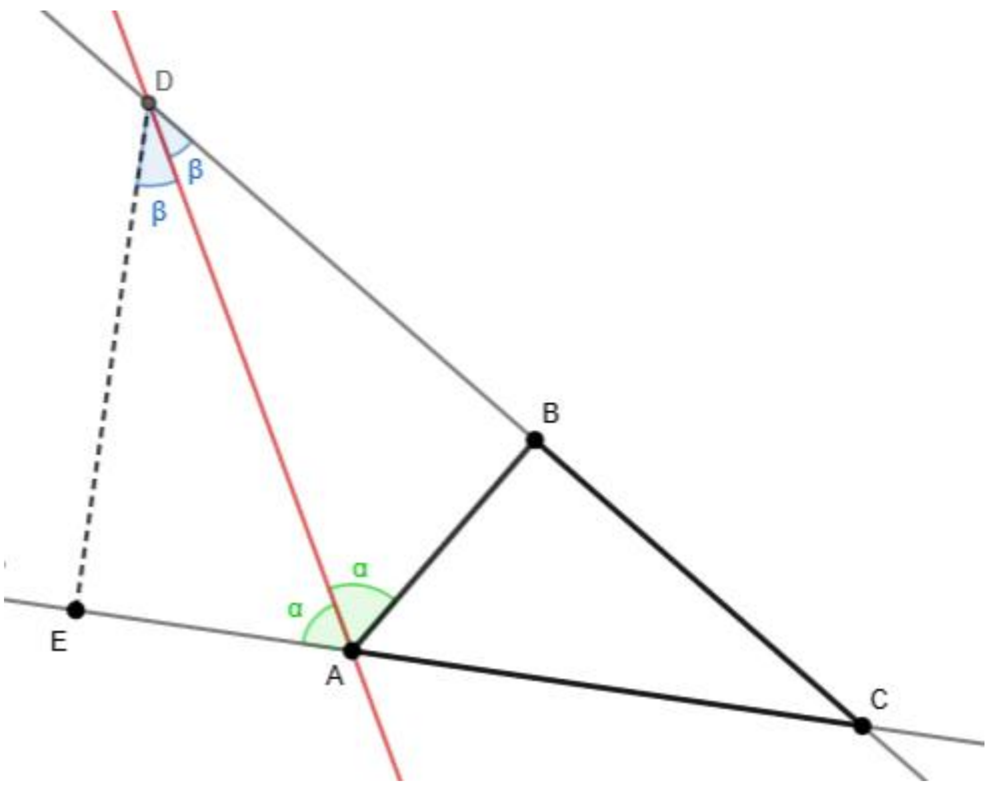
Podríamos construir un triángulo en el que la bisectriz AD sea una bisectriz interior

Pero ¿Cómo?¿Qué triángulo debemos construir?

Como queremos que AD sea una bisectriz interior, parece conveniente usar a CD como uno de los lados, por lo que necesitamos construir un punto en AC, digamos E, tal que <CDA=<ADE

Entonces C y D son dos vértices del triángulo y el tercero está sobre AC, digamos E, y dicho vértice debe cumplir que <CDA=<ADE=β, pues queremos que AD sea una bisectriz interior

Tomemos E sobre AC tal que <CDA=<ADE=β



De modo que tenemos que <BAD=<DAE=α y <CDA=<ADE=β, por lo que ΔABD≅ΔAED ¿Por qué?

Porque ΔABD y ΔAED tienen un lado en común, el AD, pero además <BAD=<DAE=α y <CDA=<ADE=β, por lo que por el criterio ALA, ΔABD≅ΔAED

Así, como ΔABD≅ΔAED de su correspondencia de lados tenemos que AB=AE, BD=ED y AD=AD

¿Y eso de que nos sirve?

Notemos que, por construcción, AD es la bisectriz de <EDC

Entonces AD es una bisectriz interior para el triángulo ΔCDE y, por lo demostrado antes en este problema, tenemos que

$$\frac{ED}{CD}=\frac{AE}{AC}$$

Pero, como ΔABD≅ΔAED, AB=AE y BD=ED por lo que

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AC}=\frac{ED}{CD}=\frac{BD}{CD}$$

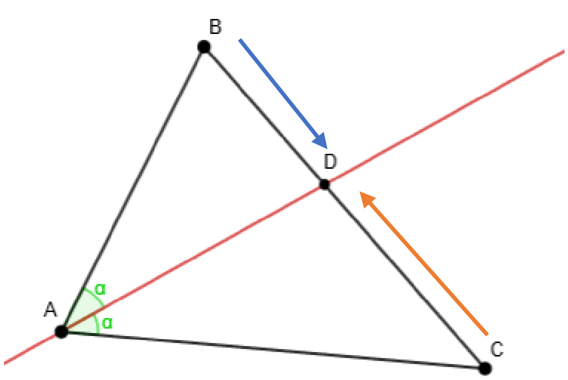
Es decir

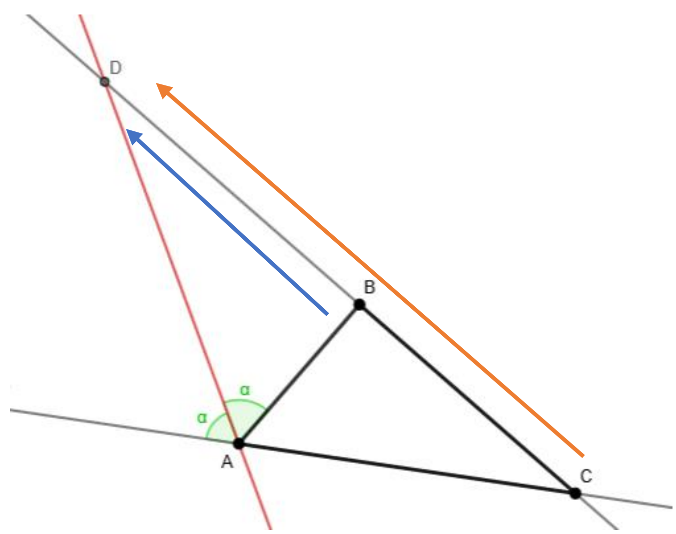
$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$$

Que es lo que se quería demostrar.

Por tanto queda demostrado para la bisectriz interior y la exterior.

*El problema anterior fue demostrado y enunciado sin considerar segmentos dirigidos. Si consideramos segmentos dirigidos, apoyándonos en las figuras, es fácil ver que en el caso de la bisectriz interior la razón $\frac{BD}{CD}$ es negativa pues BD y CD tienen direcciones opuestas, pero en el caso de la bisectriz exterior $\frac{BD}{CD}$ es positiva pues BD y CD tienen la misma dirección





Problema 4

La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide al triángulo en dos triángulos directamente semejantes, cada uno de los cuales es inversamente semejante al triángulo dado.

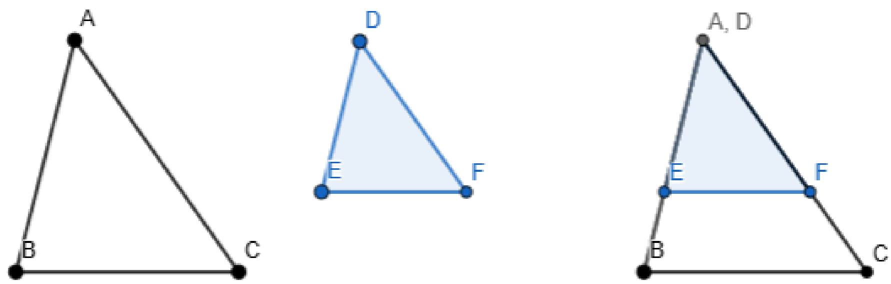
¿Qué nos pide el problema?

nuevamente es una afirmación y debemos probar que es cierta

Antes de analizar el enunciado es importante entender todos los conceptos que hay en él.

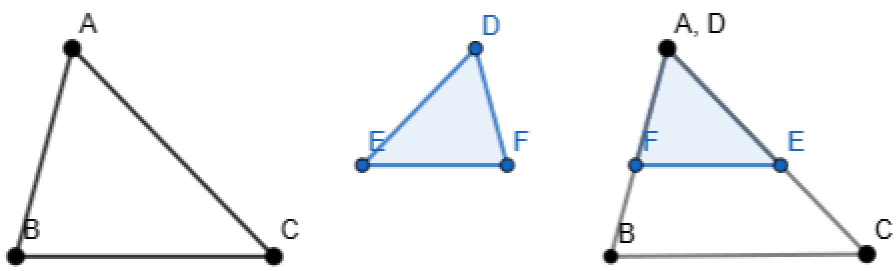
**¿Qué quiere decir que dos triángulos sean *directamente* semejantes?

Significa que las parte correspondientes están en el mismo orden. Se refiere a que podemos "encimar" los triángulos de modo que dos de sus lados correspondientes coincidan y los terceros sean paralelos "arrastrándolos" sobre la hoja



**¿Qué quiere decir que dos triángulos sean *inversamente* semejantes?

Significa que las parte correspondientes están en orden inverso. Se refiere a que para "encimar" los triángulos de modo que dos de sus lados correspondientes coincidan y los terceros sean paralelos tenemos que "voltear" alguno de los triángulos



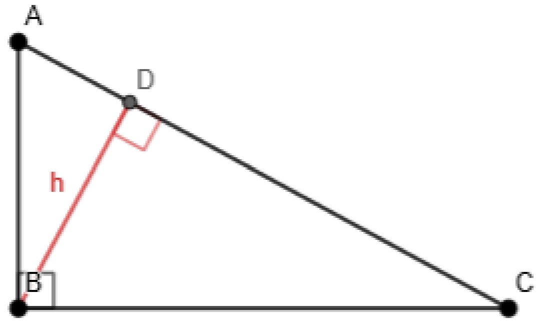
En general no haremos hincapié en que sean inversa o directamente semejantes

Ahora bien analicemos el enunciado por partes

"La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo…" ¿qué nos dice?

Habla de un triángulo rectángulo y una de sus alturas, en específico la que es perpendicular a la hipotenusa.

Dibujemos la figura



“La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo *divide al triángulo en dos triángulos directamente semejantes*,…” ¿Qué nos dice?¿quién divide al triángulo?¿en que lo divide?

> La altura h divide al triángulo en los triángulos ΔABD y ΔBCD y esos triángulos son directamente semejantes

“La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide al triángulo en dos triángulos directamente semejantes*, cada uno de los cuales es inversamente semejante al triángulo dado*.” ¿Qué quiere decir?

> Que los triángulos ΔABD y ΔBCD son inversamente semejantes al triángulo ΔABC

Entonces ¿qué debemos demostrar?

> Que ΔABD≈ΔBCD directamente, ΔABD≈ΔABC y ΔBCD≈ΔABC inversamente

¿Cómo lo hacemos?¿Qué es lo que si sabemos de los triángulos?

> Sabemos que son triángulos rectángulos; ΔABC por hipótesis y ΔABD y ΔBCD pues h es perpendicular a AC

¿Es suficiente?¿Qué más podemos decir?

> ΔABD y ΔABC tienen un ángulo en común <BAD=<BAC y ΔBCD y ΔABC tienen un ángulo en común <BCD=<BCA

¿Podemos relacionar los triángulos?¿Qué podemos decir ahora?

> Podemos concluir que son semejantes

Por una parte los triángulos ΔABD y ΔABC tienen dos ángulos iguales, pues <BAD=<BAC y <ADB=<ABC=90°, por lo que el tercer ángulo también lo es, es decir, <ABD=<ACB ¿Por qué?

> Es bastante sencillo sumemos los ángulos internos de ΔABD y ΔABC
>
> > <BAD+<ADB+<ABD=180°
> >
> > <BAC+<ABC+<ACB=180°
>
> Al igualar tenemos <BAD+<ADB+<ABD=<BAC+<ABC+<ACB
>
> Pero sabemos <BAD=<BAC y <ADB=<ABC=90°, por lo que obtenemos que <ABD=<ACB

Así ΔABD y ΔABC tienen todos sus ángulos iguales por lo que son semejantes y la correspondencia de sus lados es $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{AB}$

De forma similar ΔBCD y ΔABC son semejantes pues <BCD=<BCA, <BDC=<ABC=90° por lo que <BAC=<DBC y la correspondencia de sus lados es $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$

Ya tenemos que ΔABD≈ΔABC y ΔBCD≈ΔABC, y la semejanza inversa se sigue de la correspondencia. Si no puede verlo intente dibujarlo.

¿Qué nos falta?

Falta ver que ΔABD≈ΔBCD

¿Qué necesitamos para hacerlo?

Necesitamos comparar los ángulos de ΔABD y ΔBCD

¿Cómo podemos hacerlo?

Podemos usar las igualdades de ángulos que hemos obtenido

Entonces de las igualdades de ángulos que ya sabemos, tenemos

<BAD=<BAC=<DBC

<ADB=<ABC=<BDC=90°

<ABD=<ACB=<BCD

De donde obtenemos que <BAD =<DBC, <ADB =<BDC=90° y <ABD =<BCD

Y podemos concluir que ΔABD≈ΔBCD y la correspondencia de sus lados es $\frac{AD}{BD} = \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{BC}$

Y a semejanza directa se sigue de la correspondencia. Si no puede verlo intente dibujarlo.

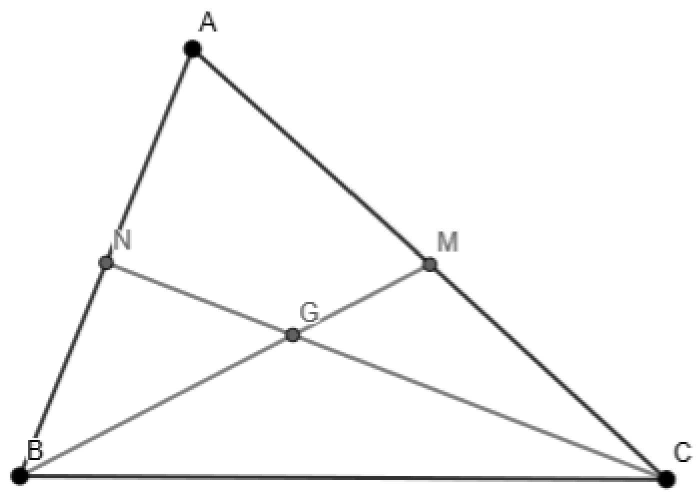
Problema 5

Demuestre que si en un triángulo ABC se trazan las rectas BM y CN, en donde M y N son, respectivamente, los punto medios de CA y AB, y si G es el punto de intersección de esos dos segmentos, entonces BG y CG son, respectivamente, dos veces más grandes que los segmentos GM y GN.

¿Qué es lo que nos dice el problema?¿Qué es lo que tenemos?

> Tenemos un triángulo ABC y las rectas que unen a los vértices B y C con los puntos medios de CA y AB, así como su intersección

Dibujemos la figura



¿Qué es lo que queremos demostrar?

> Queremos mostrar que BG=2GM y CG=2GN

Dicho de otro modo queremos ver que $\frac{GM}{BG} = \frac{GN}{CG} = \frac{1}{2}$ ¿Cómo podemos hacerlo?¿qué podríamos usar?

> Semejanza de triángulos

¿Qué triángulos?¿Cuáles nos son convenientes?

> Necesitamos que tengan a GM y GN, y BG y CG como sus lados por lo que los triángulos ΔGBC y ΔGMN son los que queremos

Entonces queremos probar que ΔGBC y ΔGMN son semejantes, necesitamos usar algún criterio de semejanza ¿Cuál?

> Pues como queremos mostrar la proporcionalidad de los lados no podemos usarlo, por lo que el criterio que parece más conveniente es el AAA, es decir mostrar que todos sus ángulos son iguales

¿Podemos hacerlo?¿Qué es lo que sabemos de ellos?

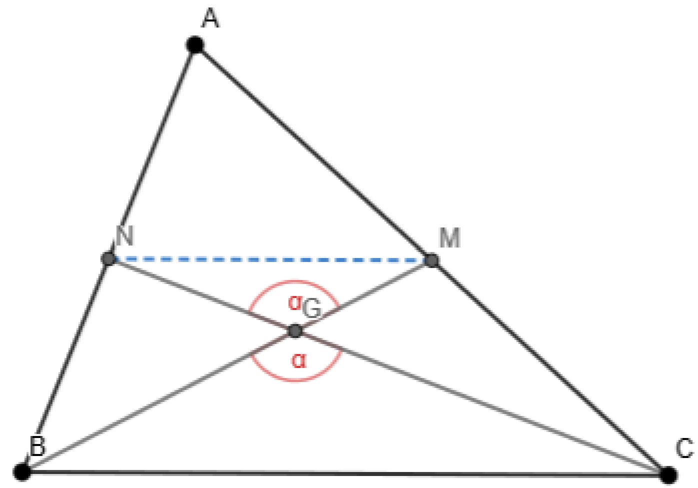
Sabemos que tienen un ángulo igual, <BGC=<MGN pues son opuestos por el vértice

¿Qué es lo que nos falta?

Necesitamos ver que sus otros dos ángulos son iguales

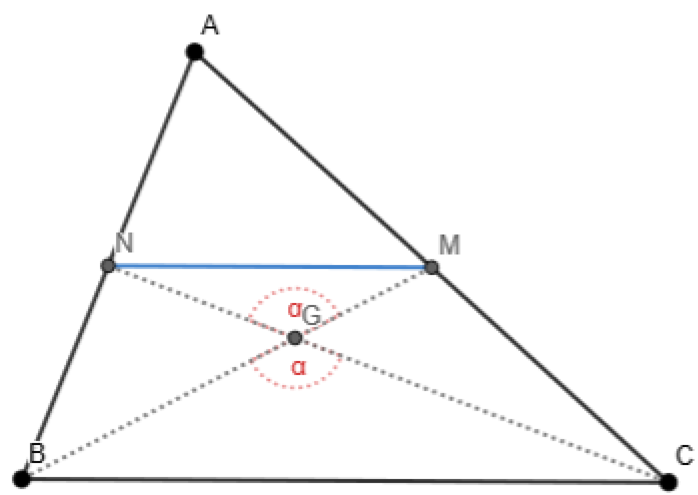
Así, como queremos probar que $\frac{GM}{BG} = \frac{GN}{CG} = \frac{1}{2}$, necesitamos que <GNM=<GCB y que <NMG=<CBG

¿Cómo podemos hacerlo? Observe la figura ¿Qué es lo que necesitamos?



Necesitamos que NM∥BC

Concentrémonos en NM ¿Qué necesitamos para que NM∥BC?¿Se parece a alguna construcción anterior?



Se parece a la figura de semejanza directa

¿Nos es de utilidad?¿Cómo podemos usarlo?

Si mostramos que ΔANM y el ΔABC son directamente semejantes entonces NM∥BC

¿Cómo lo hacemos?¿Qué no hemos usado?

> No hemos usado que M y N son los puntos medios de AC y AB respectivamente, es decir AB=2AN y AC=2AM

Entonces tenemos que $\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2}$, que es además la razón que buscamos

Pero ¿es suficiente para probar que ΔANM≈ΔABC?

> Si, pues sabemos <BAC=<NAM por lo que por el criterio LpALp, que nos dice que dos triángulos son semejantes si dos de sus lados son proporcionales y el ángulo entre ellos es igual, los triángulos ΔANM y ΔABC son directamente semejantes

Entonces ΔANM≈ΔABC directamente

De donde tenemos que <NAM=<BAC, <AMN=<ACB, <MNA=<CBA y $\frac{NM}{BC} = \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2}$

Y además NM‖BC

Por lo que <GNM=<GCB y que <NMG=<CBG y en consecuencia ΔGBC y ΔGMN son semejantes pues todos sus ángulos son iguales y obtenemos que $\frac{NM}{BC} = \frac{GM}{BG} = \frac{GN}{CG}$

Y como sabemos $\frac{NM}{BC} = \frac{1}{2}$, entonces $\frac{GM}{BG} = \frac{GN}{CG} = \frac{1}{2}$ que es lo que queríamos probar.

Problema 6

Demuestre que las medianas de un triángulo son concurrentes

**¿Cuáles son las medianas de un triángulo?

> Son las rectas que unen a los vértices del triángulo con los puntos medios de sus lados opuestos

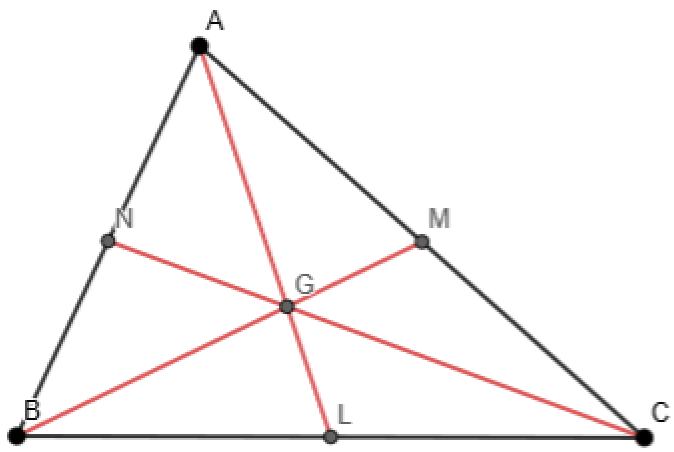
Ahora bien ¿Qué es lo que tenemos?

> Un triángulo y sus medianas

¿Qué queremos probar?

> Que las medianas son concurrentes, es decir, se intersecan en un mismo punto

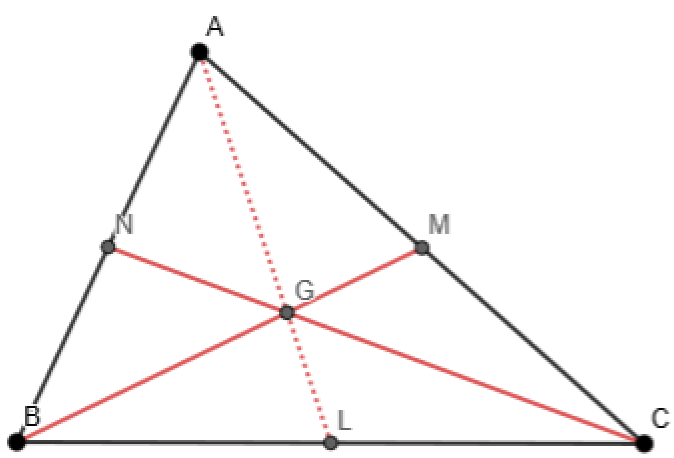
Dibujemos la figura



De la figura es obvio que concurren, pero debemos demostrarlo ¿Cómo lo hacemos?

> No parece que considerar las tres al mismo tiempo nos vaya a ayudar en algo, consideremos sólo dos de ellas y su intersección

Observemos la figura

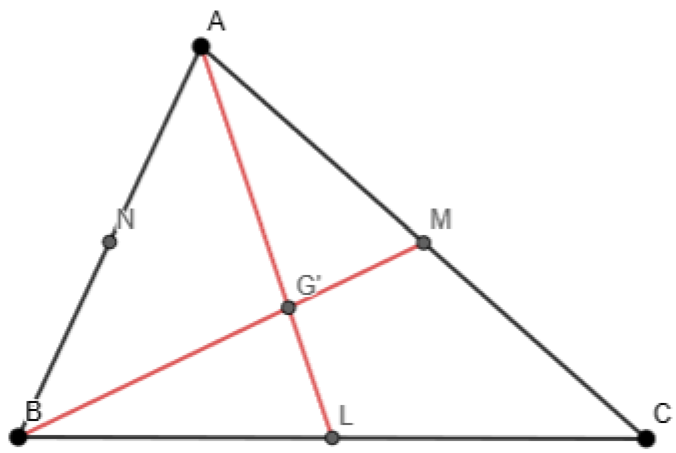


¿Qué podemos decir ahora?¿sabemos algo de ellas?

Es la figura del ejercicio anterior y demostramos que CG=2GN y BG=2GM

¿Nos es útil de alguna forma?¿nos sirve para ver por qué AL debe pasar por G?

Consideremos a AL y a BM y sea G’ su intersección



¿Qué es lo que sabemos de ellas?

Nuevamente por el ejercicio anterior sabemos que BG’=2G’M y AG’=2G’L

¿Nos sirve de algo?¿Podemos relacionarlo con lo anterior?

Sí, tenemos que G y G’ dividen a BM en la misma forma por lo que G=G’

Y en consecuencia AL también pasa por G y por lo tanto las medianas de un triángulo concurren

Al punto de intersección de las medianas se le suele llamar centroide, punto mediano o baricentro.

De modo que hemos demostrado que las medianas concurren, pero no sólo eso, el problema anterior demuestra que G, el baricentro, divide a cada mediana en una razón 2:1.

Problema 7

Si A, B y H son tres puntos distintos que no están en línea recta, existe un punto C, tal que H es el ortocentro del triángulo ABC.

**¿Qué es el ortocentro de un triángulo?

Es el punto de intersección de las alturas del triángulo

¿Qué nos pide el problema?

Nuevamente es una afirmación y debemos mostrar que es verdadera

¿Qué datos nos da el problema?

Tres puntos no colineales A, B y H

¿Qué información nos da de ellos?

Nos dice que A y B son vértices de un triángulo y H es su ortocentro

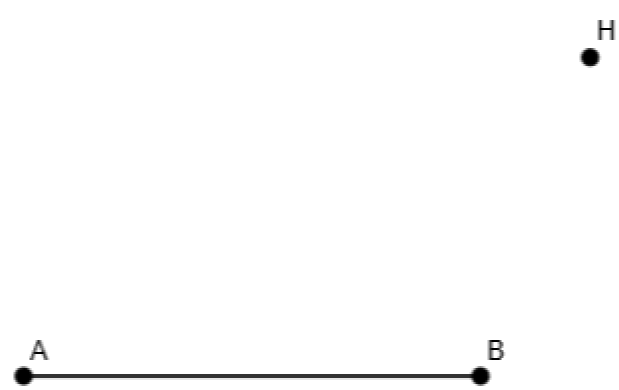
¿Qué queremos demostrar?¿que necesitamos para que la afirmación sea verdadera?

Necesitamos encontrar el punto C tal que H es el ortocentro del triángulo ABC

Entonces tenemos dos vértices y el ortocentro ¿Qué más tenemos?

Como tenemos dos vértices podemos determinar un lado

Dibujemos la figura



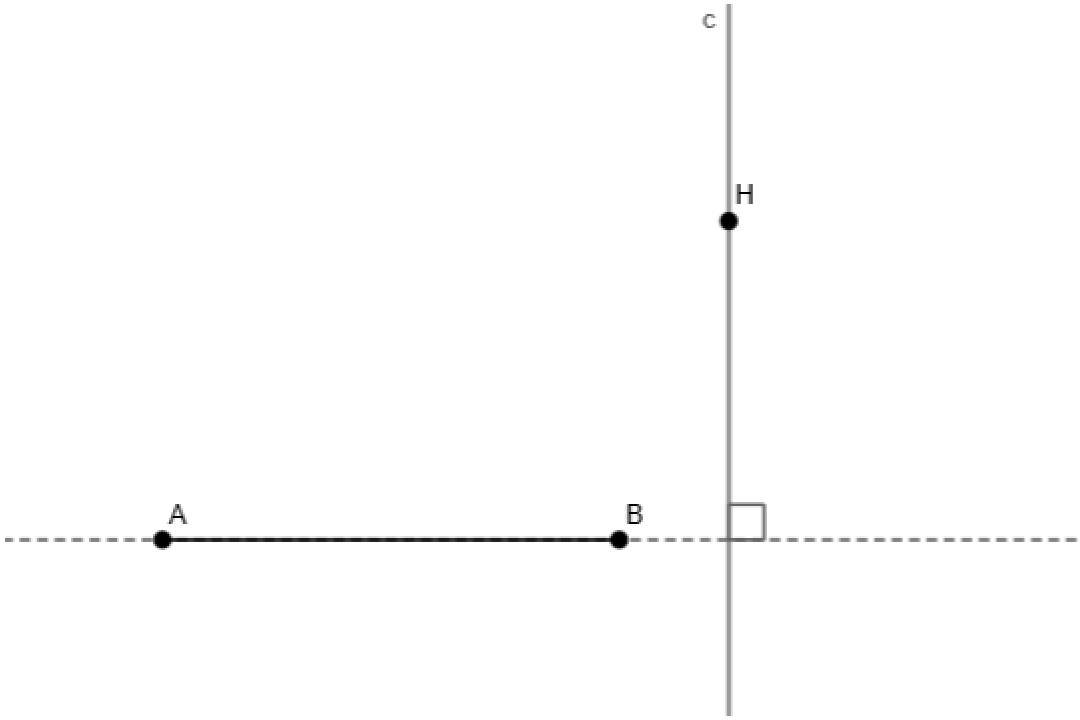
Necesitamos que H sea el ortocentro del triángulo, es decir, es la intersección de las alturas del triángulo que buscamos ¿podemos decir algo sobre las alturas?

Las alturas por A y B pasan por H por lo que podemos determinarlas

¿Qué hay de la altura por C?

C es el vértice buscado pero su altura debe pasar por H y ser perpendicular a AB, por lo que también la podemos determinar

Tracemos la altura por C, llamémosla c

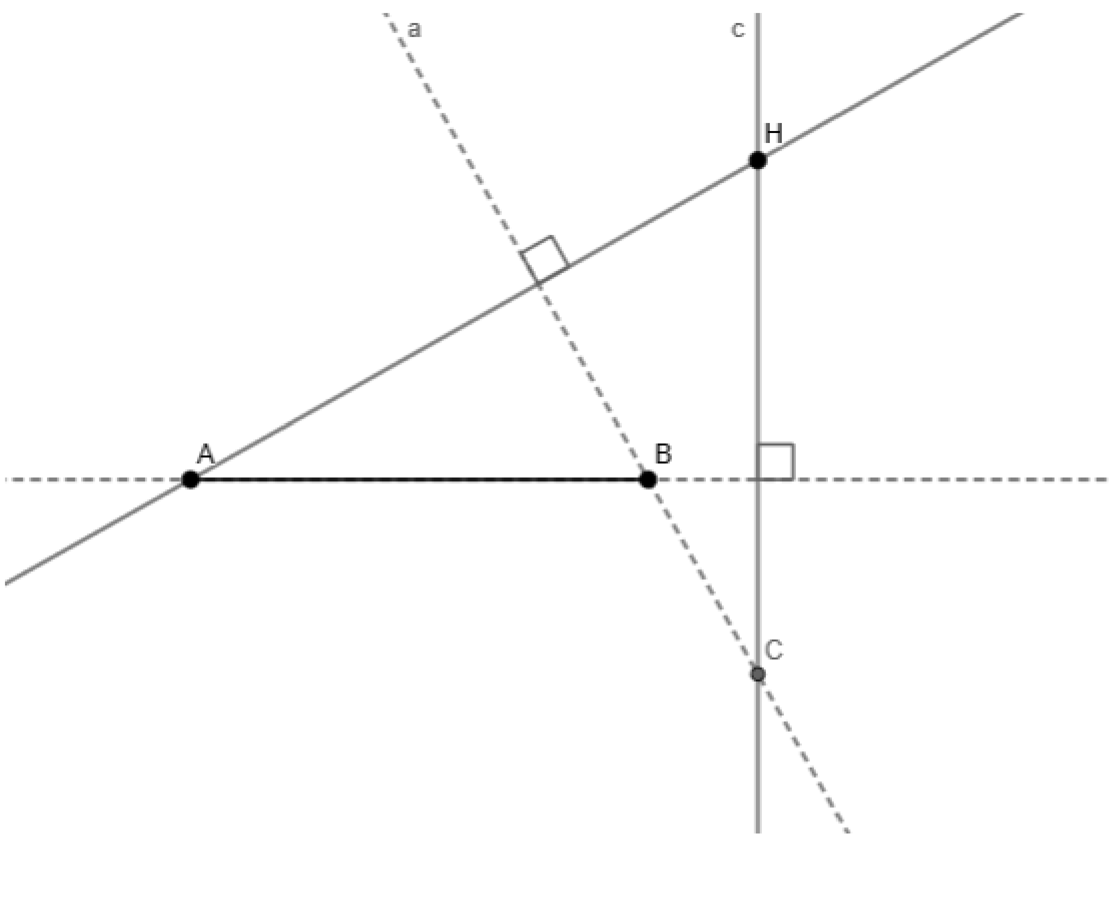


Sabemos que C debe estar sobre la recta c que trazamos, pero no es suficiente para determinarlo ¿qué más podemos hacer?¿cómo podemos usar las otras alturas?

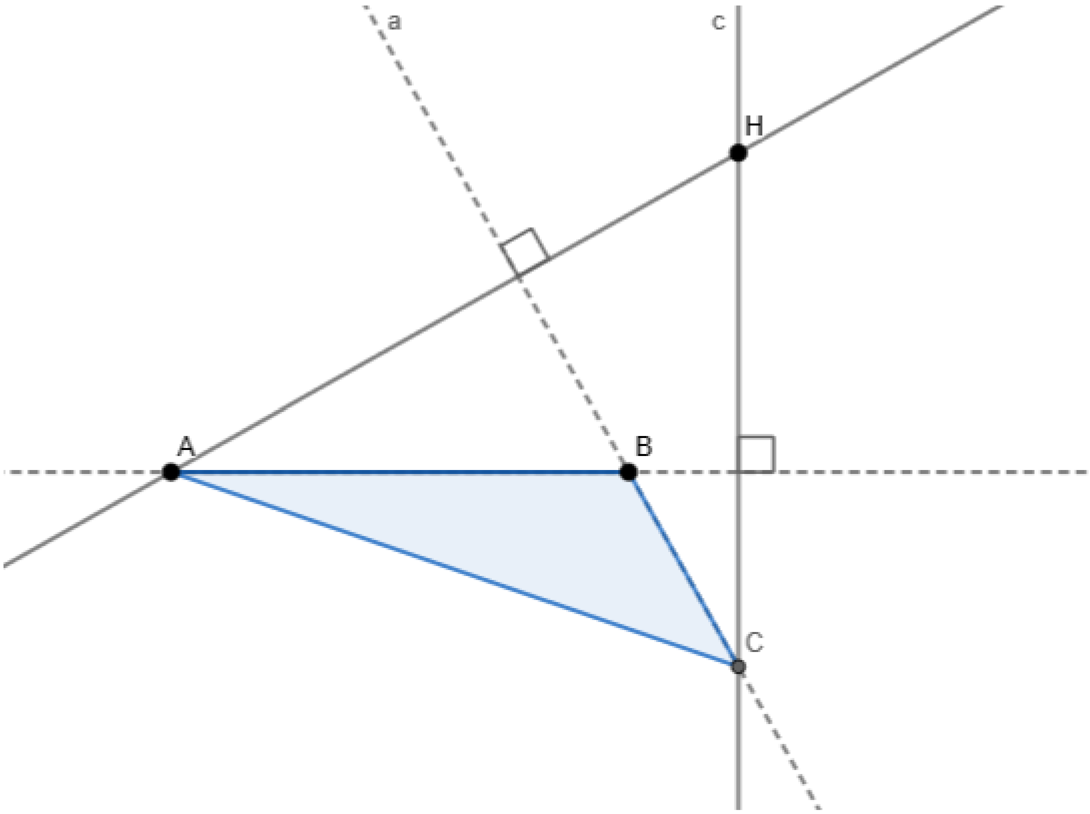
> Sabemos que la altura en A pasa por H y es perpendicular a BC, uno de los lados que no tenemos

Entonces, dicho de otro modo BC es perpendicular a AH y pasa por B

Tracemos la perpendicular a AH que pasa por B, llamémosla a



Entonces la intersección de a y c es el punto C buscado



Así H es el ortocentro del triángulo ABC

*Pero ¿Cómo convencerse de que no depende de los puntos A, B y H que dibujamos inicialmente?

> No depende de los puntos que dibujamos pues el análisis del problema así como el desarrollo se hizo considerando únicamente que los puntos no fueran colineales sin tomar en cuenta su posición en el plano, las figuras fueron simplemente ilustrativas. Intente dibujar otros casos.

Circunferencia y cuadriláteros cíclicos

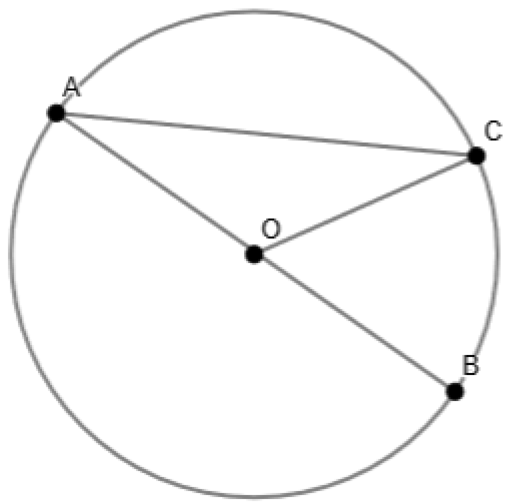
Problema 1

Demuestre que si un diámetro AB y una cuerda AC, de un círculo con centro O, tienen uno de sus extremos en común, A, el ángulo entre ellos, <BAC, es igual a la mitad del ángulo entre el propio diámetro y el radio trazado al otro extremo de la cuerda, <BOC.

Analicemos el problema ¿Cuáles son los datos?¿Qué es lo que tenemos?

> Tenemos un diámetro y una cuerda en una circunferencia con un extremo en común y el radio al otro extremo de la cuerda

Dibujemos la figura



¿Qué es lo que queremos demostrar?

> Queremos ver que <BOC=2<BAC

¿Cómo podemos hacerlo?¿Cómo podemos relacionar los ángulos?¿Qué es lo que si sabemos de los ángulos?

> Sabemos que <BAC+<ACO+<COA=180° por ser los ángulos internos de ΔAOC y además <BOC+<COA=180°

De lo anterior obtenemos que <BOC=<BAC+<COA

Pero <COA=<BAC ¿Por qué?

> Porque ΔAOC es isósceles pues AO=OC por ser radios de la misma circunferencia de modo que <COA=<BAC

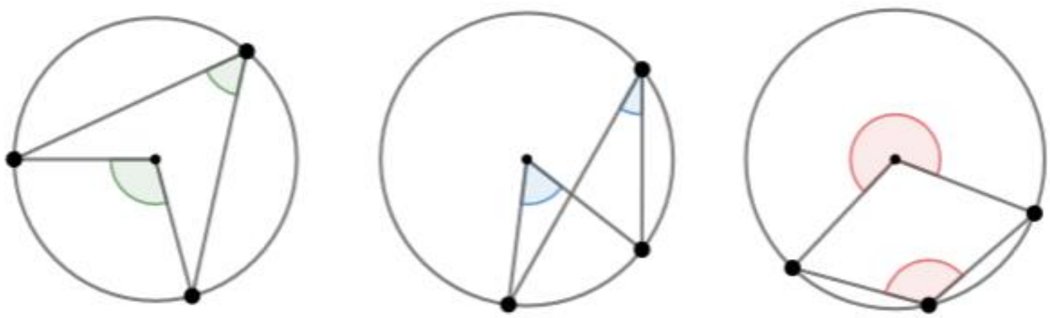
Así <BOC=2<BAC, que es lo que queríamos demostrar.

Problema 2

Demuestre que el ángulo entre dos cuerdas que se intersecan sobre una circunferencia, llamado ángulo inscrito, es igual a la mitad del ángulo entre los radios que van a los otros extremos de las cuerdas, o sea, el ángulo central correspondiente al ángulo que determinan las cuerdas; considere el caso en el que el ángulo entre las cuerdas contiene al centro de la circunferencia y el caso en el que no lo contiene.

**¿Cómo saber cuál es el ángulo central correspondiente a un ángulo inscrito?

Es el ángulo central que cubre el mismo arco que el ángulo inscrito, a continuación algunos ejemplos

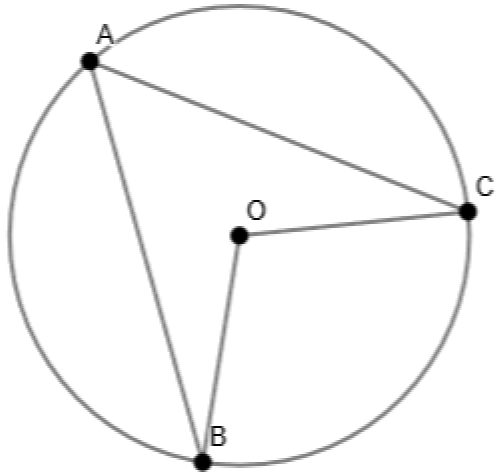


Note que la tercera figura es el mismo caso que el de la primera figura sólo que el ángulo está más abierto.

¿Qué es lo que tenemos?

Dos cuerdas en un circunferencia con un extremo en común y los radios a los otros extremos de las cuerdas

Debemos considerar dos casos, dibujemos la figura para el caso en el que el ángulo entre las cuerdas contiene al centro de la circunferencia



¿Qué es lo que queremos probar?

Queremos demostrar que <BOC=2<BAC

¿Cómo lo hacemos?¿Hemos resuelto algún problema parecido?

Es similar al problema anterior, pero en el anterior teníamos un diámetro

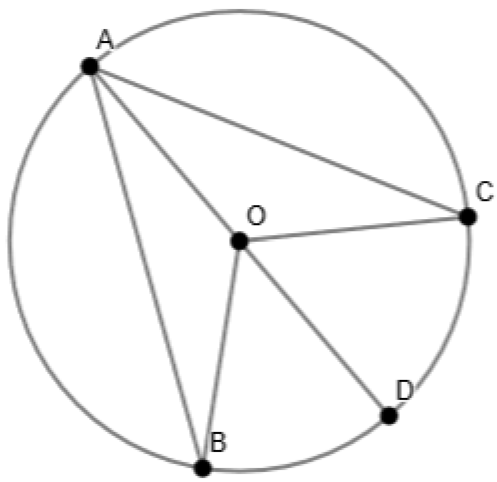
¿Podemos usarlo?¿Qué necesitamos para hacerlo?

Necesitamos trazar un diámetro

¿Qué diámetro?¿Cuál es el que necesitamos?

El diámetro que pasa por A

Tracemos el diámetro que pasa por A y llamemos D al otro extremo



¿Qué podemos decir ahora?

Por el problema anterior <BOD=2<BAD y <DOC=2<DAC

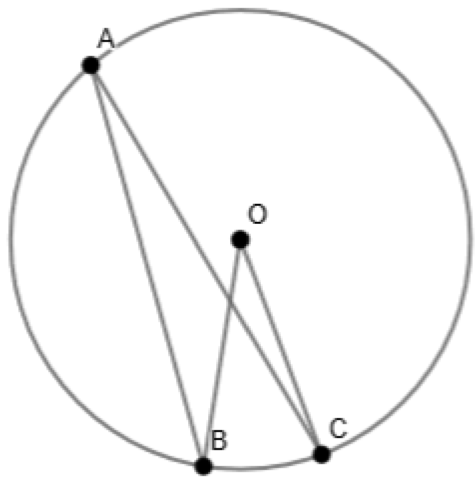
Además sabemos que <BAC=<BAD+<DAC y <BOC=<BOD+<DOC

Por lo que <BOC=<BOD+<DOC=2(<BAD+<DAC)

Entonces <BOC=2<BAC, que es lo que queríamos probar.

Pero falta considerar el caso en el que el ángulo entre las cuerdas no contiene al centro de la circunferencia ¿cambiaría la demostración?

Dibujemos la figura en ese caso

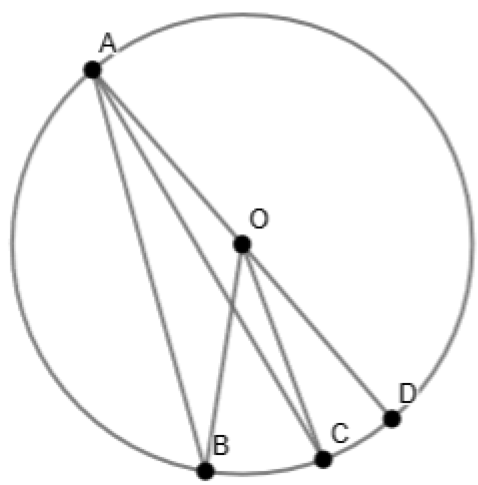


Queremos demostrar que <BOC=2<BAC

¿Cómo lo hacemos?

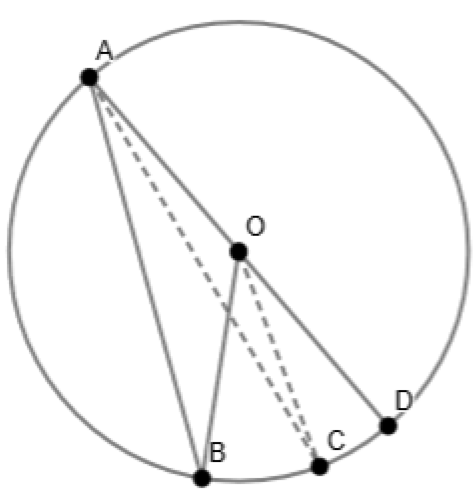
Nuevamente es similar al ejercicio anterior pero necesitamos un diámetro, en específico el diámetro que pasa por A

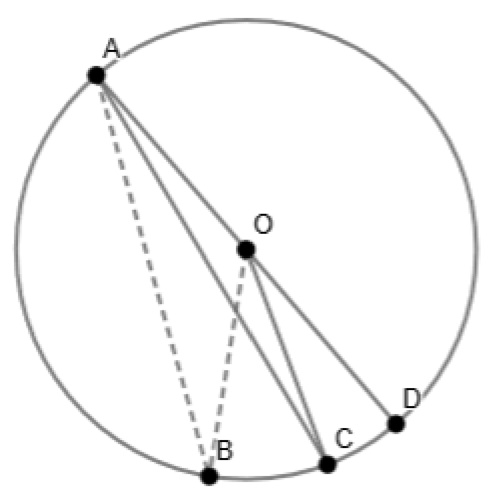
Tracemos el diámetro que pasa por A y llamemos D al otro extremo



¿Qué es lo que sabemos?

Por el problema anterior <BOD=2<BAD y <COD=2<CAD





Además sabemos que <BAC=<BAD-<CAD y <BOC=<BOD-<COD

Por lo que <BOC=<BOD-<COD=2(<BAD-<CAD)

Entonces <BOC=2<BAC, que es lo que queríamos probar

*Ahora bien ¿los casos considerados son los únicos posibles casos? Una buena forma de convencerse de ello es intentando encontrar un caso distinto.

Otra forma de enunciar el resultado es:

Si dos cuerdas de un círculo se intersecan sobre la circunferencia, el ángulo entre ellas, llamado ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo formado por los radios que llegan a las otros extremos de las cuerdas, llamado ángulo central.

Problema 3

Si dos pares de cuerdas que se intersecan sobre la circunferencia subtienden el mismo arco, entonces forman ángulos iguales.

¿Qué es lo que tenemos?

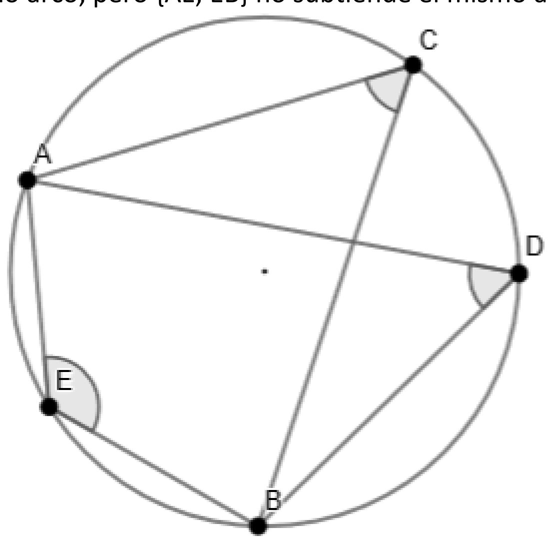
> Dos pares de cuerdas que se intersecan sobre la circunferencia, dicho de otro modo tenemos dos ángulos inscritos

¿Qué sabemos de ellos?

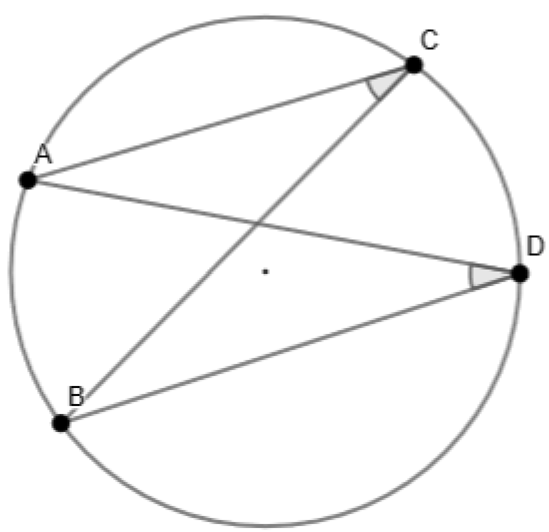
> Subtienden el mismo arco

**¿Qué quiere decir que subtiendan el mismo arco?

> Quiere decir que sus extremos son los mismos y el ángulo que se forma en el interior de la circunferencia, ángulo inscrito, “recorre” o “cubre” el mismo arco de la circunferencia, dicho arco es el que va de extremo a extremo sin pasar por el punto en el que se intersecan las cuerdas, así por ejemplo en la siguiente figura {AC, CB} y {AD, DB} subtienden el mismo arco, pero {AE, EB} no subtiende el mismo arco



Ahora bien, tenemos dos pares de cuerdas que subtienden el mismo arco, dibujemos la figura



¿Qué es lo que debemos probar?

> Queremos ver que <ACB=<ADB

¿Qué sabemos de dichos ángulos?

> Por el problema anterior, como son ángulos inscritos son iguales a la mitad de su ángulo central correspondiente

Y eso concluiría la demostración ¿Por qué?

> Porque su ángulo central es el mismo pues subtienden el mismo arco, por lo que son iguales

Así <ACB=<ADB que es lo que se quería probar.

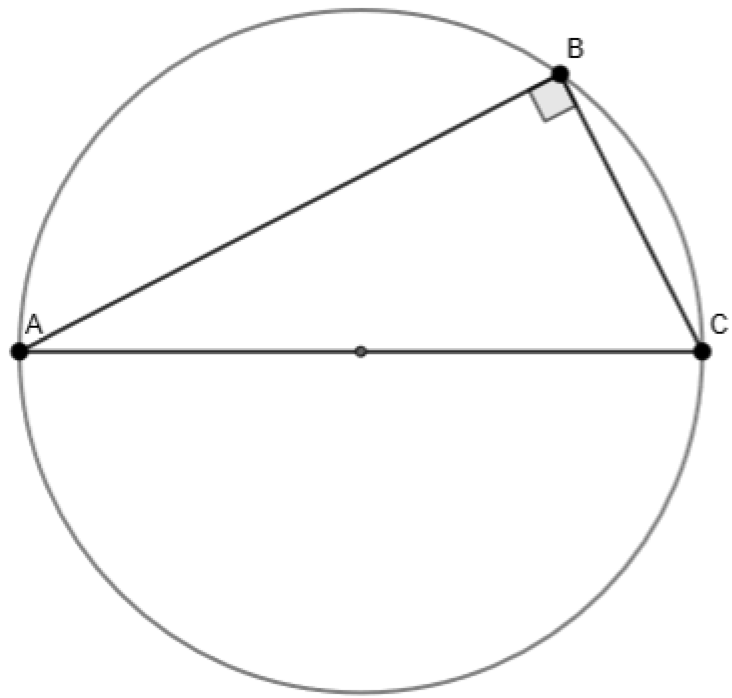
Problema 4

Sea ABC un triángulo tal que el ángulo en B es recto. Si trazamos la circunferencia que tiene a AC como diámetro, entonces B está en la circunferencia.

¿Qué es lo que tenemos?

> Un triángulo ABC con el ángulo en B recto y la circunferencia que tiene a AC como diámetro

Dibujemos la figura



¿Qué queremos demostrar?

> Que B está en la circunferencia

De la figura es obvio pero ¿Cómo demostrarlo?¿De qué otra forma podemos ver a B?

> B es la intersección de AB y BC con la circunferencia

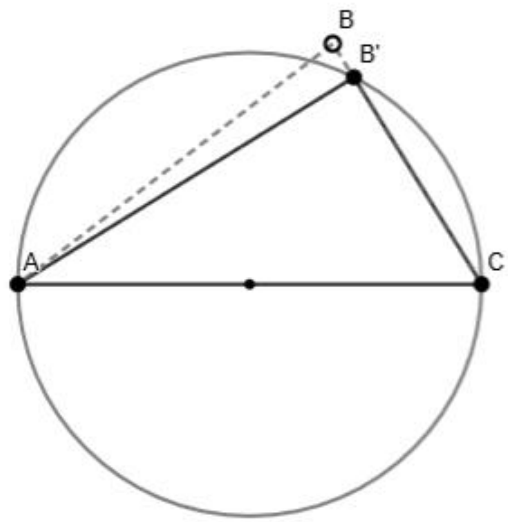
Entonces ¿Qué bastaría probar?

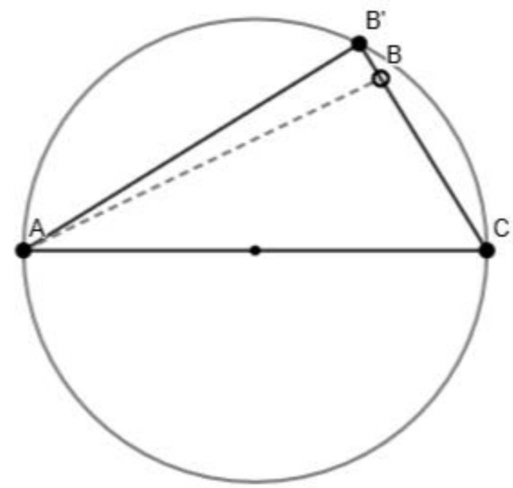
> Probar que B es la intersección de AB o BC con la circunferencia

De modo que debemos mostrar que B es la intersección de BC con la circunferencia ¿Cómo lo hacemos?

> No podemos simplemente afirmarlo, podemos llamar B’ a dicha intersección y luego mostrar que B’=B

Dibujemos la figura, notemos que B podría estar dentro o fuera de la circunferencia





Ahora bien, queremos mostrar que B'=B ¿Cómo hacerlo?¿Qué es lo que sabemos?

> Sabemos que <ABC=90°

¿Es todo lo que sabemos?¿Qué sabemos del ángulo en B'?

> Sabemos que <AB'C=90°, pues AB' y B'C son cuerdas en la circunferencia y entonces <AB'C es igual a la mitad del ángulo central correspondiente que en este caso es 180°

Entonces tenemos que <ABC=<AB'C=90° ¿Eso qué nos dice?¿Qué podemos concluir?

> AB y AB' son ambas perpendiculares a BC que pasan por A

Pero dada una recta, en este caso BC, y un punto fuera de ella, en este caso A, sólo hay una recta perpendicular a la recta dada que pase por el punto fuera de ella

Así AB=AB' y en consecuencia B=B'

Por lo tanto B está en la circunferencia.

Otra forma de enunciar el resultado es:

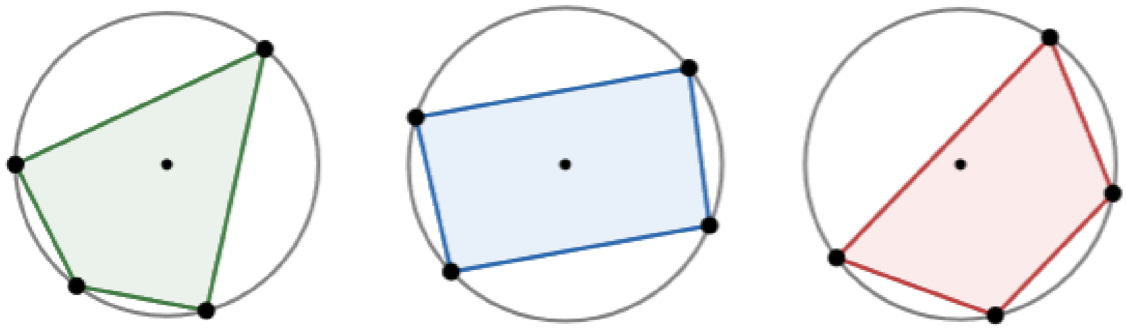
Si en un triángulo rectángulo trazamos la circunferencia que tiene a su hipotenusa como diámetro, todos los vértices del triángulo están sobre ella (es la circunferencia circunscrita).

Problema 5

Un cuadrilátero es cíclico si y sólo si sus ángulos opuestos suman 180°

**¿Qué significa que un cuadrilátero sea cíclico?

Significa que está inscrito en una circunferencia, es decir, sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia o bien podemos trazar una circunferencia que pase por sus cuatro vértices



¿Qué nos pide el problema?

Es una doble implicación, nos pide dos cosas:

1. Si un cuadrilátero es cíclico, sus ángulos opuestos suman 180°
2. Si en un cuadrilátero los ángulos opuestos suman 180° entonces es cíclico

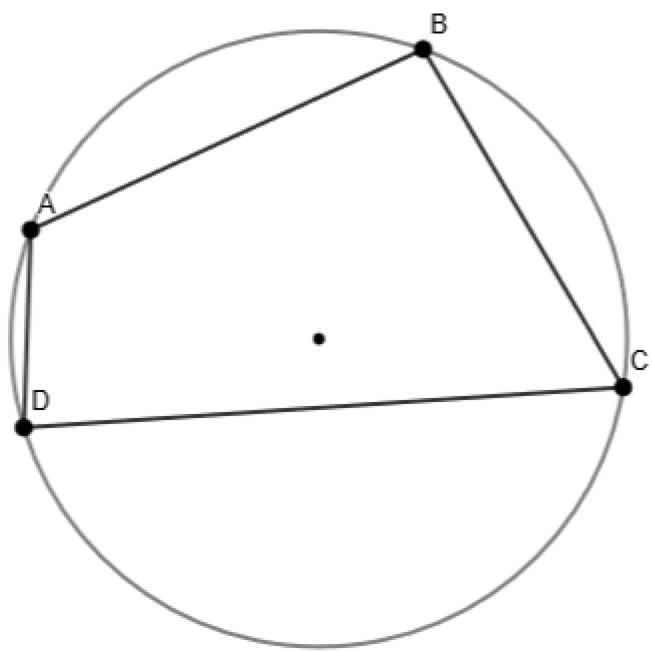
Procedamos de forma separada

I. Para el enunciado 1. Si un cuadrilátero es cíclico, sus ángulos opuestos suman 180°

¿Qué es lo que tenemos?

Un cuadrilátero cíclico

Dibujemos la figura



¿Qué queremos demostrar?

Que sus ángulos opuestos suman 180°

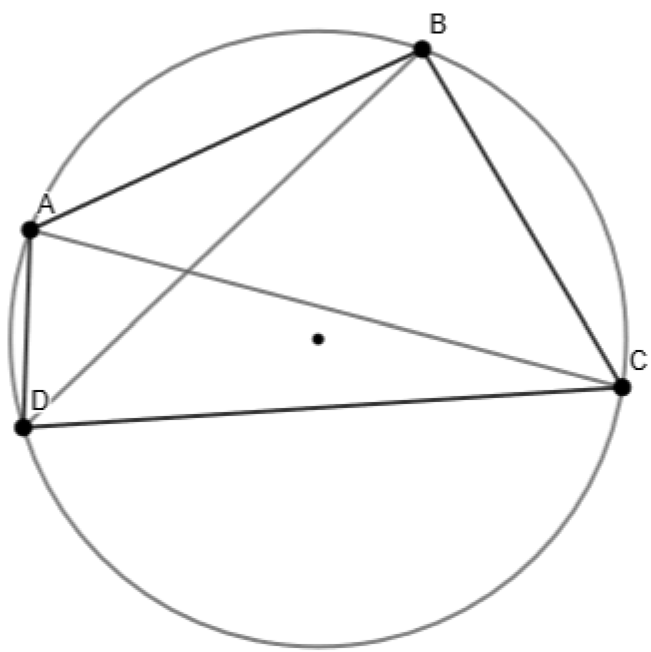
Entonces necesitamos relacionar los ángulos ¿Cómo podemos hacerlo?

Como son ángulos en la circunferencia necesitamos cuerdas auxiliares

¿Cuáles cuerdas?¿Cuáles nos son convenientes?

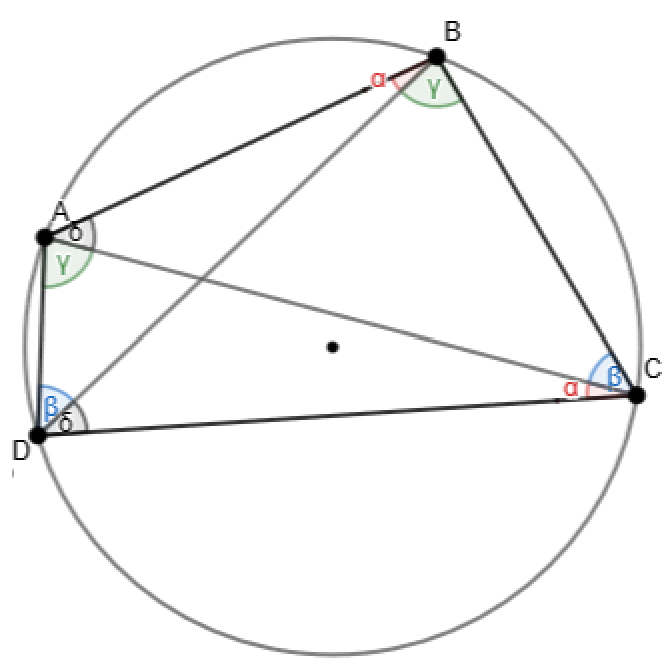
Las que son las diagonales del cuadrilátero

Tracemos las diagonales de ABCD



¿Qué podemos decir ahora de los ángulos?

Sabemos que $\angle ABD=\angle ACD=\alpha$, $\angle BCA=\angle BDA=\beta$, $\angle DAC=\angle DBC=\gamma$ y $\angle CAB=\angle CDB=\delta$ pues subtienden los mismos arcos



Entonces ¿qué es lo que queremos probar?

Queremos probar que los ángulos opuestos de ABCD suman 180°, es decir $\alpha+\beta+\Upsilon+\delta=180°$

Pero eso ya lo tenemos ¿Por qué?

Porque α, β, Υ y δ son los ángulos internos de un triángulo ΔABC (no sólo del ΔABC, también del ΔACD, ΔABD y ΔBCD)

Por lo que $\alpha+\beta+\Upsilon+\delta=180°$ que es lo que queríamos demostrar

II. Para el enunciado 2. Si en un cuadrilátero los ángulos opuestos suman 180° entonces es cíclico

¿Qué es lo que tenemos?

Un cuadrilátero en el que sus ángulos opuestos suman 180°

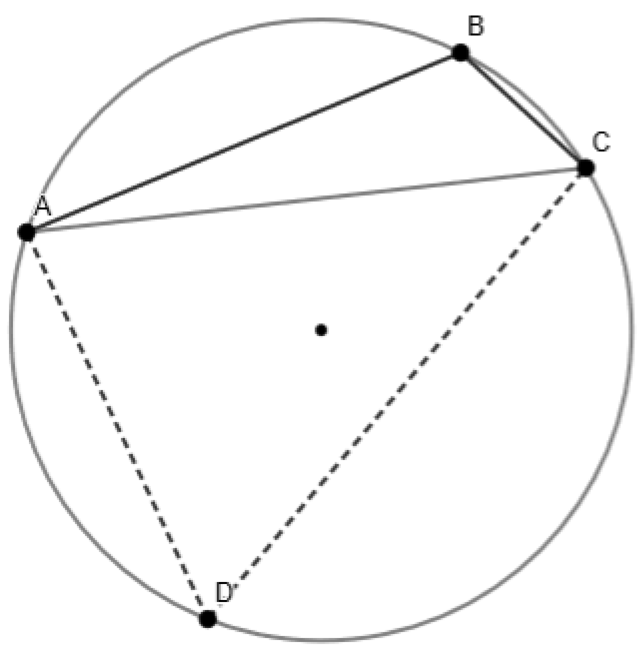
¿Qué es lo que queremos probar?

Que es cíclico, es decir sus vértices están en una misma circunferencia

Entonces necesitamos trazar una circunferencia que pase por los cuatro vértices del cuadrilátero ¿Cómo lo hacemos?¿Qué es lo que si podemos hacer?

Podemos trazar una circunferencia que pase por tres vértices

Tracemos la circunferencia que pasa por A, B y C



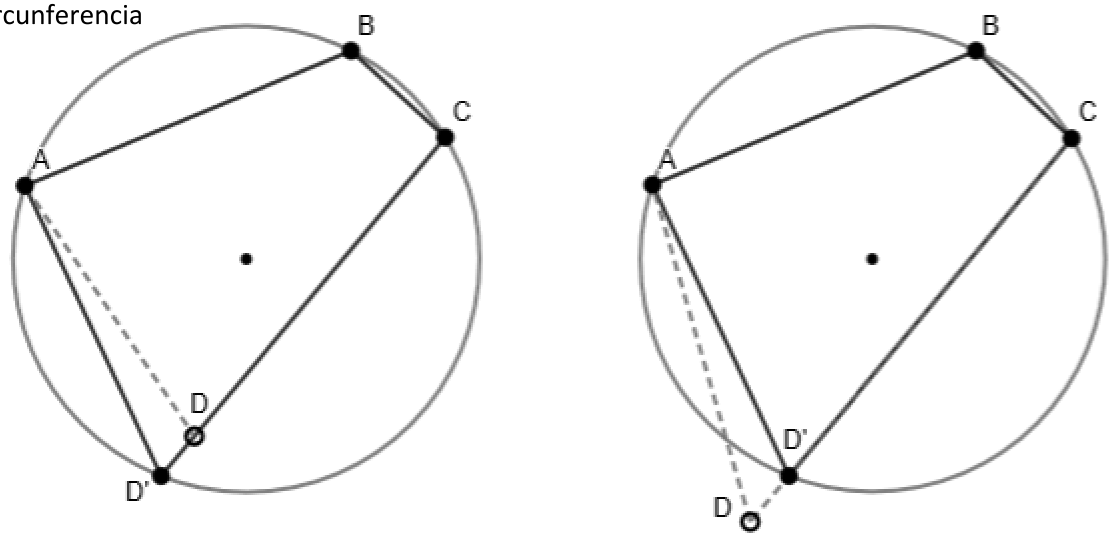
Debemos mostrar que D está en la circunferencia ¿Cómo lo hacemos?¿Hemos resuelto algún problema similar?

> Se parece al problema anterior

¿Podemos usarlo?¿Cómo lo usamos?

> Podemos tomar a D’ como la intersección de DC con la circunferencia y luego mostrar que D=D’

Sea D’ la intersección de DC con la circunferencia, notemos que D podría estar dentro o fuera de la circunferencia



Ahora bien, queremos probar que D=D’ ¿Cómo hacerlo?¿Qué es lo que sabemos?

> Sabemos que <DAB+<BCD=<CDA+<ABC=180°

¿Y qué podemos decir del ángulo en D’?

> Que <CD’A+<ABC=180°

¿Por qué?

> Pues por construcción ABCD’ es cíclico y por la primera parte de este problema sus ángulos opuestos suman 180°

En consecuencia <CDA=<CD’A

¿Eso que nos dice?¿Qué podemos concluir?

> AD||AD’ pues intersecan a DC en el mismo ángulo

Pero AD y AD’ se intersecan en A lo que sólo puede pasar si son la misma recta, con un argumento análogo al del problema anterior

Así AD=AD’ y en consecuencia D=D’

Por lo tanto D está en la circunferencia

Así ABCD es cíclico

Problema 6

Probar que la circunferencia que tiene como diámetro un lado de un triángulo, pasa por los pies de la alturas de los otros dos lados del triángulo.

**¿Cuáles son los pies de la alturas?

> Una altura es la perpendicular a alguno de los lados de un triángulo que pasa por el vértice que no está en dicho lado. Los pies de las alturas son los puntos de intersección de las alturas con los lados a los que son perpendiculares

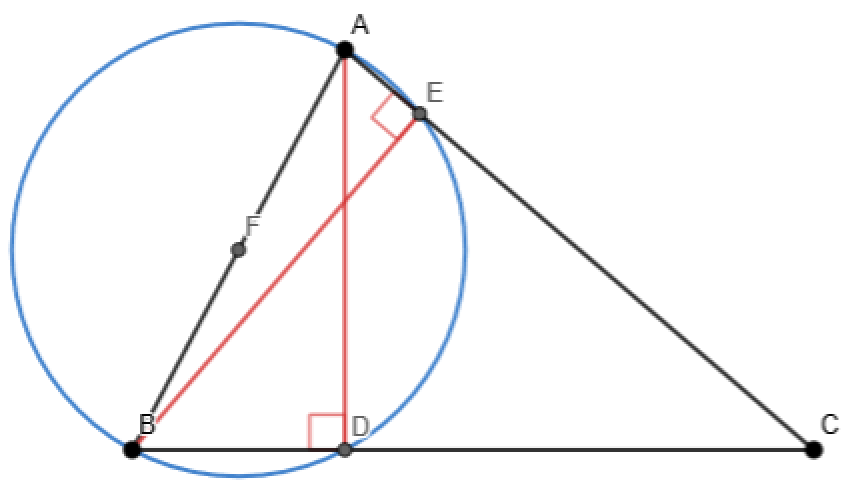
¿Qué es lo que tenemos?

> Un triángulo y una circunferencia que tiene como diámetro a uno de sus lados

¿Qué es lo que queremos demostrar?

> Que los pies de las alturas de los otros lados del triángulo están en la circunferencia

Dibujemos la figura



Queremos probar que D y E están en la circunferencia ¿Cómo lo hacemos?¿Cómo están relacionados D y E con la circunferencia?

> Como D y E son los pies de la alturas en BC y AC los triángulos ΔABD y ΔABE son rectángulos

Entonces ya terminamos ¿Por qué?

> Porque AB es la hipotenusa de ΔABD y ΔABE, y por un problema anterior D y E están en la circunferencia que tiene a su AB como diámetro

Así D y E están en la circunferencia, que es lo que queríamos probar.

Problema 7

Demuestre que las alturas de un triángulo son las bisectrices interiores del triángulo pedal correspondiente (de las alturas).

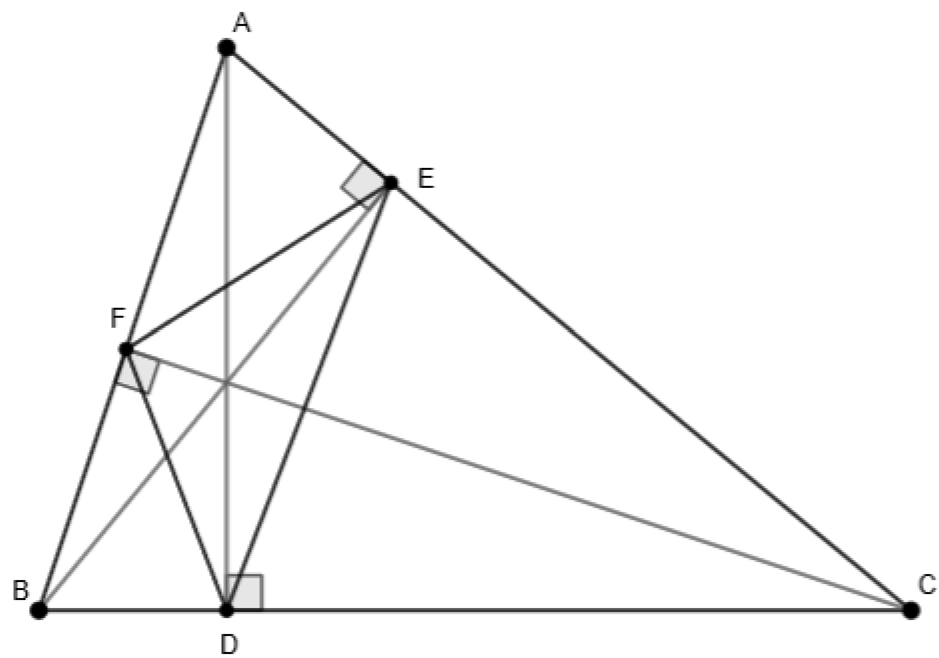
**¿Cuál es el triángulo pedal de las alturas?

Es el triángulo que tiene como vértices a los pies de las alturas

¿Qué es lo que tenemos?

Tenemos un triángulo, sus alturas y el triángulo pedal de las alturas

Dibujemos la figura



¿Qué queremos probar?

Queremos probar que las alturas de ΔABC, es decir AD, BE y CF, son las bisectrices interiores de ΔDEF, es decir, dividen a los ángulos <EDF, <FED y <DFE a la mitad

Dicho de otro modo queremos demostrar que <ADF=<EDA, <FEB=<BED y que <DFC=<CFE ¿Cómo lo hacemos?

Necesitamos relacionar ángulos ¿qué podemos usar? No parece que podamos usar semejanza o congruencia de triángulos ¿Qué otra forma tenemos para relacionar ángulos?¿Qué necesitamos?

Ángulos en una circunferencia, necesitamos una circunferencia

Si encontramos una circunferencia adecuada podemos usar alguno de los resultados anteriores

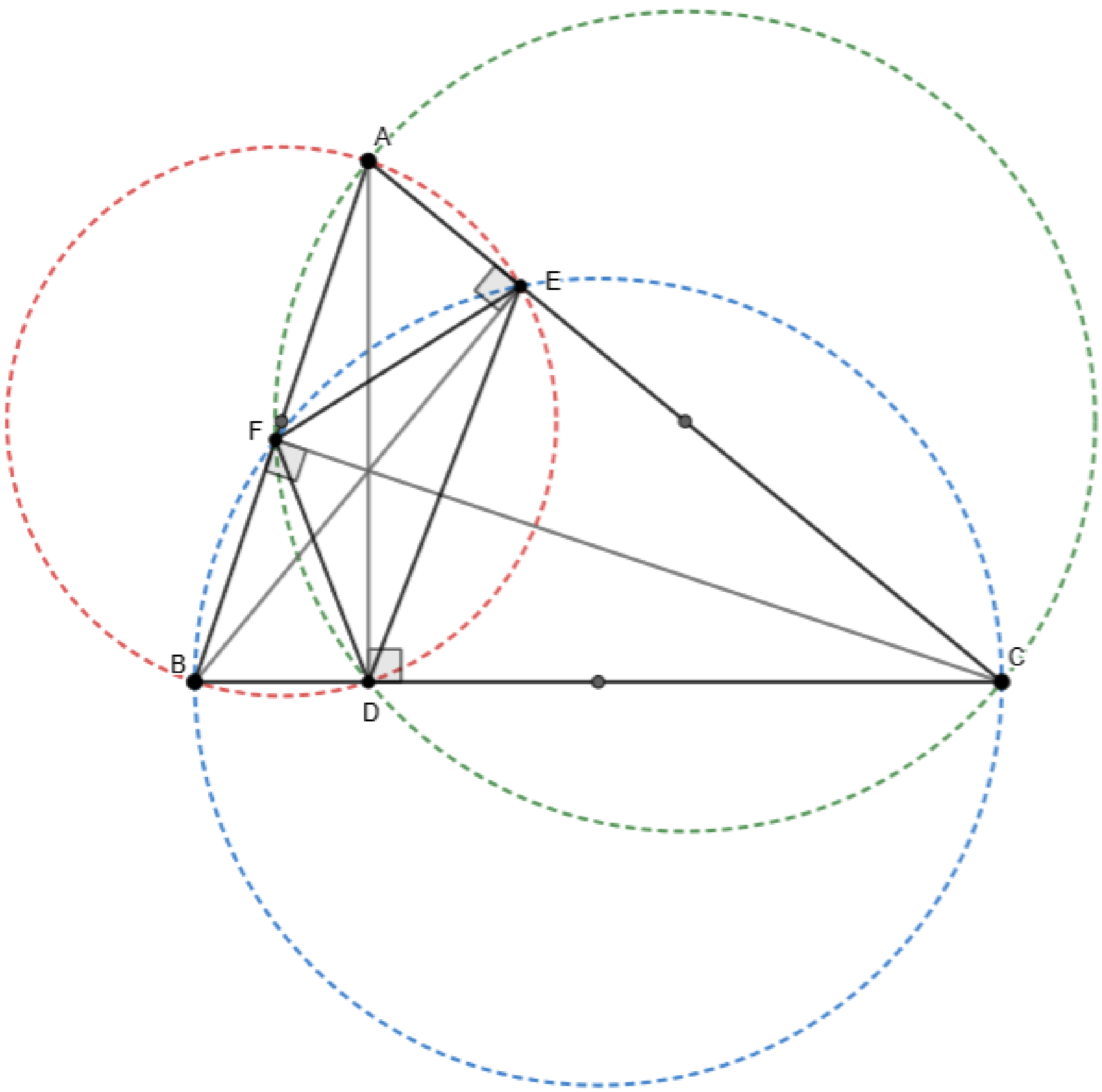
¿Qué circunferencia? Como nos interesan los ángulos en D, E y F necesitamos que alguno esté en ella ¿Cuál circunferencia podría servirnos?

Las que tienen como diámetro a alguno de los lados de ΔABC

¿Por qué?

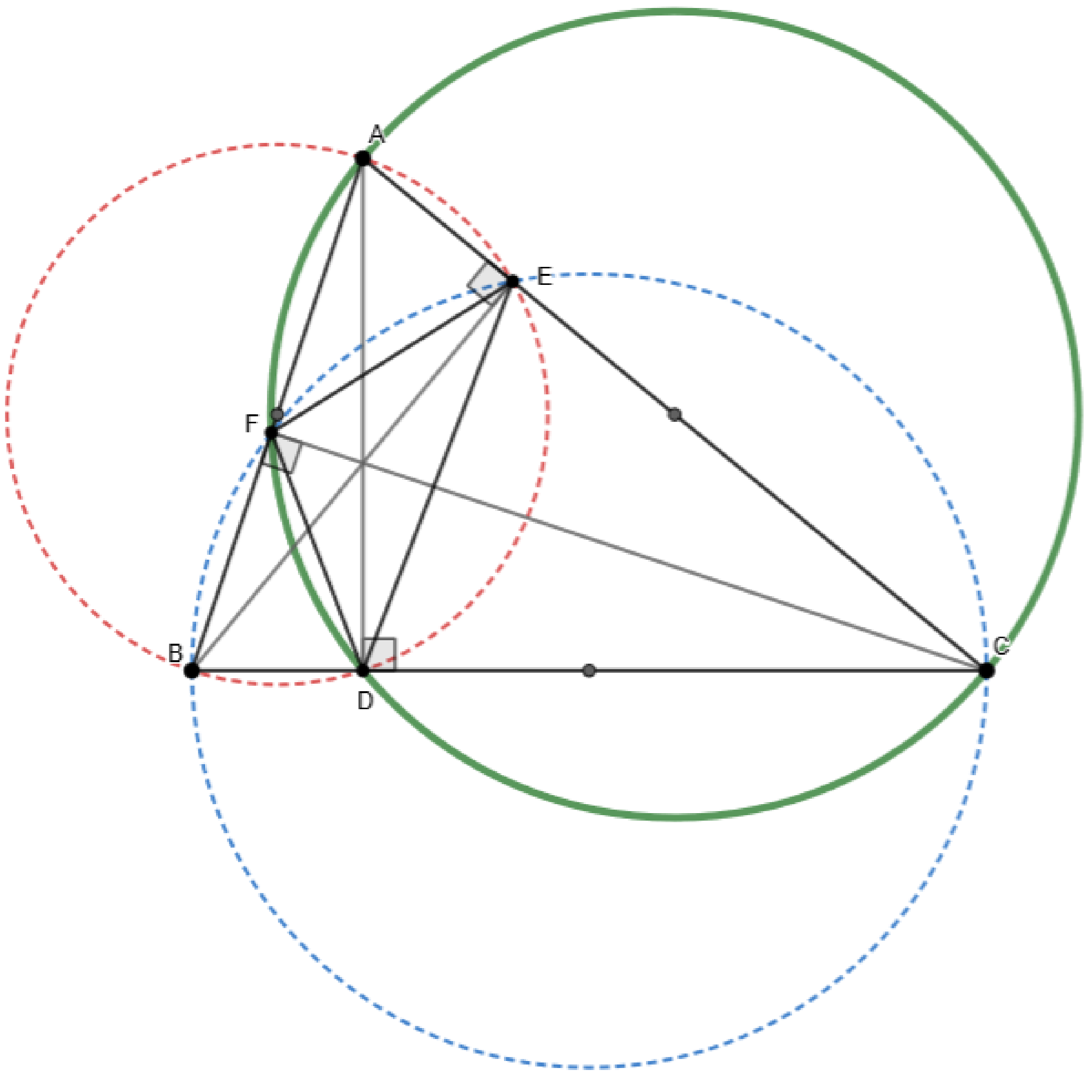
Porque al trazarlas cada una de ellas contiene a los pies de las alturas que están en los otros lados (esto por el problema anterior)

Dibujemos la figura



¿Qué podemos decir ahora de los ángulos?

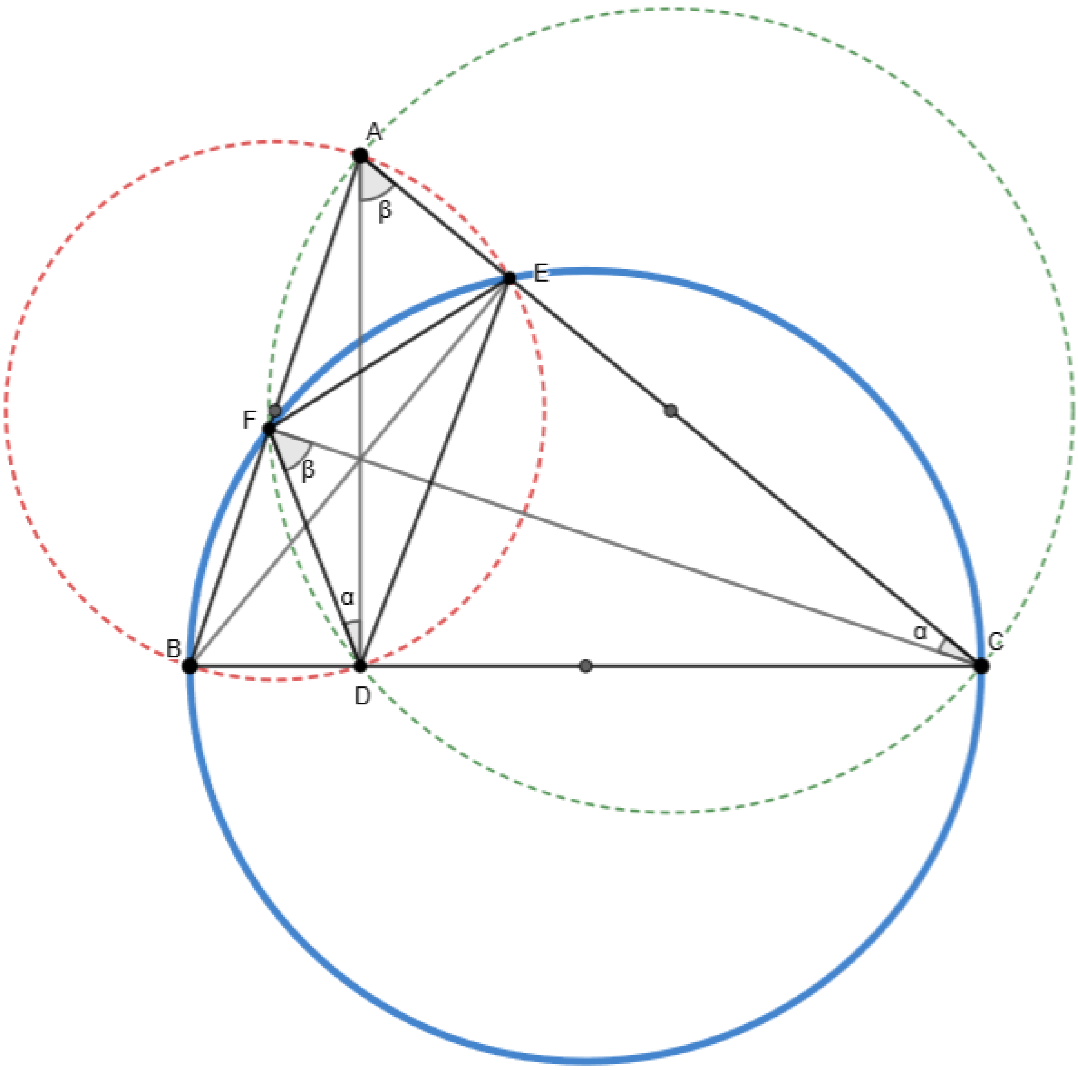
Analicémoslo por partes, concentrémonos primero en la circunferencia verde, la circunferencia que tiene a AC como diámetro.



¿Qué información nos da de los ángulos que nos interesan?

> Los ángulos <ADF y <DFC están inscritos en la circunferencia y además <ADF=<ACF=α y <DFC=<DAC=β pues subtienden los mismos arcos

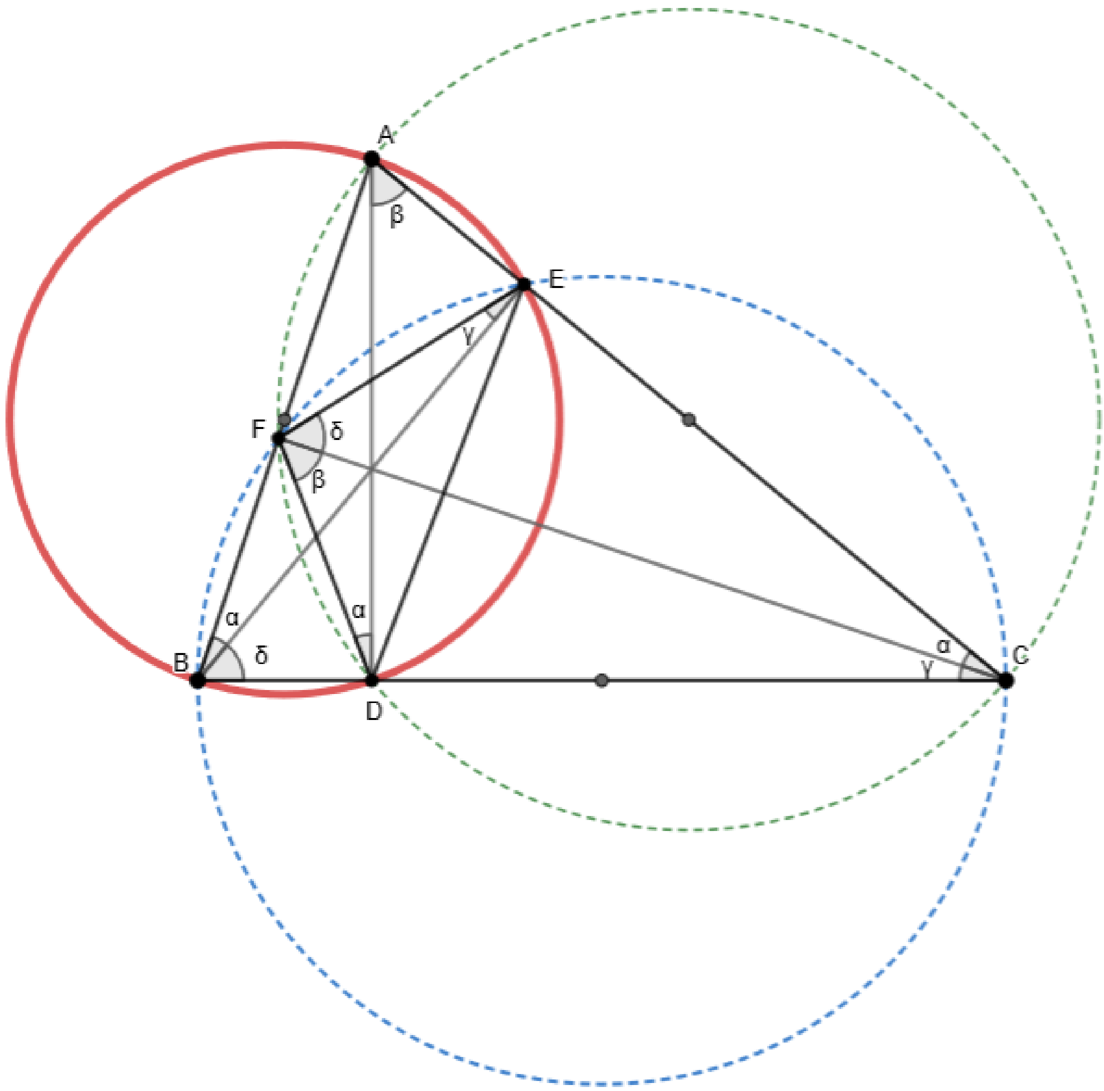
Ahora concentrémonos en la circunferencia azul, la circunferencia que tiene como diámetro a BC



¿Qué información nos da de los ángulos que nos interesan?

> Los ángulos <FEB y <CFE son inscritos, entonces <FEB=<FCB=ϒ y <CFE=<CBE=δ pues subtienden los mismos arcos y además <EBF=α

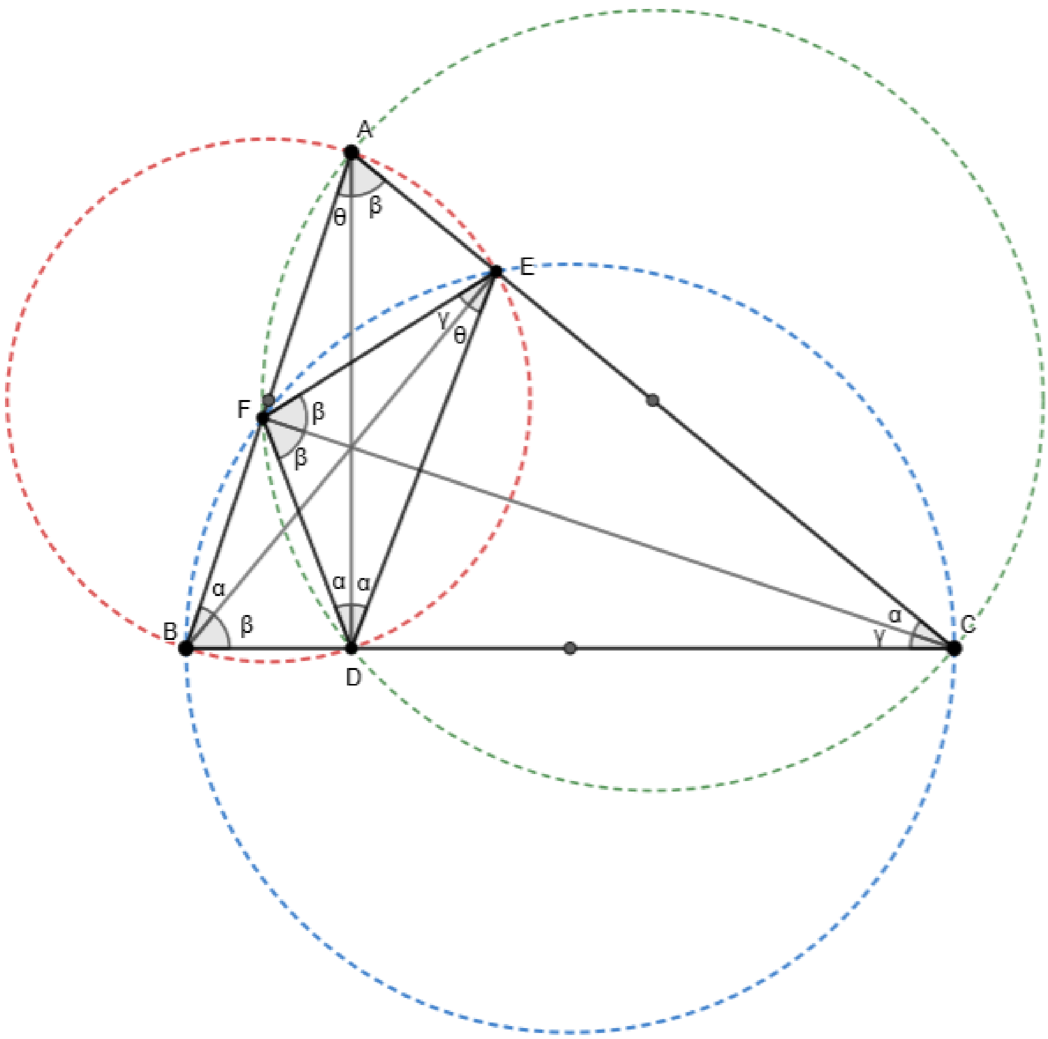
Ahora concentrémonos en la circunferencia roja, la circunferencia que tiene como diámetro a AB



¿Qué información nos da de los ángulos que nos interesan?

Los ángulos <BED y <EDA son inscritos, <BED=<BAD=θ y <EDA=<EBA pero <EBA=α por lo que <EDA=α, además <DBE=<DAE por lo que β=δ, esto pues subtienden los mismos arcos

Analicemos lo que hemos obtenido hasta el momento



Entonces ¿Qué es lo que ya tenemos?¿Qué nos falta demostrar?

> Tenemos que <ADF=<EDA=α y que <DFC=<CFE=β, por lo que falta probar que <FEB=<BED o bien que ϒ=θ

Falta demostrar que ϒ=θ ¿Cómo lo hacemos?

> Usando nuevamente la circunferencia verde, los ángulos <FCD=ϒ y <FAD=θ subtienden el mismo arco por lo que son iguales, es decir ϒ=θ

Así, hemos demostrado que <ADF=<EDA, <FEB=<BED y que <DFC=<CFE, que es lo que queríamos demostrar.

Problema 8

Construya un triángulo dados los pies de sus alturas.

¿Qué nos pide el problema?

Construir un triángulo

¿Qué datos tenemos?

Los pies de las alturas de un triángulo (tres puntos)

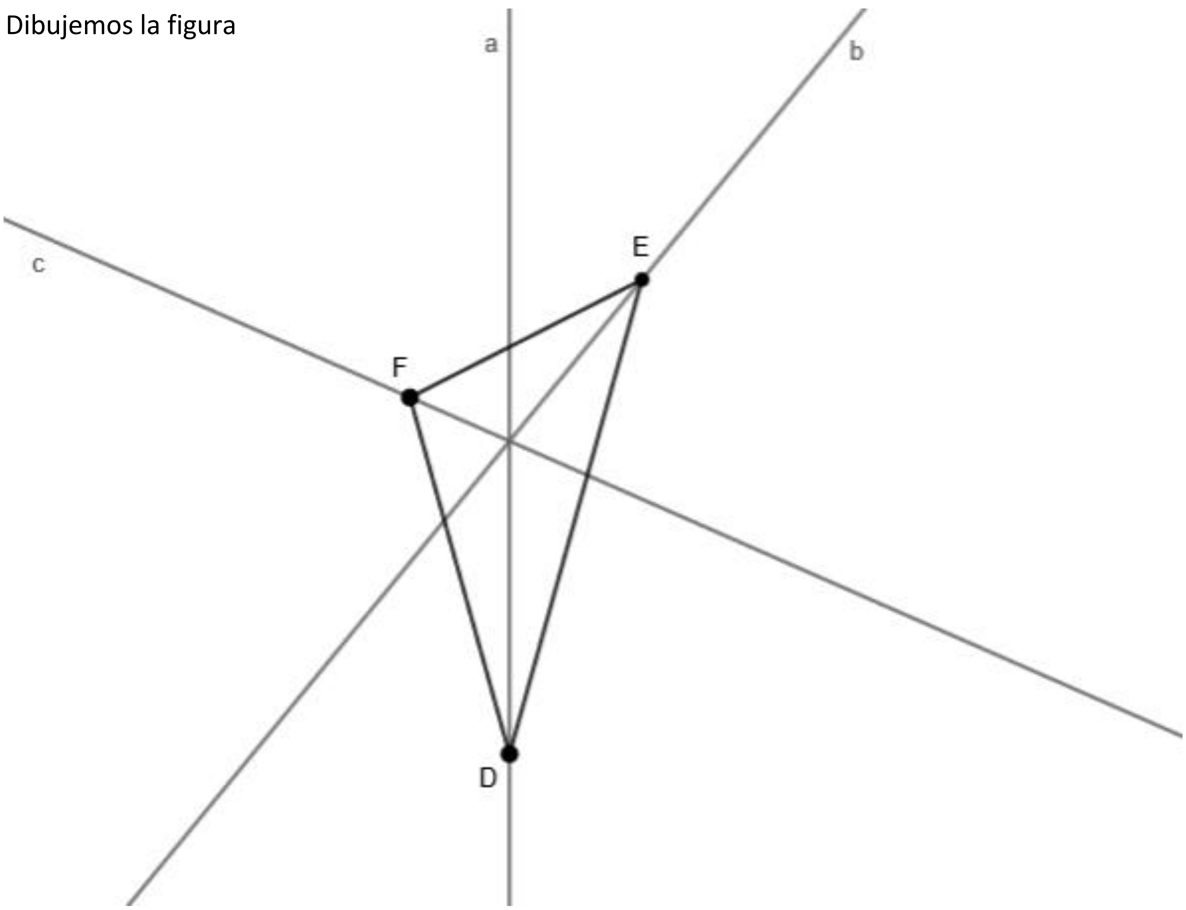
¿Qué más tenemos?

Como tenemos los pies de la alturas, tenemos el triángulo pedal de las alturas

¿Qué sabemos de él?

Por el problema anterior sabemos que las bisectrices del triángulo pedal son las alturas del triángulo que buscamos

Dibujemos la figura



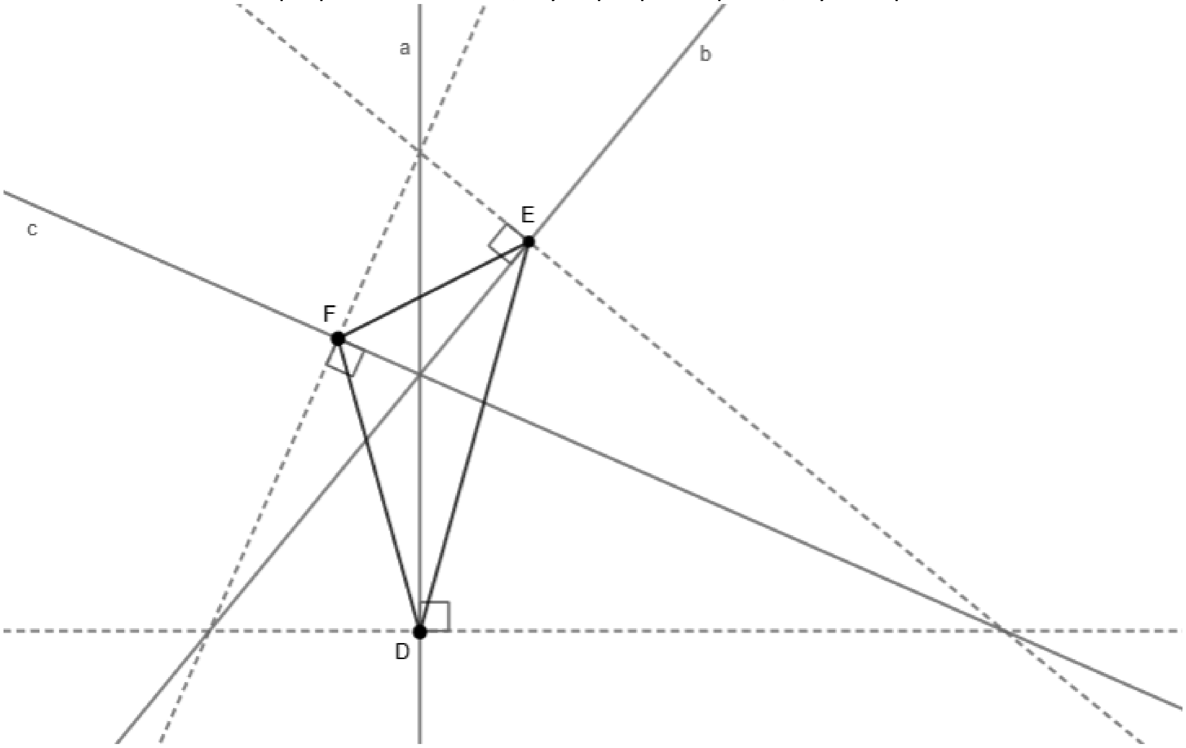
¿Eso nos sirve?¿Cómo podemos usarlo?

Como tenemos las alturas y los pies de las alturas podemos encontrar los lados del triángulo y por ende al triángulo

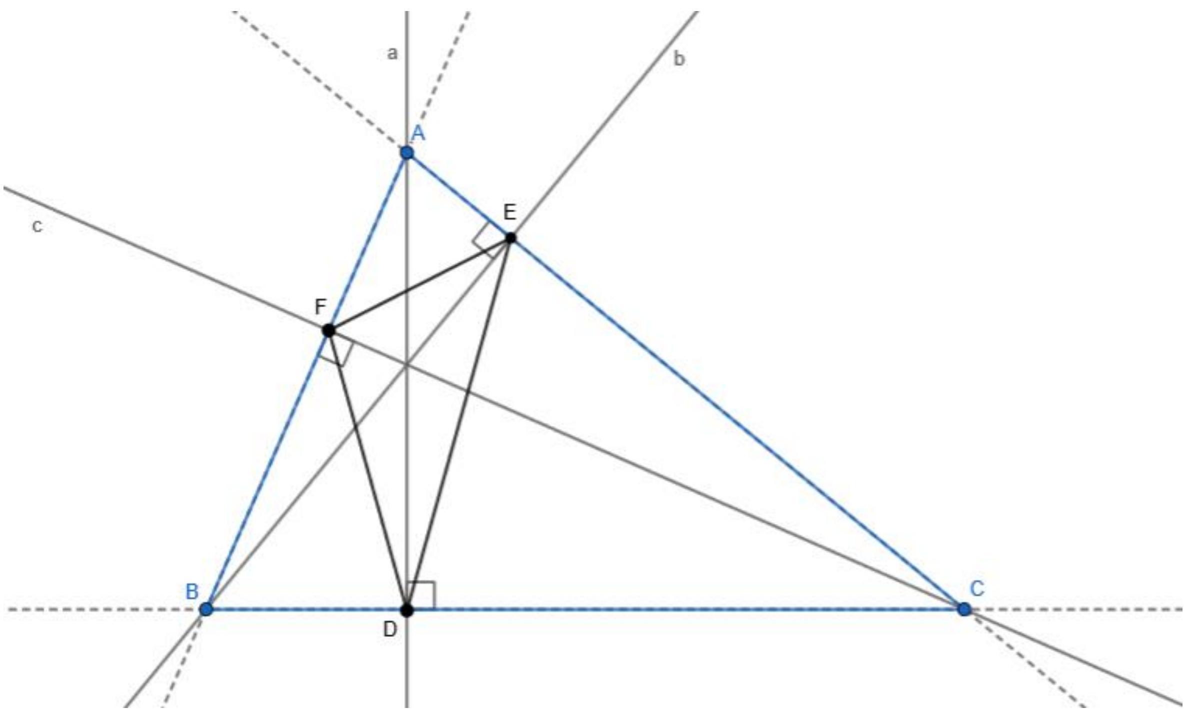
¿Cómo?

Los lados del triángulo pasan por D, E y F y son perpendiculares a a, b y c respectivamente

Entonces tracemos las perpendiculares a a, b y c que pasan por D, E y F respectivamente



Los puntos de intersección de las perpendiculares que trazamos son los vértices del triángulo buscado



Así D, E y F son los pies de las alturas del ΔABC

Problema 9

Construya un triángulo dados dos de sus vértices y el centro de su circunferencia de los nueve puntos.

**¿Cuál es la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo?

> Es la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo (tres puntos), los pies de las alturas (tres puntos) y los puntos medios entre los vértices y el ortocentro (tres puntos)

¿Qué nos pide el problema?

> Construir un triángulo

¿Qué datos nos da?

> Dos de sus vértices y el centro de su circunferencia de los nueve puntos

¿Qué más sabemos?

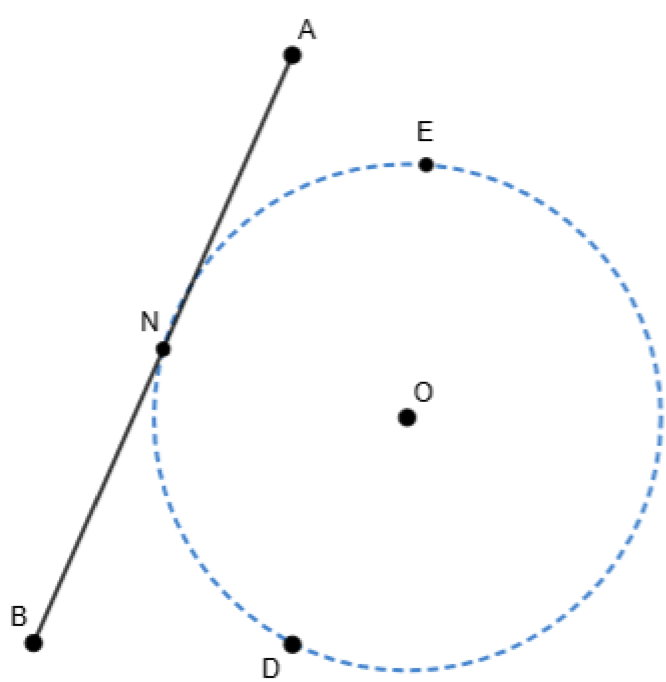
> Como tenemos dos vértices conocemos uno de sus lados

¿Qué hay de los puntos que están en la circunferencia de los nueve puntos?¿Conocemos alguno?

> Como tenemos un lado conocemos su punto medio que está en la circunferencia de los nueve puntos

Entonces tenemos no sólo el centro sino la circunferencia de los nueve puntos.

Dibujemos la figura



Necesitamos encontrar al triángulo, tenemos un lado y la circunferencia de los nueve puntos, pero no es suficiente ¿Podemos determinar más puntos?¿Qué más podemos hacer?

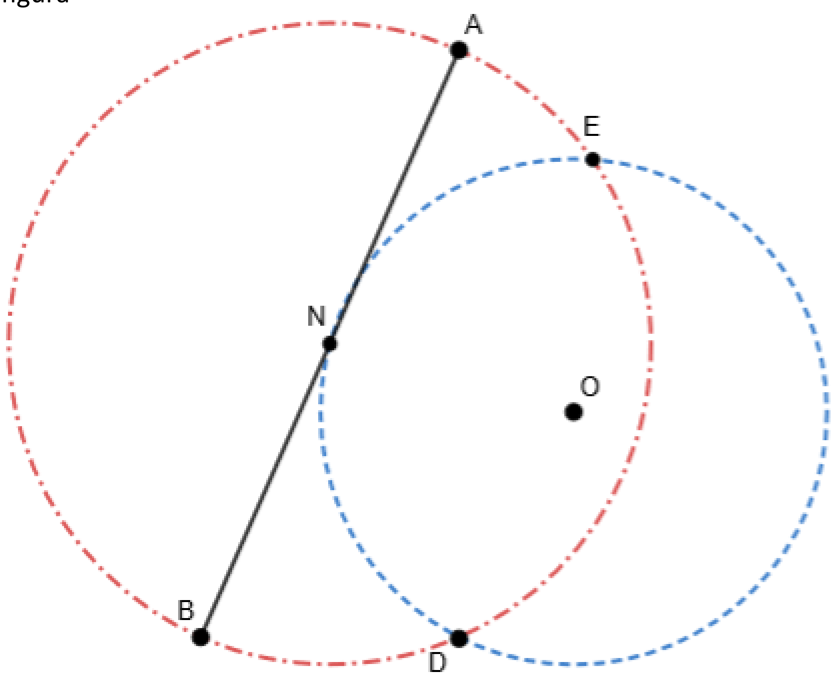
> Podemos trazar la circunferencia que tiene como diámetro al lado que conocemos

¿Y eso de que nos sirve?

> Pues sabemos que los pies de las alturas de los lados que no conocemos están en esa circunferencia, y además están en la circunferencia de los nueve puntos

Entonces si trazamos la circunferencia que tiene a AB como diámetro, los puntos de intersección de esta con la de los nueve puntos son los pies de las alturas de los lados que no conocemos

Dibujemos la figura



¿Es suficiente para construir el triángulo?

> Es suficiente, pues al tener los pies de las alturas podemos determinar los lados

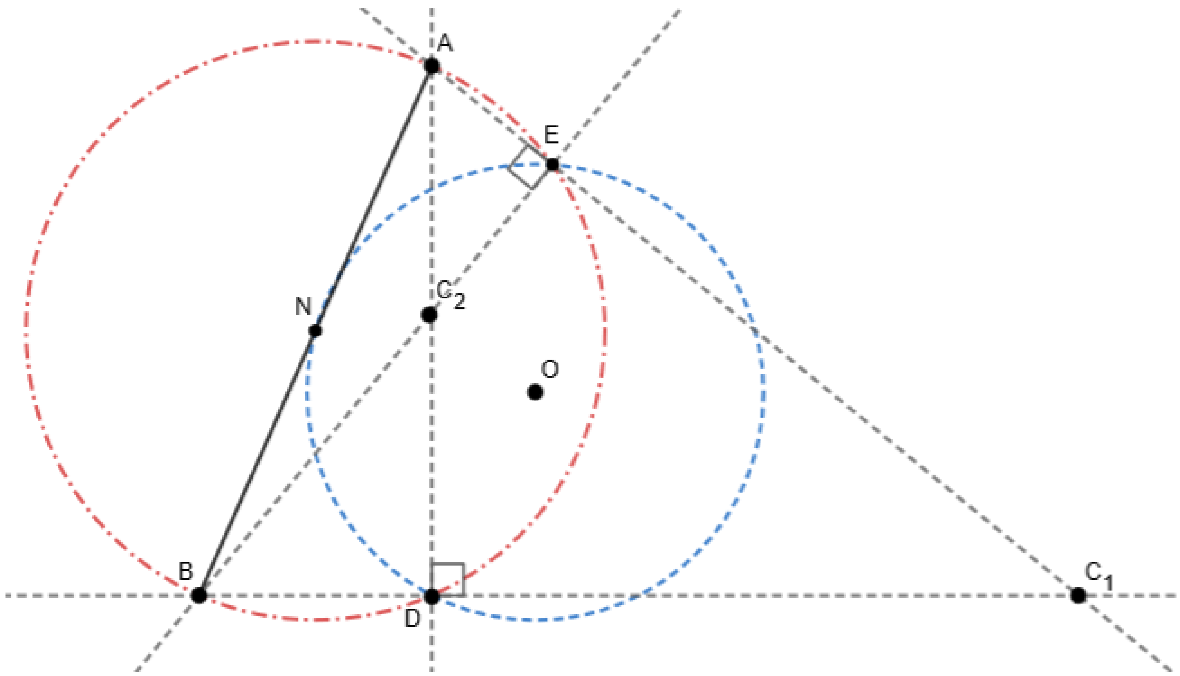
¿Cómo?

> Sabemos que los lados que no conocemos pasan por los vértices A y B y alguno de los pies de las alturas que acabamos de determinar

De modo que tenemos dos casos, que AE y BD sean los lados y su intersección el vértice faltante o que AD y BE sean los lados y su intersección el vértice faltante

Nota: existe la posibilidad de que E=D, en cuyo caso AD y BD serían los lados y D el vértice faltante

Dibujemos la figura



Entonces obtenemos dos triángulos distintos ΔABC_1 y ΔABC_2, ambos con la misma circunferencia de los nueve puntos y un lado en común, es decir, son los buscados.

¿Hay alguna relación entre ellos?

> Si consideramos a ΔABC_1 entonces C_2 es su ortocentro y si consideramos a ΔABC_2 entonces C_1 es su ortocentro

De modo que en un triángulo, en el que el ortocentro no está sobre el triángulo, al intercambiar alguno de sus vértices con el ortocentro la circunferencia de los nueve puntos no cambia.

Problema 10

¿Falso o verdadero? Dados cualesquiera tres puntos no colineales A, B y P, siempre existe un triángulo ABC que tiene a P como centro de su circunferencia de los nueve puntos.

¿Qué es lo que nos pide el problema?

Determinar si el enunciado es verdadero o falso

Concentrémonos en el enunciado ¿Qué es lo que tenemos?

Tres puntos no colineales A, B y P

¿Qué nos pide?

Mostrar que existe un triángulo con A y B como sus vértices y P el centro de su circunferencia de los nueve puntos

¿Qué podemos hacer?¿Hemos resuelto algún problema similar?

Se parece al problema anterior, pero en el anterior los puntos no eran arbitrarios

Intentemos la construcción del problema anterior pero está vez para A, B y P arbitrarios

¿Qué hacemos primero?

Encontrar el punto medio de AB y trazar la circunferencia con centro en P que pasa por dicho punto medio

Es fácil ver que podemos hacerlo con cualesquiera tres puntos no colineales

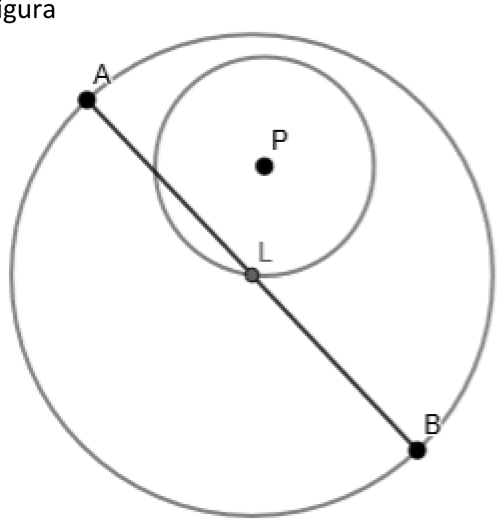
¿Cuál es el siguiente paso?

Trazar la circunferencia que tiene como diámetro a AB y las intersecciones de ésta con la primera circunferencia que trazamos son los pies de las alturas

Siempre podemos trazar la circunferencia con diámetro AB pero qué hay de las intersecciones ¿podemos garantizar que dichas intersecciones siempre existen?

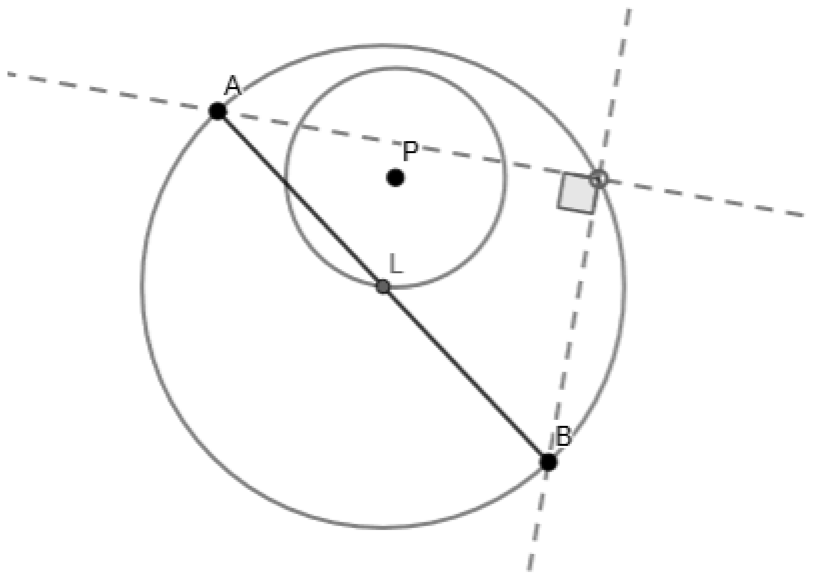
La respuesta es no

Consideremos la siguiente figura



En este caso no podemos construir un triángulo ABC con P como centro de su circunferencia de los nueve puntos ¿Por qué?

> Porque sin importar la recta que tracemos por A el pie de la perpendicular a ésta que pasa por B siempre está sobre la circunferencia con diámetro AB, por lo que la circunferencia con centro el P que pasa por L no va a pasar por los pies de las alturas de ABC sin importar el vértice C que se elija y, en consecuencia, P no puede ser el centro de su circunferencia de los nueve puntos



Así, no siempre es posible construir un triángulo ABC con P como el centro de su circunferencia de los nueve puntos

Por lo que el enunciado es falso.

Circunferencias homotéticas y coaxiales

Problema 1

Si una homotecia lleva un triángulo ABC en otro triángulo A'B'C', entonces los triángulos son semejantes.

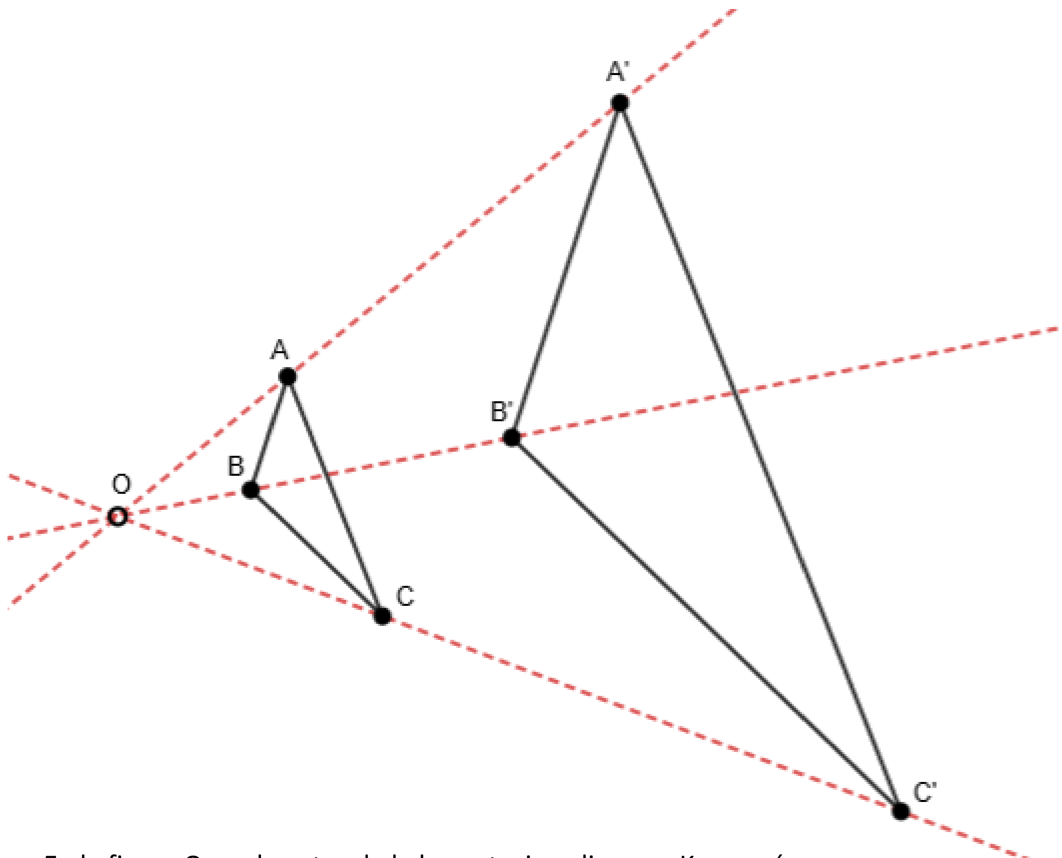
**¿Qué es una homotecia?

Una homotecia con centro O y razón K es una función que a cada punto P en el plano le asocia otro punto P', tal que P' está en la recta OP y los segmentos OP' y OP cumplen que $OP' = K \cdot OP$

¿Qué es lo que tenemos?

Una homotecia que lleva a un triángulo ΔABC en otro triángulo ΔA'B'C'

Dibujemos la figura



En la figura O es el centro de la homotecia y digamos K su razón

¿Qué es lo que queremos demostrar?

Que ΔABC≈ΔA'B'C'

¿Cómo lo hacemos?¿Qué es lo que sabemos?

Sabemos que $OA' = K \cdot OA$, $OB' = K \cdot OB$ y $OC' = K \cdot OC$ por definición de homotecia

¿Y eso de que nos sirve?¿Qué nos dice?

Como $OA' = K \cdot OA$ y $OB' = K \cdot OB$, entonces tenemos que

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = K$$

Y además <AOB=<A’OB’ por lo que ΔAOB y ΔA’OB’ son directamente semejantes, de donde obtenemos que AB∥A’B’ y además

$$\frac{A'B'}{AB} = K$$

Asimismo, como $OB' = K \cdot OB$ y $OC' = K \cdot OC$, entonces tenemos que

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = K$$

Y además <BOC=<B’OC’ por lo que ΔBOC y ΔB’OC’ son directamente semejantes, de donde obtenemos que BC∥B’C’ y además

$$\frac{B'C'}{BC} = K$$

Y de forma similar como $OA' = K \cdot OA$ y $OC' = K \cdot OC$, entonces tenemos que

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OC'}{OC} = K$$

Y además <AOC=<A’OC’ por lo que ΔAOC y ΔA’OC’ son directamente semejantes, de donde obtenemos que AC∥A’C’ y además

$$\frac{A'C'}{AC} = K$$

Entonces, como AB∥A’B’, BC∥B’C’ y AC∥A’C’, los triángulos ΔABC y ΔA’B’C’ son semejantes pues sus lados respectivos son paralelos entre sí y además

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = K$$

Es decir, su razón de semejanza es la misma que la razón de la homotecia

Así, ΔABC≈ΔA’B’C’, que es lo que se quería demostrar.

Problema 2

Si conocemos los parámetros de una similitud que lleva un rectángulo ABCD en un rectángulo $A'B'C'D'$, ¿qué relación hay entre las áreas de los rectángulos?

**Similitud

Una similitud S con centro O, razón K y ángulo θ, es la composición de una rotación R_θ de ángulo θ alrededor de O, seguida de una homotecia H_K con centro O y razón K.

$$S = H_K \circ R_\theta$$

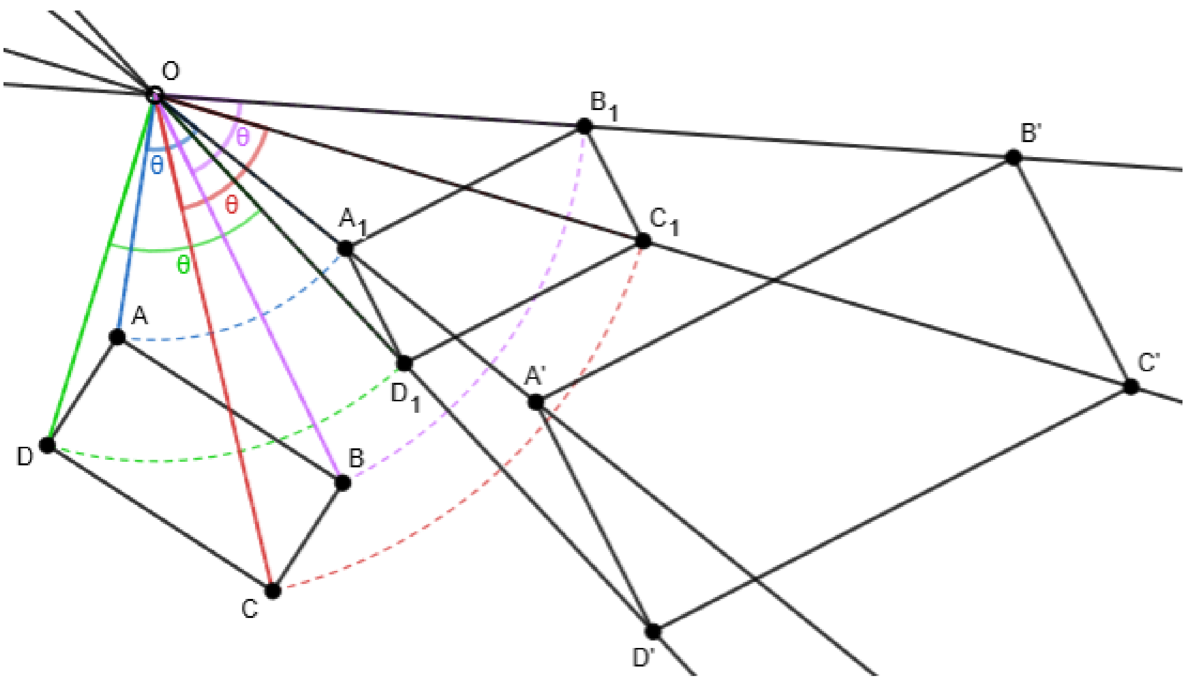
Y los parámetros de la similitud S son el centro O, la razón K y el ángulo θ

¿Qué es lo que tenemos?

Los parámetros de una similitud que lleva un rectángulo ABCD en un rectángulo $A'B'C'D'$

Entonces tenemos el centro O, la razón K y el ángulo θ de una similitud S que lleva al rectángulo ABCD en el rectángulo $A'B'C'D'$

Dibujemos la figura



En la figura $A_1B_1C_1D_1$ es el resultado de aplicarle la rotación R_θ de ángulo θ alrededor de O al rectángulo ABCD y $A'B'C'D'$ es el resultado de aplicarle al rectángulo $A_1B_1C_1D_1$ la homotecia H_K con centro O y razón K, por lo que $S(ABCD) = A'B'C'D'$, donde S es la similitud de la que tenemos los parámetros

¿Qué es lo que nos pide en problema?

Describir la relación entre las áreas de los rectángulos ABCD y $A'B'C'D'$

¿Qué sabemos de dichas áreas?

Como ABCD y $A'B'C'D'$ rectángulos sabemos que

$$Área(ABCD) = AB \cdot BC$$

$$Área(A'B'C'D') = A'B' \cdot B'C'$$

¿Hay alguna relación entre ellas?¿Qué más sabemos?

Sabemos que ABCD ≡ $A_1B_1C_1D_1$ y que

$$\frac{A'B'}{A_1B_1} = \frac{B'C'}{B_1C_1} = \frac{C'D'}{C_1D_1} = \frac{D'A'}{D_1A_1} = K$$

Pues $A_1B_1C_1D_1$ y A'B'C'D' están en homotecia con razón K

Entonces tenemos que $A'B' = K \cdot A_1B_1$ y $B'C' = K \cdot B_1C_1$, por lo que obtenemos

$$Área(A'B'C'D') = A'B' \cdot B'C' = [K \cdot A_1B_1] \cdot [K \cdot B_1C_1] = K^2 \cdot A_1B_1 \cdot B_1C_1$$

Pero, sabemos que $AB = A_1B_1$ y que $BC = B_1C_1$ por lo que

$$Área(A'B'C'D') = K^2 \cdot A_1B_1 \cdot B_1C_1 = K^2 \cdot AB \cdot BC = K^2 \cdot Área(ABCD)$$

$$Área(A'B'C'D') = K^2 \cdot Área(ABCD)$$

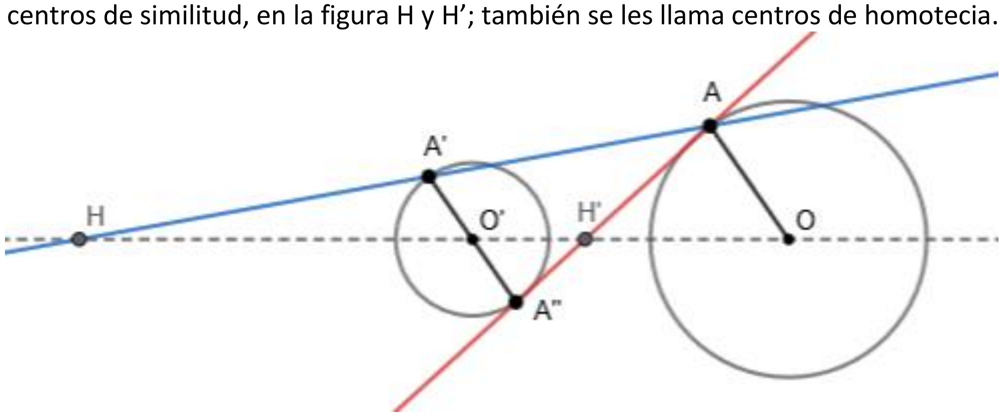
De modo que el área de $A'B'C'D'$ es K^2 veces el área de ABCD, donde K es la razón de la similitud.

Problema 3

Si una circunferencia es tangente a dos circunferencias no concéntricas, los puntos de tangencia son puntos antihomólogos.

**¿Cuáles son los centros de similitud de dos circunferencias?

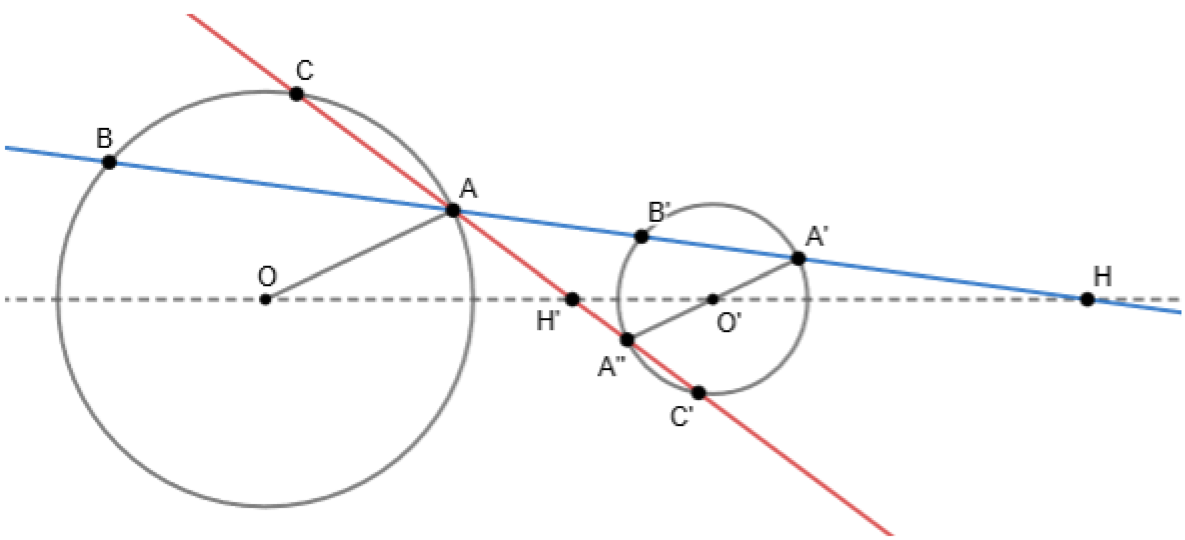
Consideremos dos circunferencias no concéntricas con centros O y O’ respectivamente, tracemos un radio, OA, de modo que no coincida con la línea de los centros, es decir, la línea que une a O y O’; y tracemos el diámetro en la circunferencia en O’ que es paralelo a OA cortando a la circunferencia en A’ y A’’. Las intersecciones de AA’ y AA’’ con OO’ son los centros de similitud, en la figura H y H’; también se les llama centros de homotecia.



En el caso de que las circunferencias tengan el mismo radio uno de los centros de similitud será un punto al infinito, pues en la figura la línea azul sería paralela a la línea de los centros, y el otro será el punto medio del segmento que une a los centros de las circunferencias.

**¿Cuáles son los puntos antihomólogos?

Si una línea pasa por un centro de similitud de dos circunferencias no concéntricas, e interseca a cada una de ellas en dos puntos distintos, estos cuatro puntos de intersección son homotéticos por pares, y los puntos de cada par homotético, son llamados puntos homólogos; que un par de puntos en dos circunferencias no concéntricas sean homotéticos quiere decir que los radios respectivos son paralelos. Ahora bien, a los pares de puntos que consisten de un punto en cada circunferencia y que no sean homotéticos, se les llama antihomólogos.

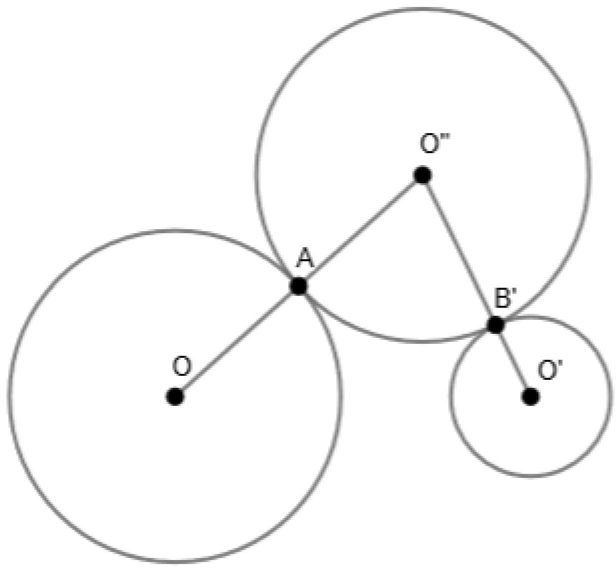


En la figura anterior H y H' son los centros de similitud y como OA‖A'A'' entonces: con respecto al centro de homotecia H, A y A', B y B' son homólogos y A y B', A' y B son antihomólogos; y con respecto al centro de homotecia H', A y A'', C y C' son homólogos y A y C', A'' y C son antihomólogos

Entonces ¿Qué es lo que tenemos?

Una circunferencia tangente a otras dos, es decir, las interseca en un solo punto, punto de contacto, y tienen una tangente común en dicho punto, por lo que los puntos en los que las interseca son colineales con los centros

Dibujemos la figura



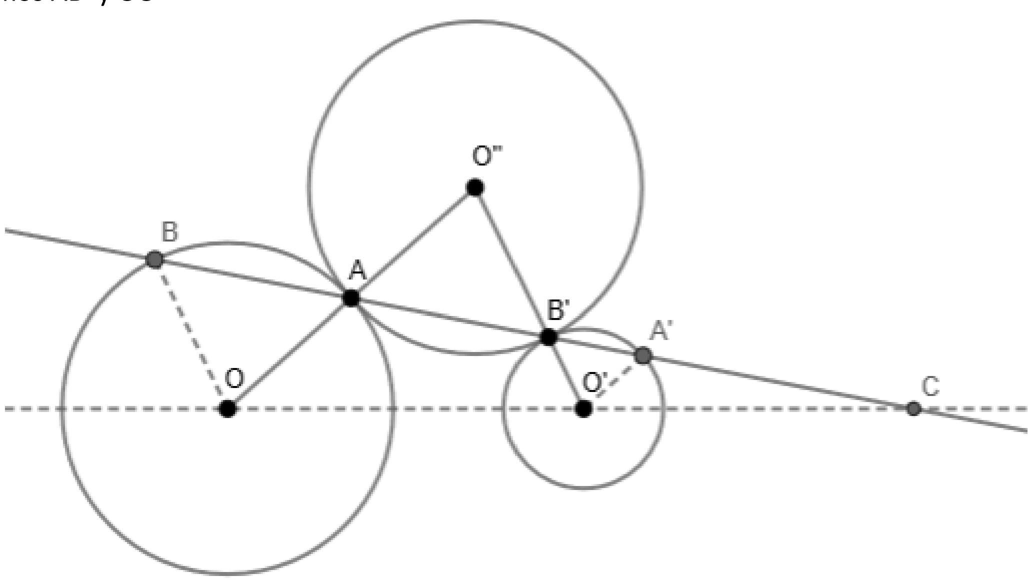
¿Qué es lo que queremos demostrar?

Que A y B' son antihomólogos respecto a las circunferencias en O y O'

¿Cómo lo hacemos?¿Qué necesitamos?

Necesitamos una secante, en particular la que pasa por A y B', y la línea de los centros OO'

Tracemos AB' y OO'



¿Qué debemos probar para que A y B’ sean antihomólogos?

> Como sabemos que OA y OB’ no son paralelos, A y B’ no son homólogos, por lo que basta con probar que AB’ pasa por uno de los centros de similitud de las circunferencias en O y O’, es decir, C es un centro de similitud de las circunferencias en O y O’

¿Cómo lo probamos?¿Qué es lo necesitamos mostrar para que C sea uno de los centros de similitud de las circunferencias en O y O’?

> Que OB‖O’B’ o que OA‖O’A’

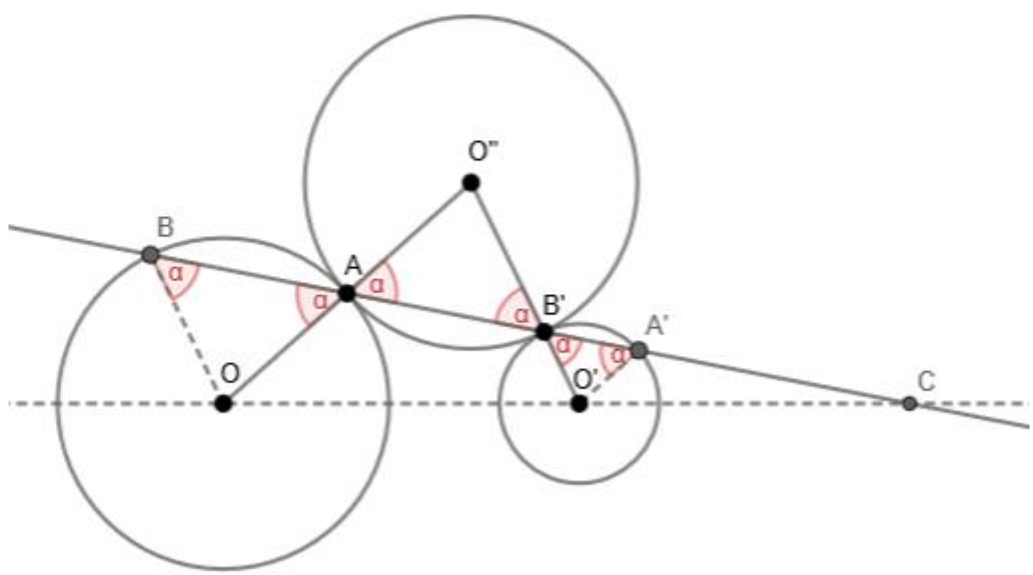
Probemos que OB‖O’B’ ¿Cómo lo hacemos?

> Podemos hacerlo usando ángulos entre paralelas

Pero ¿Qué es lo que sabemos de los ángulos?

> Como sabemos que ΔABO, ΔAB’O’’ y ΔA’B’O’ son isósceles, entonces <OBA=<BAO, <B’AO’’=<O’’B’A y <O’B’A’=<B’A’O’, y además <BAO=<B’AO’’ y <O’’B’A=<O’B’A’ por ser opuestos por el vértice

De modo que tenemos que <OBA=<BAO=<B’AO’’=<O’’B’A=<O’B’A’=<B’A’O’=α



¿Y eso de que nos sirve?¿Cómo podemos usarlo?

> Si tomamos a BB’ como trasversal OB y O’B’ la intersecan en el mismo ángulo, por lo que son paralelas

Así tenemos que OB‖O’B’, de donde podemos concluir que C es un centro de similitud de las circunferencias en O y O’

Y como OB‖O’B’ B y B’ son puntos homólogos y entonces A y B’ son antihomólogos como se quería demostrar.

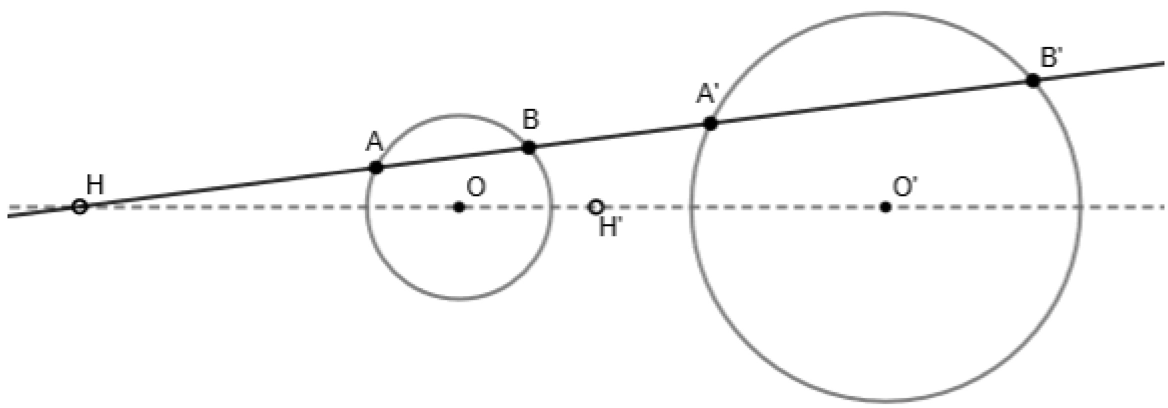
Problema 4

Si una línea variable que interseca a dos circunferencias, pasa por un centro de similitud, las circunferencias determinan cuerdas cuya longitud tiene una razón constante.

¿Qué es lo que tenemos?

Dos circunferencias y una línea que las interseca y pasa por uno de sus centros de similitud

Dibujemos la figura

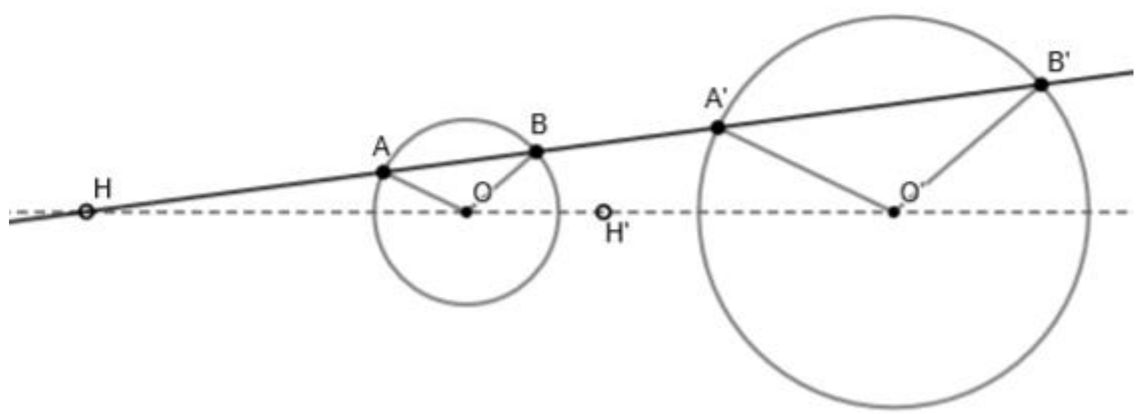


¿Qué es lo que queremos demostrar?

Que AB y A’B’ tiene razón constante, es decir, $\frac{AB}{\mathrm{A'B'}} = K$ sin importar la línea que se elija

¿Cómo lo hacemos?¿Qué es lo que sabemos?

Que A y A’, B y B’ son homólogos, es decir, OA||O’A’ y OB||O’B’



¿Y eso de que nos sirve?¿Qué es lo que nos dice?

Que <OAB=<O’A’B’ y <ABO=<A’B’O’, por lo que ΔABO≈ΔA’B’O’

De donde obtenemos que

$$\frac{OA}{O'A'} = \frac{OB}{O'B'} = \frac{AB}{A'B'}$$

Por la correspondencia de lados, pero $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = R_1$ y $O'A' = O'B' = R_2$ pues son los radios de las circunferencias, que son constantes y por ende su razón también lo es

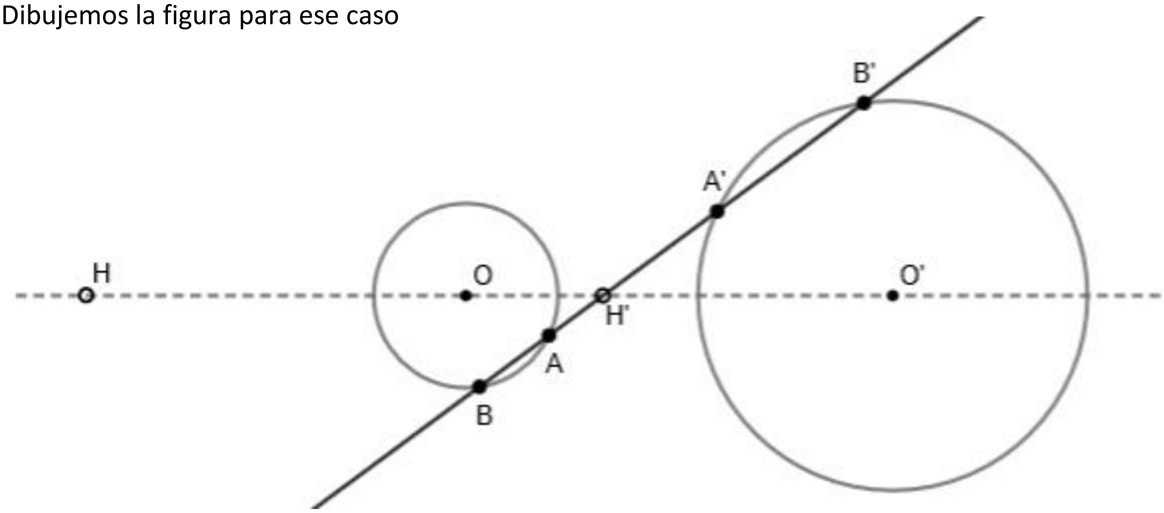
Por lo que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{R_1}{R_2} = K$$

Que es lo que se quería demostrar

Pero ¿Qué pasa si consideramos una línea que pase por el otro centro de homotecia?¿Se sigue cumpliendo?

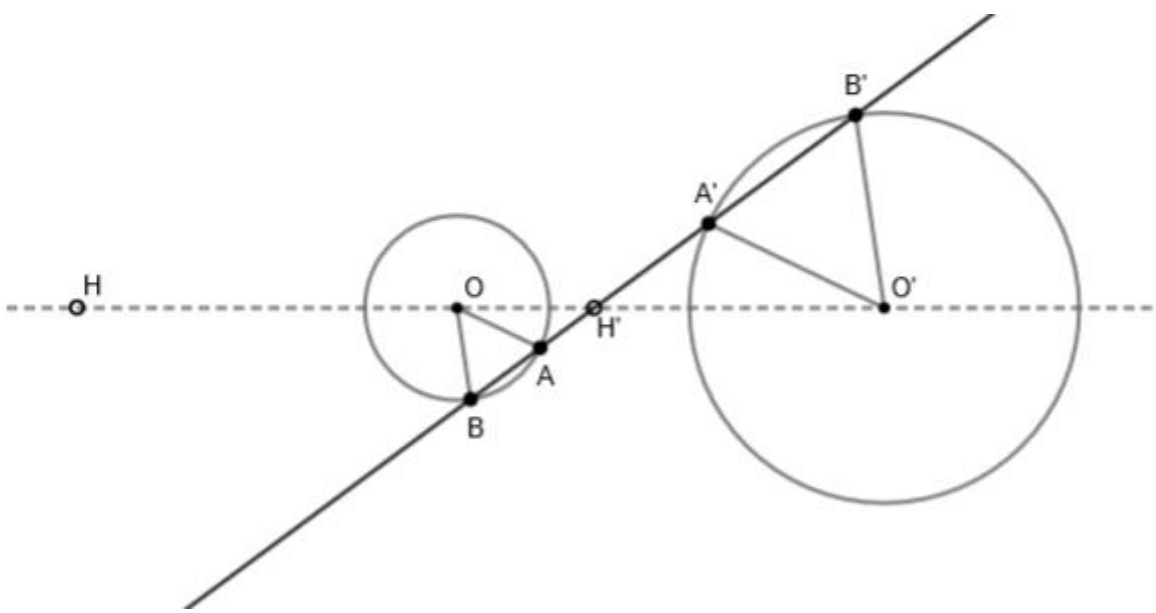
Dibujemos la figura para ese caso



Nuevamente queremos demostrar que AB y A'B' tiene razón constante, es decir, $\frac{AB}{\mathrm{A'B'}} = K$ sin importar la línea que se elija

¿Cómo lo hacemos?¿Qué es lo que sabemos?

Sabemos que A y A', B y B' son homólogos, es decir, OA‖O'A' y OB‖O'B'



¿Y eso de que nos sirve?¿Qué es lo que nos dice?

Que <OAB=<O’A’B’ y <ABO=<A’B’O’, por lo que ΔABO≈ΔA’B’O’

De donde obtenemos que

$$\frac{OA}{O'A'} = \frac{OB}{O'B'} = \frac{AB}{A'B'}$$

Por la correspondencia de lados, pero $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = R_1$ y $O'A' = O'B' = R_2$ pues son los radios de las circunferencias, que son constantes y por ende su razón también lo es

Por lo que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{R_1}{R_2} = K$$

Que es lo que se quería demostrar.

Problema 5

Dibujar una circunferencia que sea tangente a dos líneas dadas y pase por un punto dado.

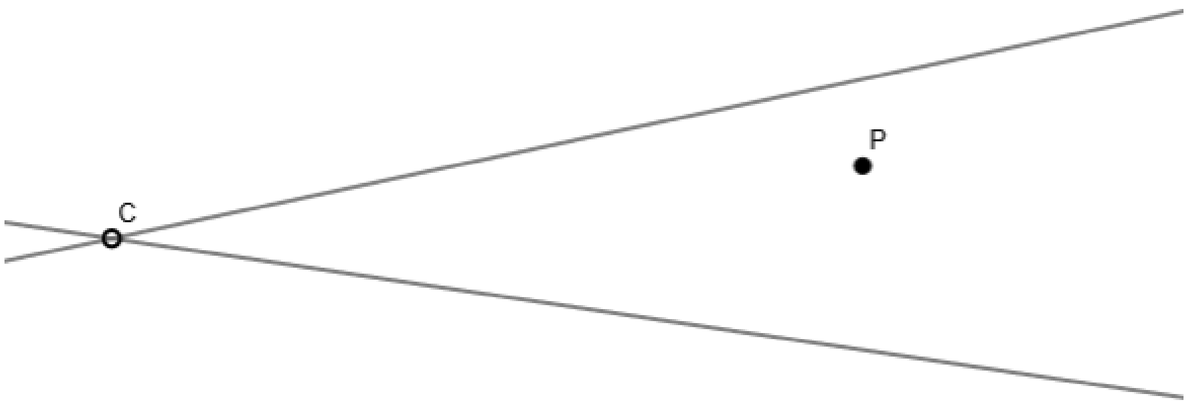
¿Qué es lo que tenemos?

Dos líneas y un punto

¿Qué es lo que nos pide el problema?

Dibujar una circunferencia tangente a las líneas y pase por el punto

Dibujemos la figura



¿Qué es lo que sabemos?¿Qué necesitamos para que sea tangente a las líneas dadas?

Su centro debe equidistar de las líneas dadas

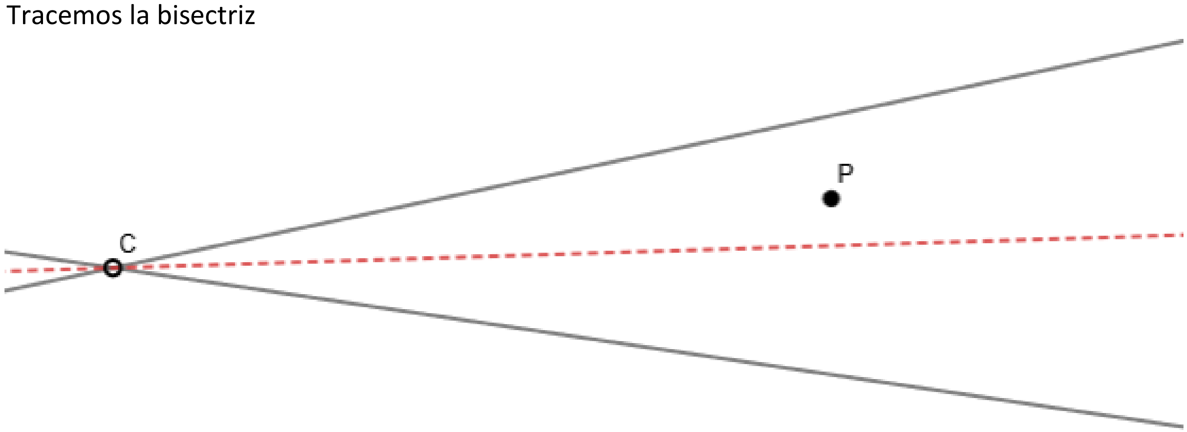
Entonces ¿Dónde debe estar su centro?

En la bisectriz del ángulo que forman las líneas

Pero hay dos bisectrices ¿Cuál es la que nos interesa?

La que está del mismo “lado” que P, pues queremos que la circunferencia pase por P

Tracemos la bisectriz



Pero ¿Cómo hacemos que además pase por P?¿Qué si podemos hacer?

Podemos trazar fácilmente una circunferencia que sea tangente a las líneas dadas

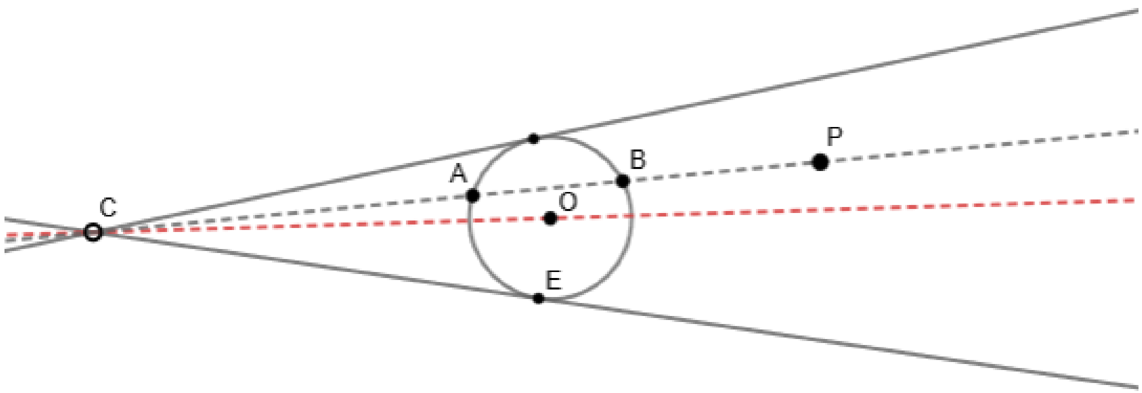
¿Nos sirve de algo?¿Hay alguna relación entre esta circunferencia y la que buscamos?

Ambas circunferencias son tangentes a las líneas dadas, por lo que C es uno de sus centros de similitud

¿Y eso de que nos sirve?¿Cómo podemos usarlo?

Si trazamos la línea que pasa por P y C, sabemos es secante a la circunferencia que tenemos y a la buscada y los puntos de intersección son homotéticos por pares, además como la circunferencia que buscamos pasa por P, P es uno de esos puntos

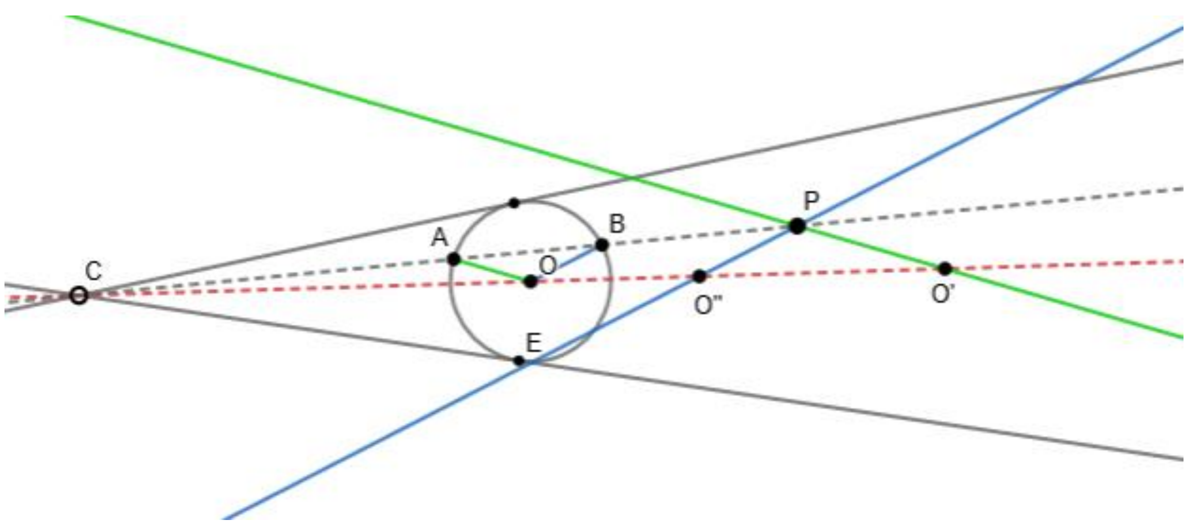
Entonces tracemos una circunferencia auxiliar que sea tangente a las líneas dadas y tracemos PC



Luego, los puntos de intersección de PC con la circunferencia que tenemos y la que buscamos son homotéticos por pares, entonces tenemos dos casos A y P son homotéticos o B y P son homotéticos

Si A y P son homotéticos, el radio por P de la circunferencia buscada es paralelo a OA y si B y P son homotéticos, el radio por P de la circunferencia buscada es paralelo a OB

Tracemos las paralelas a OA y OB por P

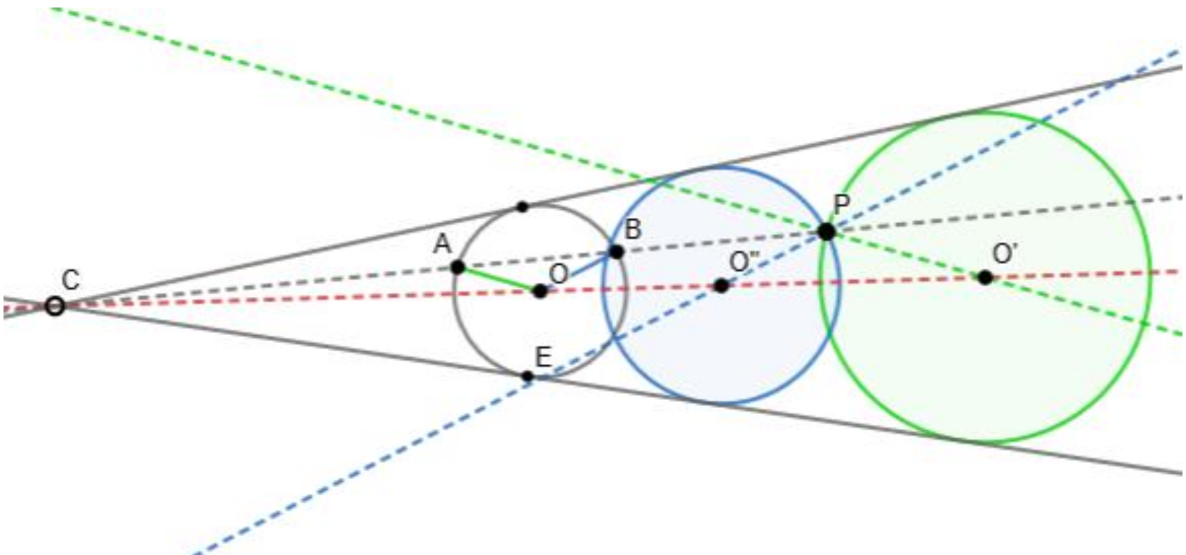


De modo que O’ y O’’ son centros para la circunferencia buscada

Y las circunferencias con centro en O’ y O’’ que pasan por P son tangentes a las líneas dadas

¿Por qué?

> Porque por construcción las circunferencias de radios O’P y O’’P equidistan de las líneas dadas, pues sus centros están en una bisectriz, y están en homotecia con la circunferencia en O con C como su centro de homotecia; por lo que como las líneas dadas pasan por C y son tangentes a la circunferencia en O, entonces también lo son a las circunferencias de radios O’P y O’’P



Por lo que el problema tiene dos soluciones.

Problema 6

Construir una circunferencia que pasa por dos puntos dados y es tangente a una línea dada.

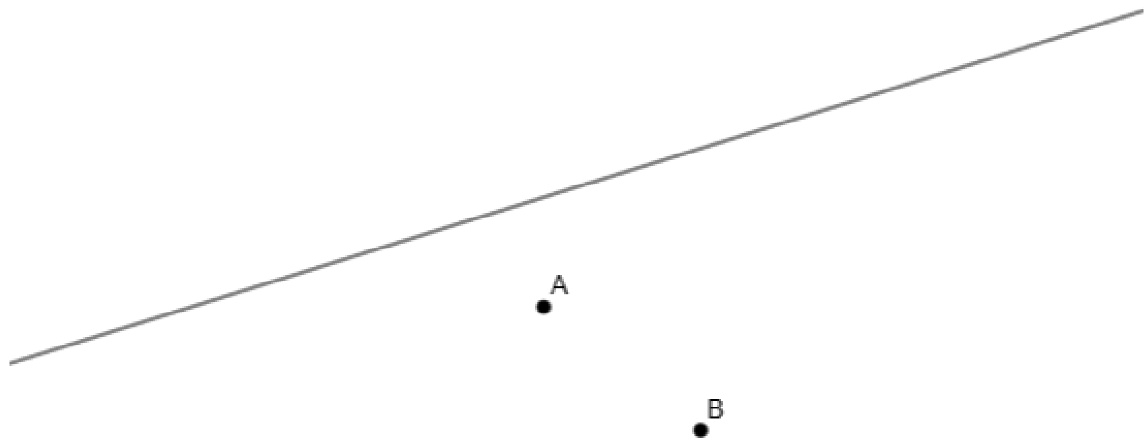
¿Qué es lo que tenemos?

Dos puntos y un línea

¿Qué es lo que nos pide el problema?

Construir una circunferencia que pase por los puntos y sea tangente a la línea

Dibujemos la figura



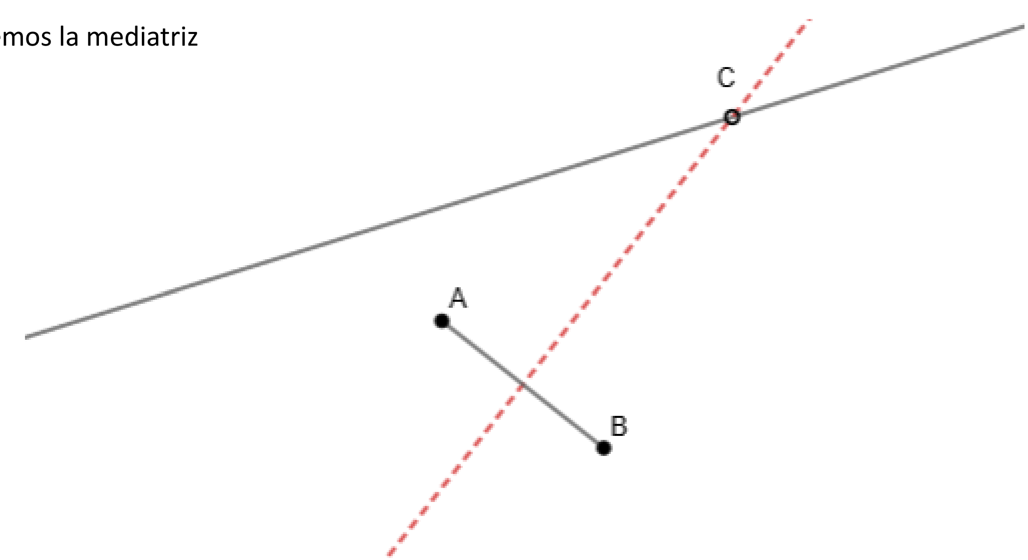
¿Qué es lo que sabemos?¿Qué necesitamos para que pase por A y B?

Su centro debe equidistar de A y B

Entonces ¿Dónde debe estar su centro?

En la mediatriz del segmento AB

Tracemos la mediatriz



Ahora bien ¿Cómo hacemos que además sea tangente a la línea dada?¿Qué si podemos hacer?

> Podemos trazar fácilmente una circunferencia que sea tangente a la línea dada con centro en la mediatriz

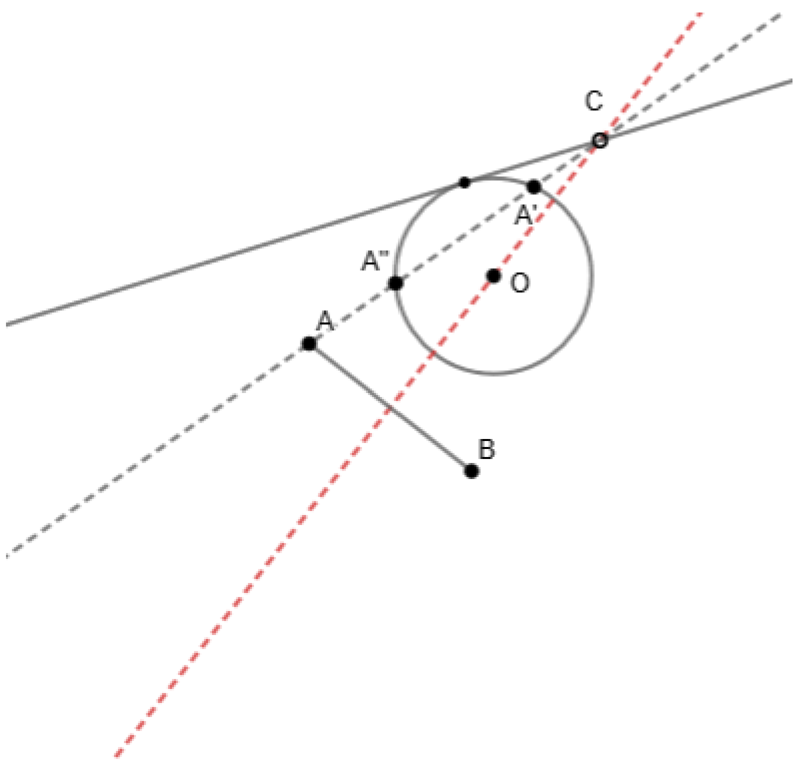
¿Nos sirve de algo?¿Hay alguna relación entre esta circunferencia y la que buscamos?

> Ambas circunferencias son tangentes a la línea dada y la mediatriz de AB es la línea de sus centros por lo que C es uno de sus centros de similitud

¿Y eso de que nos sirve?¿Cómo podemos usarlo?

> Si trazamos la línea que pasa por A y C, sabemos es secante a la circunferencia que tenemos y a la buscada y los puntos de intersección son homotéticos por pares, además como la circunferencia que buscamos pasa por A, A es uno de esos puntos
>
> *Note que solo usamos A pues como el centro está en la mediatriz de AB si la circunferencia pasa por A también pasa por B

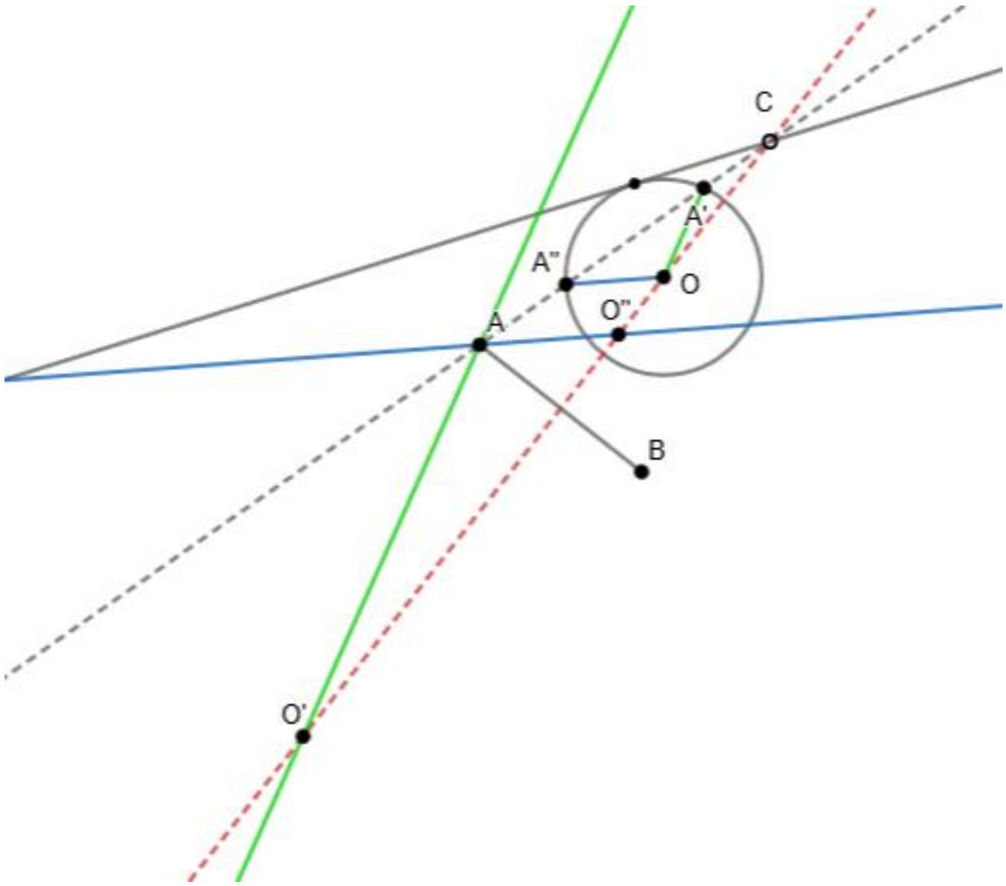
Entonces tracemos una circunferencia auxiliar con centro en la mediatriz que sea tangente a la línea dada y tracemos AC



Sabemos los puntos de intersección de AC con la circunferencia en O y la que buscamos son homotéticos por pares, entonces tenemos dos casos A' y A son homotéticos o A'' y A son homotéticos

Si A’ y A son homotéticos, el radio por A de la circunferencia buscada es paralelo a OA’ y si A’’ y A son homotéticos, el radio por A de la circunferencia buscada es paralelo a OA’’

Tracemos las paralelas a OA’ y OA’’ por A

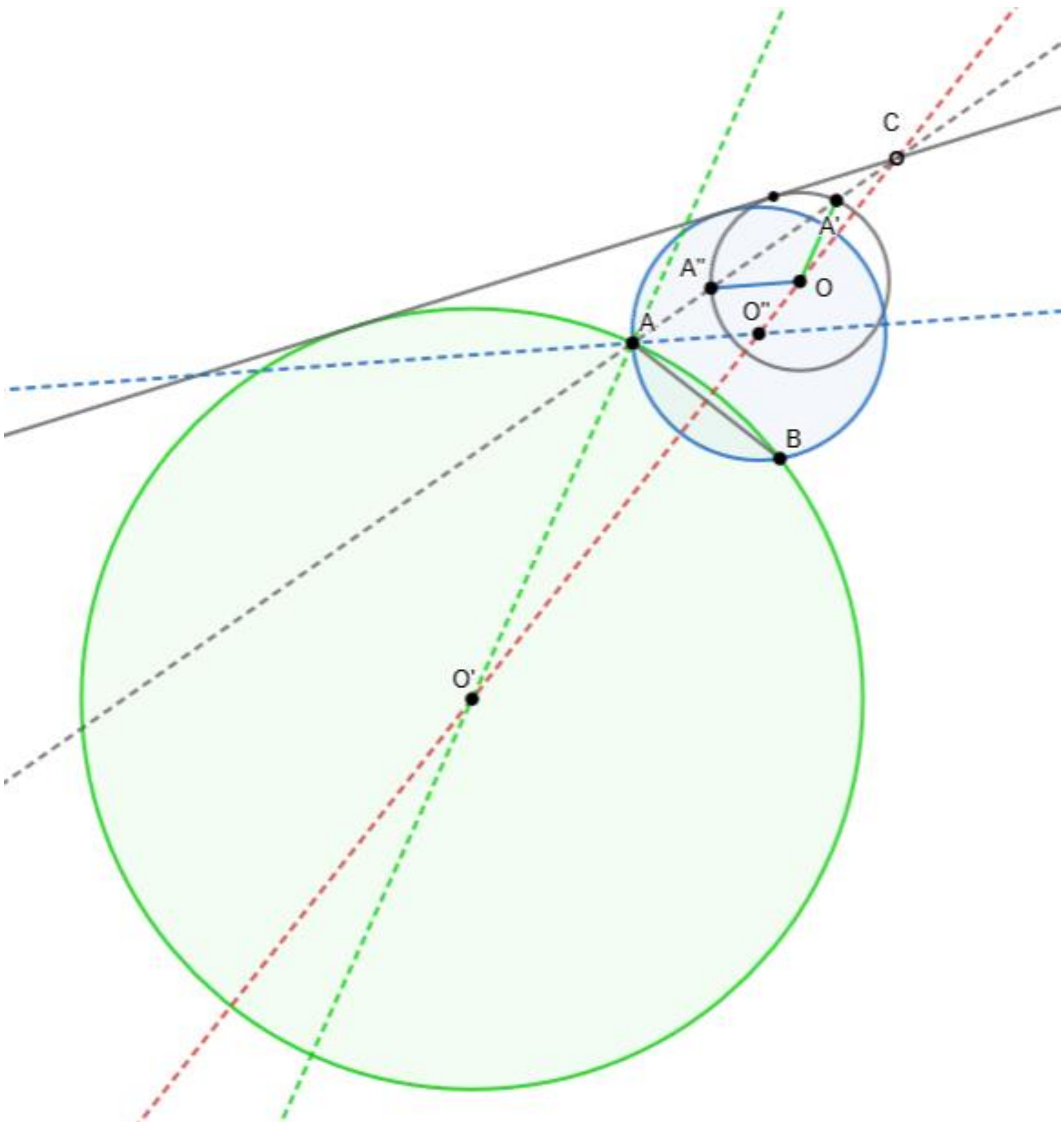


Así tenemos que O’ y O’’ son centros para la circunferencia buscada

Y las circunferencias con centro en O’ y O’’ que pasan por A son tangentes a la línea dada y como su centro está sobre la mediatriz de AB también pasan por B

¿Por qué?

> Porque por construcción las circunferencias de radios O’A y O’’A pasan por B, pues su centro está en la mediatriz de AB y pasan por A, y están en homotecia con la circunferencia en O con C como su centro de homotecia; por lo que como la línea dada pasa por C y es tangente a la circunferencia en O, entonces también es tangente a las circunferencias de radios O’A y O’’A



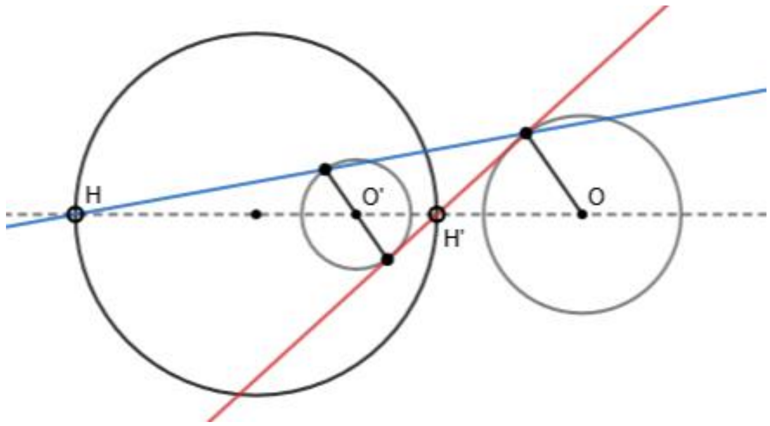
Así, el problema tiene dos soluciones.

Problema 7

La circunferencia de similitud de dos circunferencias que se intersecan, pasa por los puntos de intersección.

**La circunferencia de similitud

La circunferencia de similitud de dos circunferencias no concéntricas, es la circunferencia que tiene como diámetro el segmento que une sus centros de similitud.



En el caso en el que ambas circunferencias tienen el mismo radio, sabemos uno de sus centros de similitud es un punto al infinito y el otro es el punto medio del segmento que une a los centros, de modo que su circunferencia de similitud se degenera en la mediatriz del segmento que une a los centros y la línea al infinito.

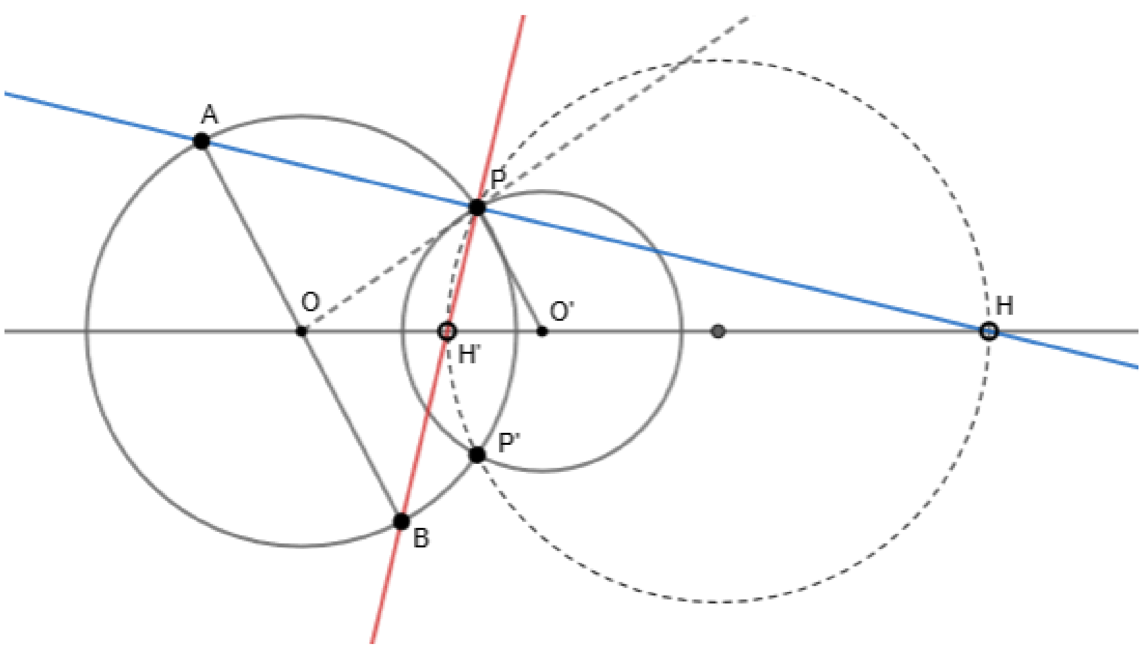
¿Qué es lo que tenemos?

Dos circunferencias que se intersecan

¿Qué es lo que queremos demostrar?

Que su circunferencia de similitud pasa por los puntos de intersección

Dibujemos la figura, y encontremos los centros de similitud usando alguno de los puntos de intersección de las circunferencias



En la figura H y H’ son los centros de similitud

Queremos probar que P y P’ están en la circunferencia de diámetro HH’ ¿Cómo lo hacemos?¿Qué necesitamos para que eso suceda?

Bastaría probar que <H’PH y <H’P’H son de 90° (véase el problema 4 de la sección “Circunferencia y cuadriláteros cíclicos”)

Concentrémonos en probar que <H’PH=90° ¿Cómo lo hacemos?¿Qué es lo que sabemos?

Como P está en ambas circunferencias sabemos que PO=R y PO’=R’, con R y R’ los radios de las circunferencias en O y O’ respectivamente, además como H y H’ son los centros de similitud AO||PO’ y PO||BO’

¿Y eso de que nos sirve?¿Qué más sabemos?

Como AO||PO’, entonces ΔHAO≈ΔHPO’ y como PO||BO’, entonces ΔH’BO ≈ΔH’PO’ y por la correspondencia de sus lados tenemos que

$$\frac{HA}{HP}=\frac{HO}{HO'}=\frac{AO}{PO'} \quad y \quad \frac{H'B}{H'P}=\frac{H'O}{H'O'}=\frac{AO}{PO'}$$

Entonces, de las igualdades anteriores y del hecho de que AO=PO por ser radios de la misma circunferencia, tenemos que

$$\frac{HO}{HO'}=\frac{H'O}{H'O'}=\frac{AO}{PO'}=\frac{PO}{PO'}$$

¿Y eso que nos dice?

Como tenemos que

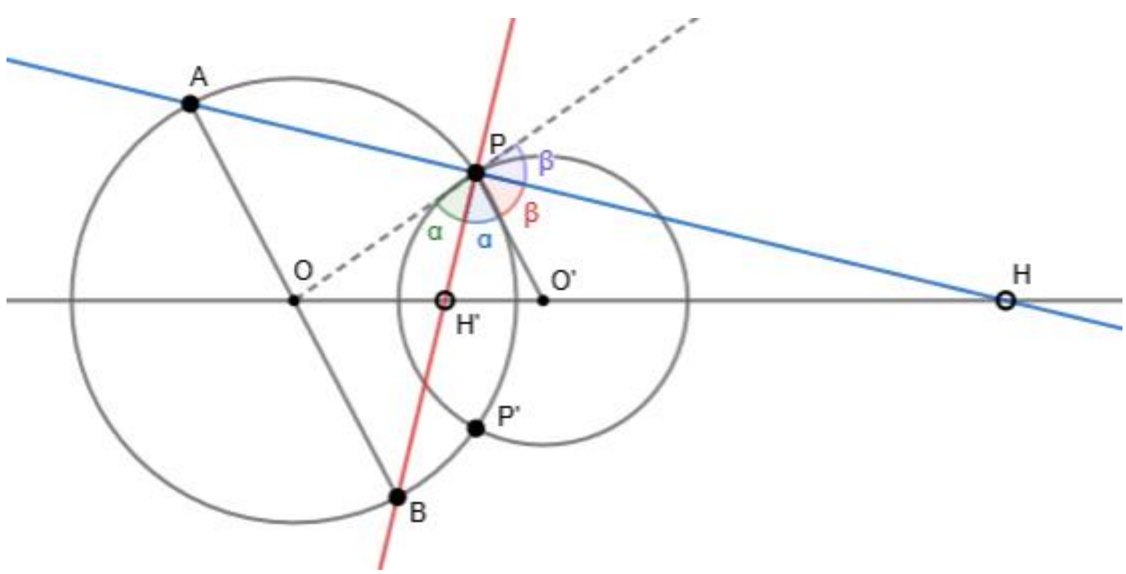
$$\frac{H'O}{H'O'}=\frac{PO}{PO'}$$

Entonces, PH es la bisectriz interior de <OPO’

Y de forma similar, como tenemos que

$$\frac{HO}{HO'}=\frac{PO}{PO'}$$

Entonces, PH es la bisectriz exterior de <OPO’

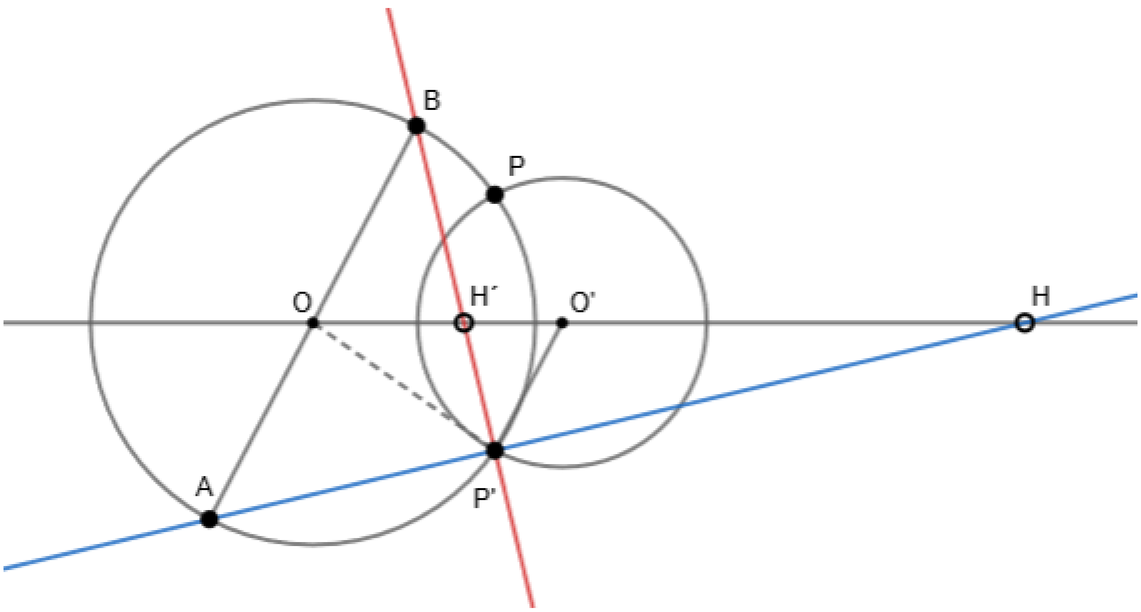


*¿Por qué? Véase el problema 3 de la sección "Geometría del triángulo"

Así, tenemos que $2\alpha + 2\beta = 180°$ por lo que $\alpha + \beta = 90°$, entonces $<\mathrm{H'PH} = \alpha + \beta = 90°$, por lo que P debe estar en la circunferencia de diámetro HH'

De modo que P está en la circunferencia de similitud y, de forma análoga, P' también lo está, es decir, la circunferencia de similitud pasa por las intersecciones de las circunferencias como se quería demostrar.

*Para demostrar que P' está en la circunferencia de similitud, considere la siguiente figura



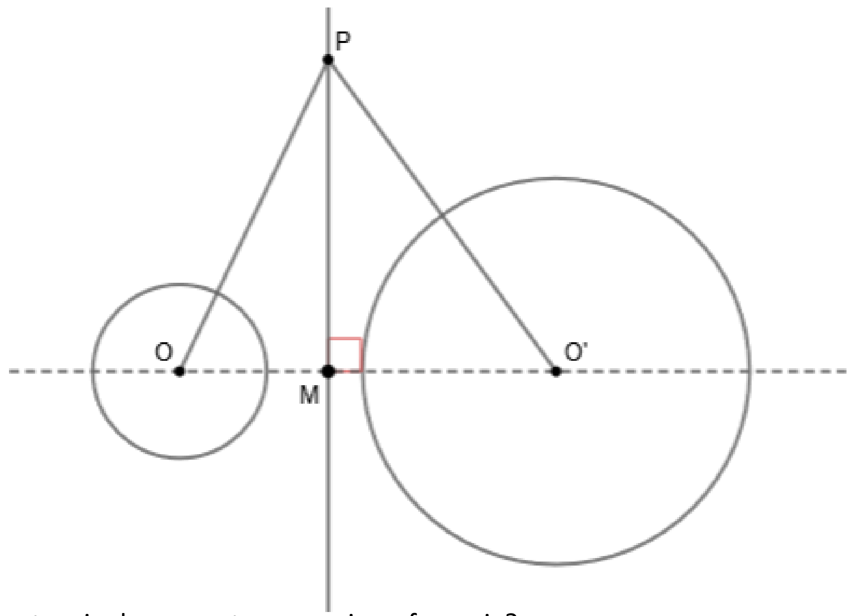
El análisis es similar, intente escribirlo con detalle.

Problema 8

Las tangentes a dos circunferencias en puntos antihomólogos se intersecan en el eje radical.

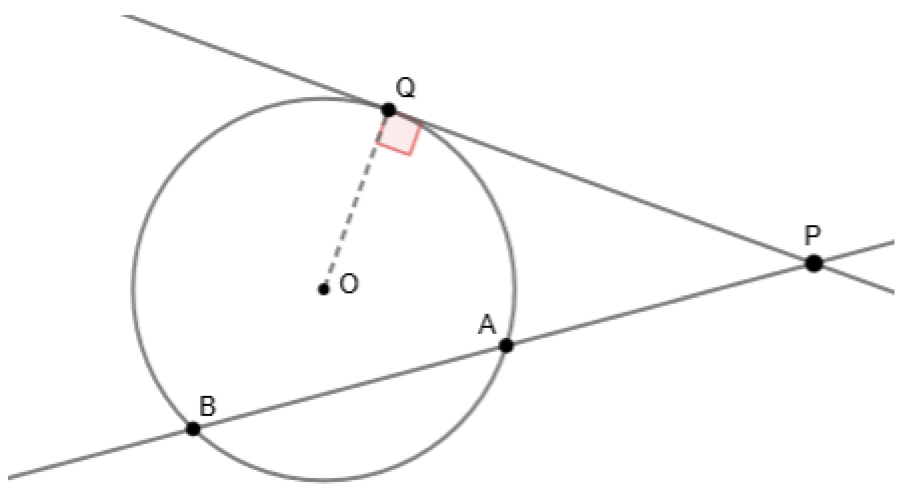
**¿Cuál es el eje radical?

El eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos cuyas potencias con respecto a las dos circunferencias es igual, dicho lugar geométrico es una recta perpendicular a la línea de los centros. En la figura si P es un punto cuyas potencias con respecto a las dos circunferencias es igual, la perpendicular a la línea de los centros por él es el eje radical.



**¿Cuál es la potencia de un punto a una circunferencia?

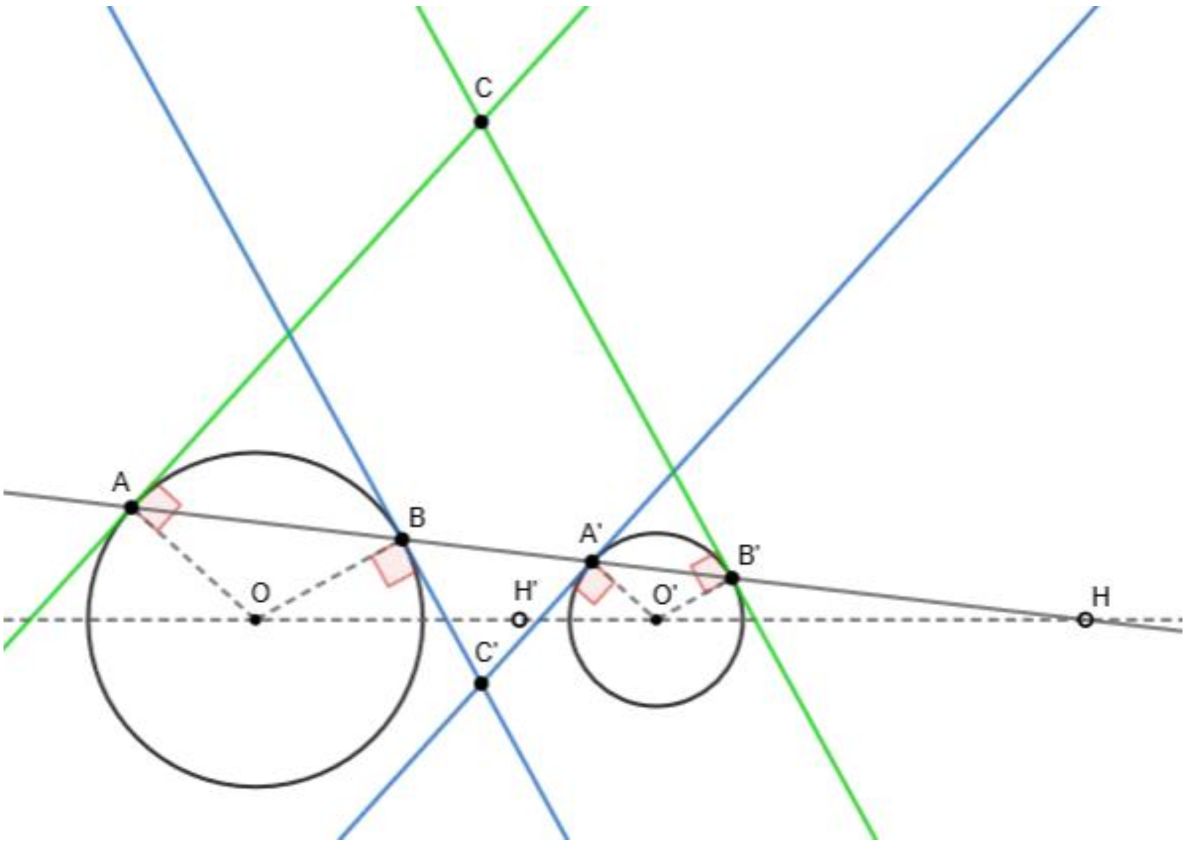
La potencia de un punto con respecto a una circunferencia, es el producto de sus distancias a cualquier par de puntos en la circunferencia que sean colineales con él. En la figura la potencia de P respecto a la circunferencia en O es $\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = PQ^2$ con PQ tangente a la circunferencia.



Ahora bien ¿Qué es lo que tenemos?

> Dos circunferencias, puntos antihomólogos en ellas y las tangentes a las circunferencias respectivas en esos puntos

Como necesitamos puntos antihomólogos necesitamos una secante a las circunferencias que pase por alguno de los centros de similitud. Dibujemos la figura



¿Qué es lo que queremos demostrar?

> Que C y C' están en el eje radical

Entonces queremos mostrar que la potencia de C respecto a la circunferencia en O es igual a su potencia respecto a la circunferencia en O' y de igual forma que la potencia de C' respecto a la circunferencia en O es igual a su potencia respecto a la circunferencia en O'

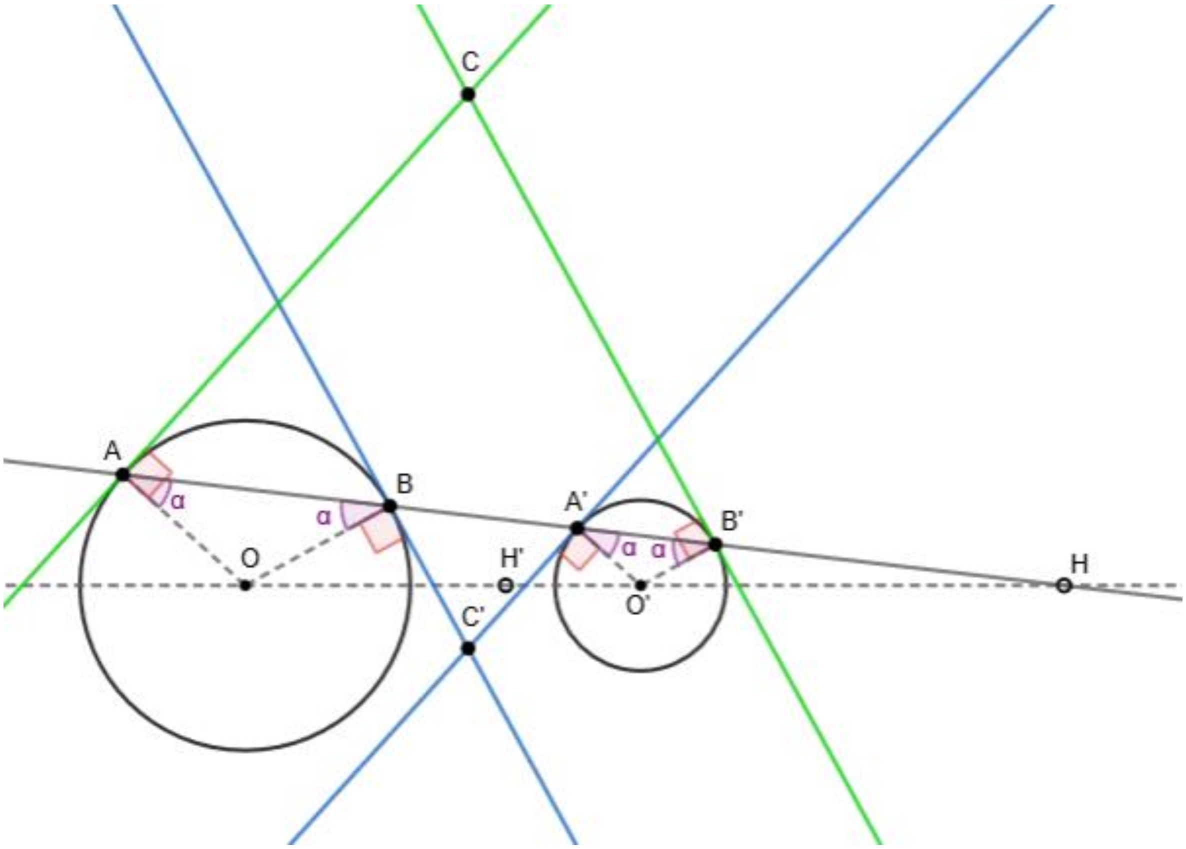
Y, como CA y C'B son tangentes a la circunferencia en O y CB' y C'A' son tangentes a la circunferencia en O', por definición de la potencia lo que queremos demostrar es que $\mathrm{CA}^2 = \mathrm{CB'}^2$ y que $C'A'^2 = C'B^2$, entonces basta demostrar es que $\mathrm{CA} = \mathrm{CB'}$ y que $\mathrm{C'A'} = \mathrm{C'B}$, es decir, ΔAB'C y ΔA'BC' son isósceles

¿Cómo lo hacemos?¿Qué es lo sabemos?

> Sabemos que AO‖A'O' y BO‖B'O', y además ΔABO y ΔA'B'O' son isósceles

¿Y eso de que nos sirve?¿Qué es lo que nos dice?

Que ΔABO≈ΔA’B’O’ y entonces <BOA=<B’O’A’ y <OAB=<O’A’B’=<ABO=<A’B’O’=α



Y como α+<B’AC=<CB’A+α=90°, entonces tenemos que <B’AC=<CB’A por lo que ΔAB’C es isósceles

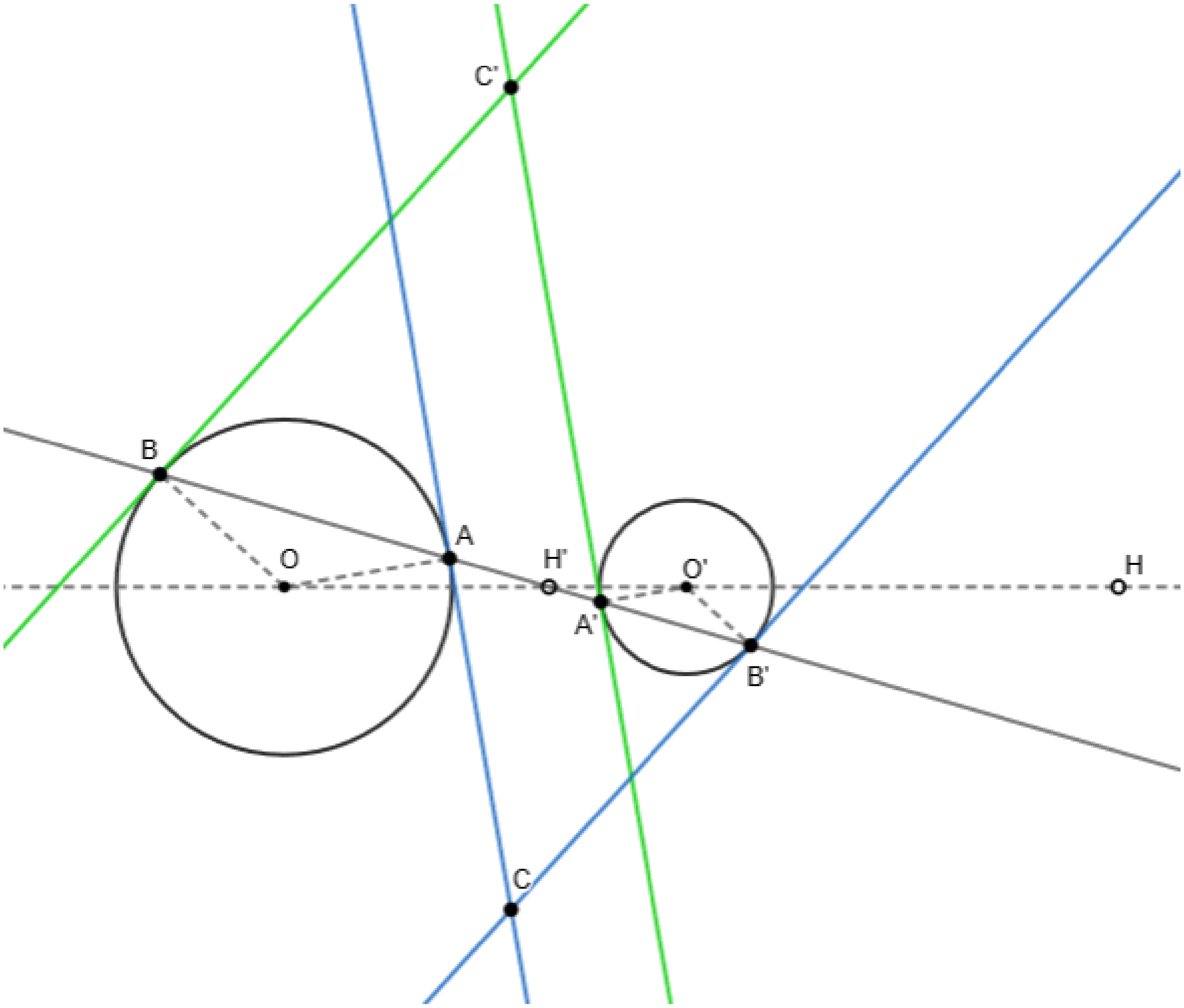
Pero falta ver que ΔA’BC’ sea isósceles ¿Cómo lo hacemos?

Pues como AO∥A’O’ y CA y C’A’ son perpendiculares a ellas entonces CA∥C’A’ y de forma similar como BO∥B’O’ y CB’ y C’B son perpendiculares a ellas entonces CB’∥C’B

De modo que ΔAB’C≈ΔA’BC’, por lo que ΔA’BC’ también es isósceles y <C’BA’=<BA’C’

Así, obtenemos que CA=CB’ y que C’A’=C’B como se quería demostrar.

*¿Qué pasa si usamos el otro centro de similitud? Considere la siguiente figura. El análisis es análogo, intente escribirlo con detalle.



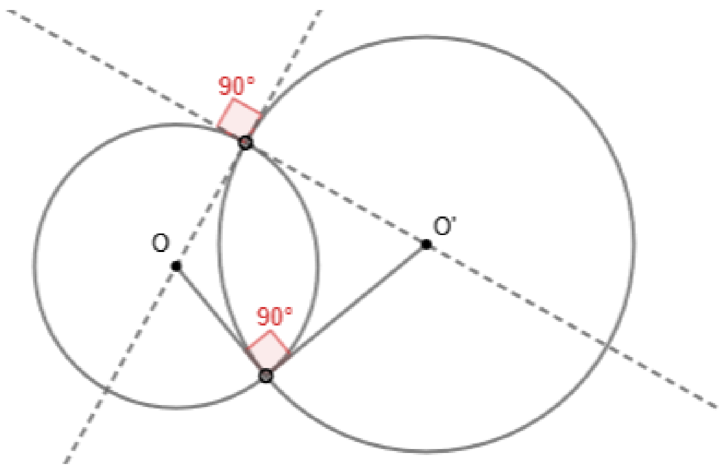
C'
B
A
O
H'
O'
H
A'
B'
C

Problema 9

Si cada una de las circunferencias de una pareja corta ortogonalmente a cada una de una segunda pareja entonces el eje radical de cada par es la línea de los centros del otro.

**¿Qué significa que dos circunferencias se corten ortogonalmente?

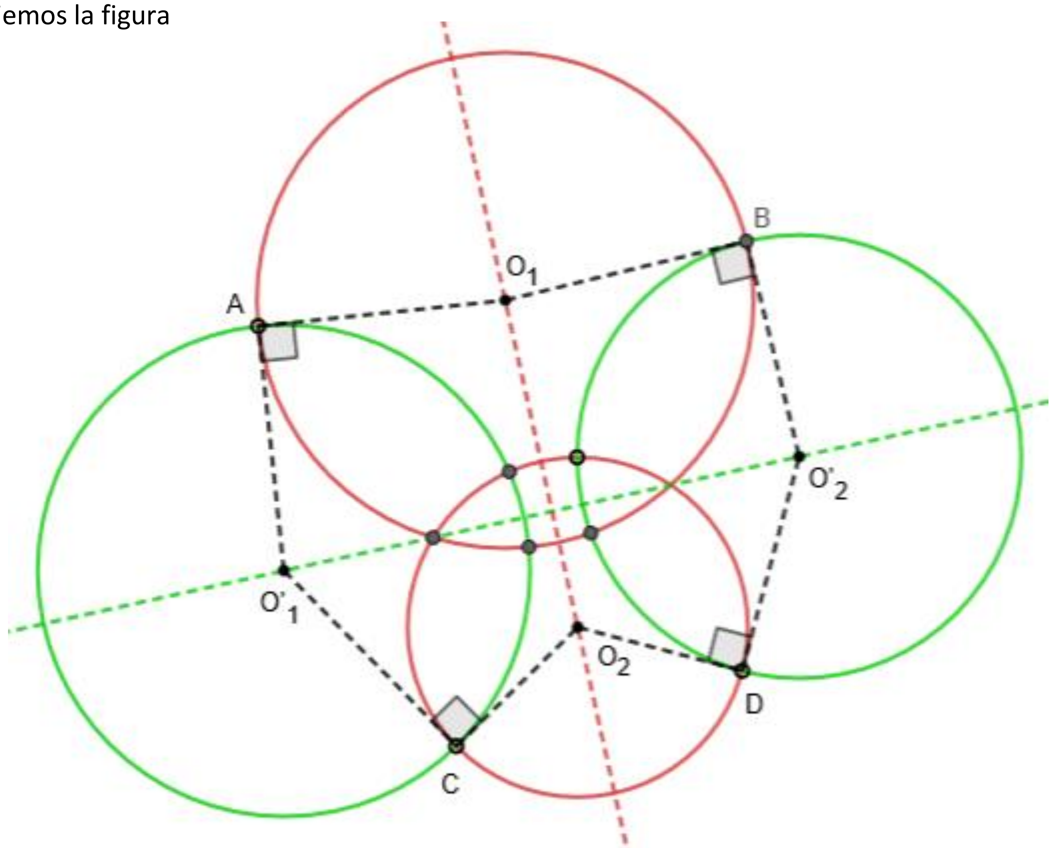
> Que dos circunferencias se corten ortogonalmente o sean ortogonales quiere decir que las tangentes trazadas en cualquiera de sus puntos de intersección son perpendiculares, es decir, los radios de éstas por cualquiera de sus puntos de intersección son perpendiculares



¿Qué es lo que tenemos?

> Dos pares de circunferencias tales que cada par corta ortogonalmente al otro

Dibujemos la figura



¿Qué es lo que queremos demostrar?

Que la línea de los centros de un par de circunferencias es el eje radical del otro par

Entonces queremos probar que $O'_1O'_2$ es el eje radical de las circunferencias en O_1 y O_2 y que O_1O_2 es el eje radical de las circunferencias en O'_1 y O'_2 , es decir, queremos que O'_1 y O'_2 estén en el eje radical de las circunferencias en O_1 y O_2 y que O_1 y O_2 estén en el eje radical de las circunferencias en O'_1 y O'_2

¿Cómo lo hacemos?¿Qué necesitamos para que un punto esté en el eje radical de dos circunferencias?

Que sus potencias respecto a ambas circunferencias sean iguales

Concentrémonos en, por ejemplo, O_1 y O_2 ¿Qué sabemos de sus potencias respecto a las circunferencias en O'_1 y O'_2?

Como O_1A y O_1B son tangentes a las circunferencias en O'_1 y O'_2 respectivamente, entonces las potencias de O_1 respecto a las circunferencias en O'_1 y O'_2 son O_1A^2 y O_1B^2 respectivamente y además son iguales pues O_1A y O_1B son radios de la circunferencia en O_1, por lo que O_1 está en el eje radical de las circunferencias en O'_1 y O'_2

Y de forma similar O_2 está en el eje radical de las circunferencias en O'_1 y O'_2 , pues sus potencias respecto a dichas circunferencias son O_2C^2 y O_2D^2 respectivamente y además son iguales pues O_2C y O_2D son radios de la circunferencia en O_2

De lo anterior O_1 y O_2 están en el eje radical de las circunferencias en O'_1 y O'_2 , es decir, O_1O_2 es el eje radical de las circunferencias en O'_1 y O'_2

Y análogamente $O'_1O'_2$ es el eje radical de las circunferencias en O_1 y O_2 (intente escribirlo con detalle).

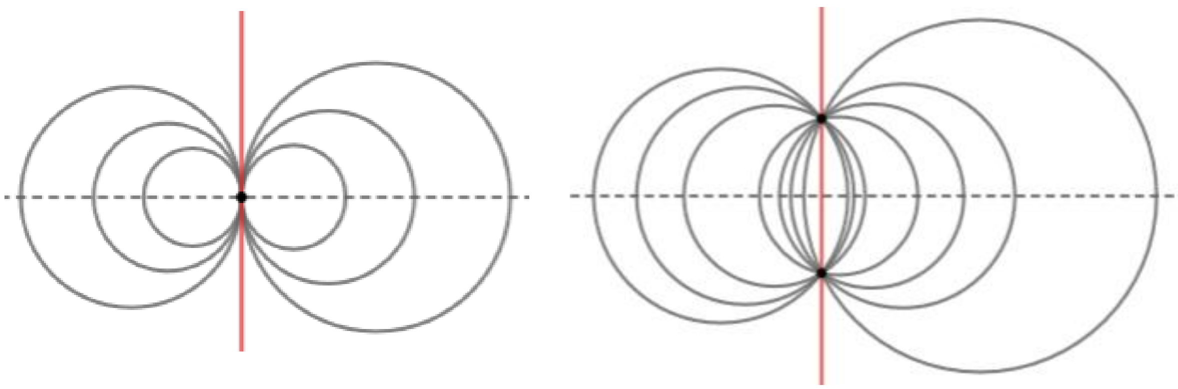
Así, el eje radical de cada par de circunferencia es la línea de los centros del otro par de circunferencias, como se quería demostrar.

Problema 10

Los ejes radicales de una circunferencia dada y de las circunferencias de un conjunto coaxial son concurrentes.

**Circunferencias coaxiales

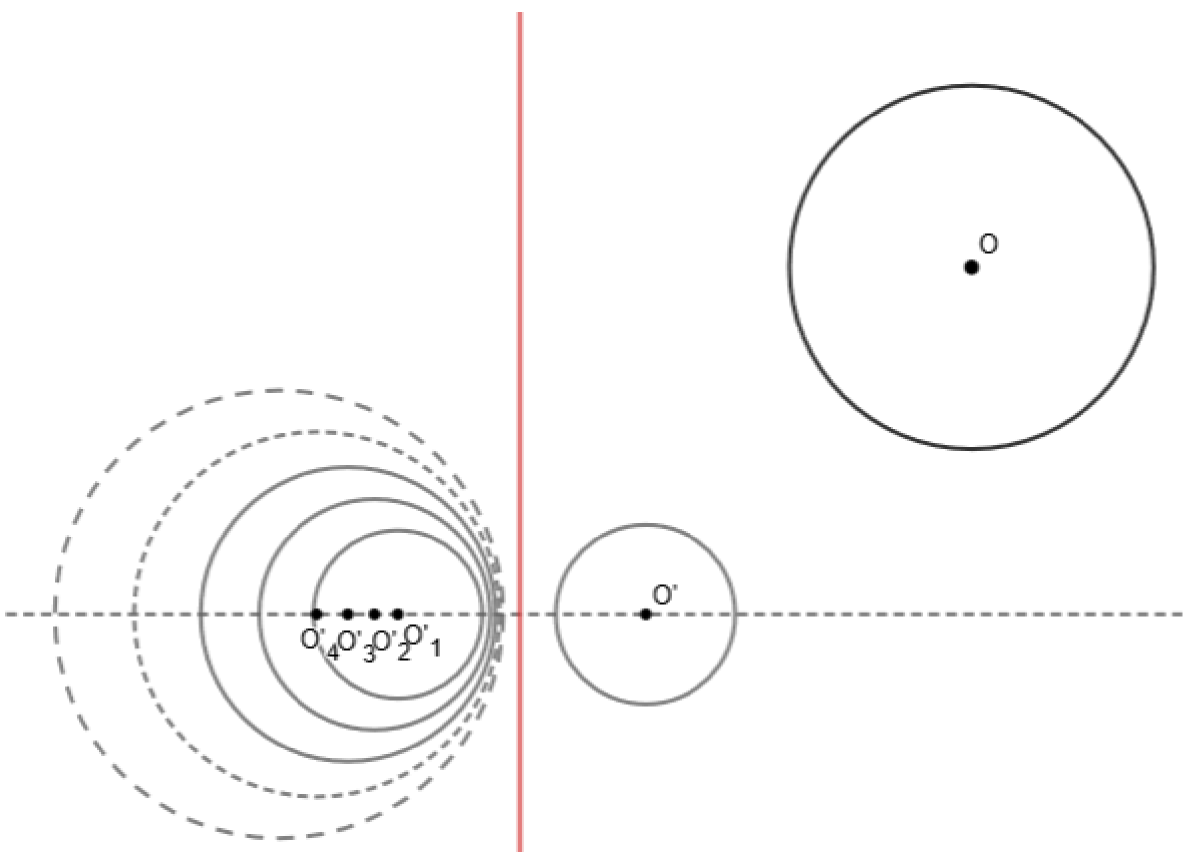
> Si un conjunto de circunferencias es tal que el eje radical es el mismo para cualquier par de circunferencias del conjunto, se dice que las circunferencias son coaxiales y forman un conjunto coaxial.



¿Qué es lo que tenemos?

> Una circunferencia dada y un conjunto coaxial de circunferencias

Dibujemos la figura



En la figura la circunferencia en O es la dada y la recta roja es el eje radical del conjunto coaxial

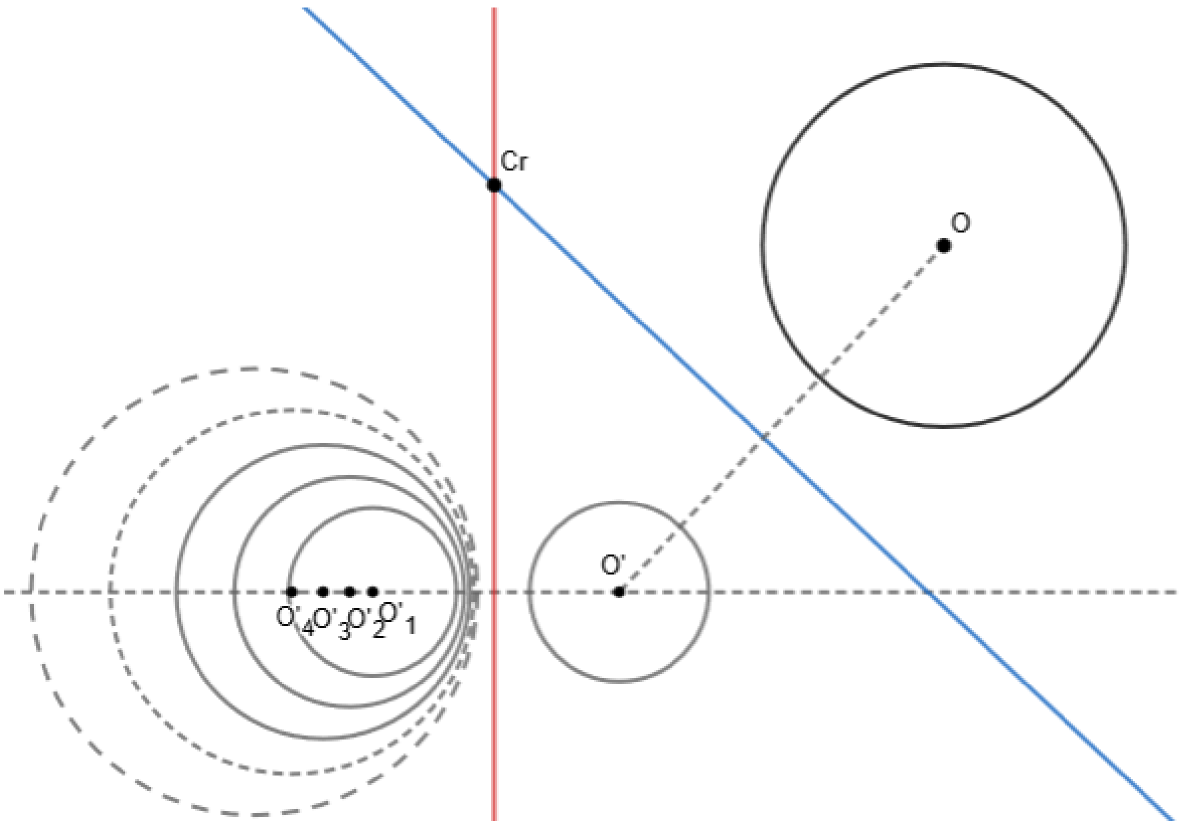
¿Qué queremos demostrar?

> Que los ejes radicales de la circunferencia dada con las circunferencias del conjunto coaxial son concurrentes

Entonces queremos probar que los ejes radicales de la circunferencia en O con cualquier circunferencia del conjunto coaxial pasan por un mismo punto

Pero ¿Qué punto?¿Qué sabemos de los ejes radicales?

Dibujemos el eje radical de la circunferencia en O con alguna circunferencia del conjunto coaxial



¿Qué sabemos del punto de intersección del eje radical del conjunto coaxial y el que acabamos de trazar?

> Como Cr está en el eje radical de la circunferencia dada y una circunferencia del conjunto coaxial sus potencias a la circunferencia dada y a la circunferencia del conjunto son iguales; pero como además está en el eje radical del conjunto coaxial su potencia a cualquier circunferencia de dicho conjunto es siempre la misma

De modo que las potencias de Cr a cualquier circunferencia del conjunto coaxial y a la circunferencia dada son iguales

Por lo que Cr está en el eje radical de la circunferencia dada y cualquier circunferencia del conjunto, es decir, los ejes radicales de la circunferencia dada y de las circunferencias del conjunto coaxial pasan por Cr

Así, los ejes radicales de la circunferencia dada y de las circunferencias del conjunto coaxial son concurrentes, como se quería demostrar.

Menelao, Ceva y Desargues

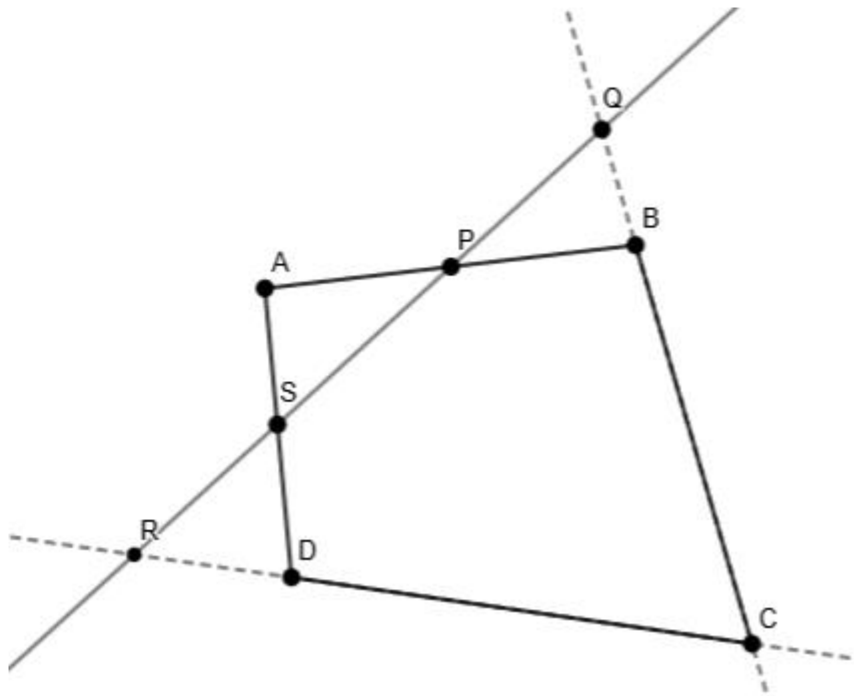
Problema 1

Si los lados AB, BC, CD y DA de un cuadrilátero ABCD son cortados por una línea en los puntos P, Q, R y S respectivamente entonces $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1$

¿Qué es lo que tenemos?

Un cuadrilátero ABCD y una recta que corta a AB en P, BC en Q, CD en R y DA en S

Dibujemos la figura



¿Qué es lo que queremos probar?

Que $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1$

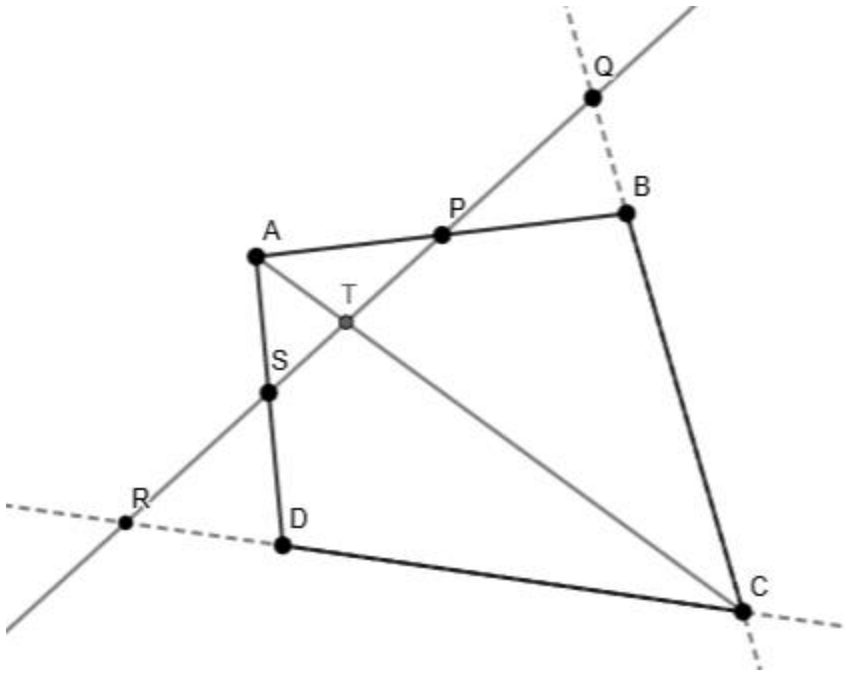
Entonces queremos establecer una relación entre los segmentos que determina la recta en los lados del cuadrilátero ¿Cómo podemos hacerlo?¿A qué se parece?

Se parece al teorema de Menelao, pero el teorema de Menelao es para triángulos

¿Cómo podemos usarlo?¿Qué necesitamos?

Necesitamos triángulos por lo que es necesario trazar una diagonal

Tracemos AC



Obtenemos los triángulos ΔABC y ΔACD

Apliquemos Menelao a dichos triángulos

Pero hay varias formas de aplicar Menelao ¿cuál es la que nos sirve?

Como necesitamos los términos $\frac{AP}{PB}$ y $\frac{BQ}{QC}$ en el ΔABC iremos de A a B y luego a C, y de forma similar en el ΔACD iremos de A a C y luego a D pues necesitamos $\frac{CR}{RD}$ y $\frac{DS}{SA}$

Entonces aplicando Menelao a ΔABC y ΔACD obtenemos

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CT}{TA}=-1 \quad y \quad \frac{AT}{TC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=-1$$

Multiplicando ambas, pues necesitamos una única expresión, tenemos

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CT}{TA}\cdot\frac{AT}{TC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=(-1)(-1)=1$$

Y además como $\mathrm{CT}=-\mathrm{TC}$ y $\mathrm{AT}=-\mathrm{TA}$ obtenemos

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CT}{TA}\cdot\frac{AT}{TC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\,(-1)(-1)\,\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

Así obtenemos que

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CT}{TA}\cdot\frac{AT}{TC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

Que es lo que se quería demostrar

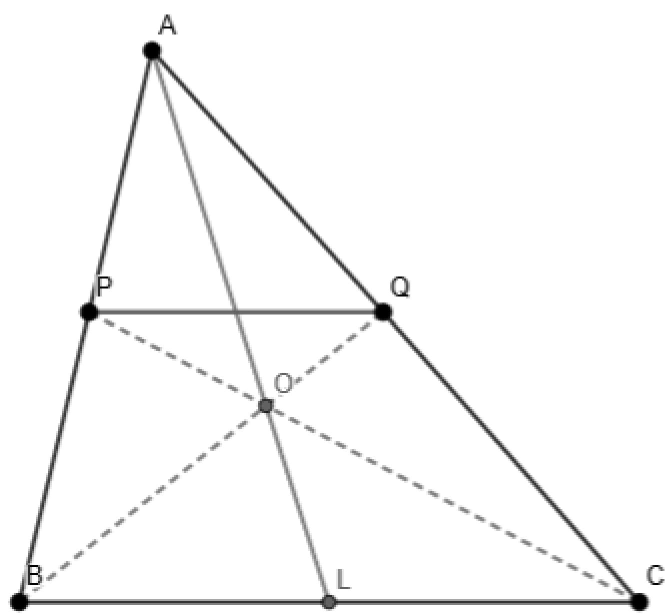
Problema 2

Si P y Q son puntos en AB y AC del triángulo ABC de tal forma que PQ es paralela a BC, y si BQ y CP se intersecan en O, entonces AO es una mediana.

¿Qué es lo que tenemos?

> Tenemos un triángulo ABC, los puntos P y Q en los lados AB y AC tal que PQ||BC y O la intersección de BQ y CP

Dibujemos la figura



¿Qué es lo que debemos demostrar?

> Que AO es una mediana, es decir AO pasa por el punto medio de BC, es decir, BL=LC

¿Cómo hacerlo?¿Qué es lo que sabemos?

> Sabemos que PQ||BC

¿Qué más sabemos?¿Qué podemos decir de la figura?

> BQ, CP y AL son concurrentes

Entonces ¿Qué más podemos decir?

> Como son concurrentes podemos aplicar el teorema de Ceva

Aplicando Ceva a BQ, CP, AL tenemos

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

Pero ¿Eso de que nos sirve? Queremos que $\frac{BL}{LC} = 1$ ¿Qué no hemos usado?

No hemos usado que PQ||BC

Necesitamos que $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$ ¿Cómo podemos usarlo?

Pues como PQ||BC entonces $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

Entonces tenemos que

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{QC}{AQ} = 1$$

Y además como $QC = -CQ \ y \ AQ = -QA$ obtenemos

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

Y en consecuencia

$$\frac{BL}{LC} = 1$$

Es decir, L es el punto medio de BC

Así AO es una mediana, que es lo que se quería demostrar.

Problema 3

Dado un segmento AB y su punto medio. Dibujar por un punto dado P, con regla solamente, una paralela a AB.

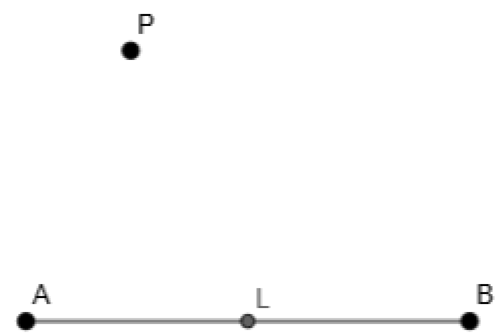
¿Qué es lo que tenemos?

Un segmento AB, su punto medio y un punto dado P

¿Qué nos pide el problema?

Trazar la paralela a AB por P usando solamente regla

Dibujemos la figura



¿Qué podemos hacer?

Como sólo podemos usar regla, lo único que podemos hacer es trazar rectas dados dos de sus puntos

De modo que para poder trazar la paralela a AB por P necesitamos otro punto de ella

Entonces necesitamos encontrar otro punto, digamos Q, tal que PQ sea paralela a AB

Ahora bien ¿Cómo sabemos que dos rectas son paralelas?

Si trazamos una transversal a ellas los ángulos que se forman entre las restas suman 180°

Pero sólo podemos usar regla por lo que no podemos medir ángulos ¿De qué otra forma podemos saber que dos rectas son paralelas?

Por Thales, si dos rectas son cortadas por dos transversales que se intersecan y los segmentos determinados sobre ellas son proporcionales entonces las rectas son paralelas

¿Podemos usarlo?¿Qué necesitamos?

Dos transversales que se intersequen

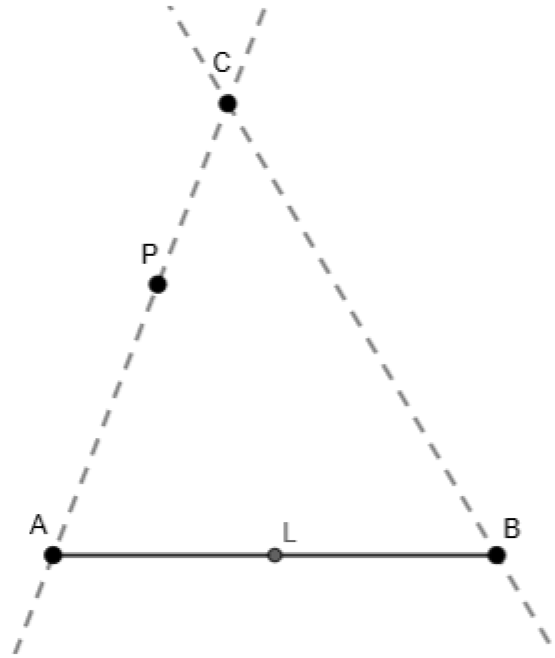
¿Qué transversales?¿Cuáles parecen más convenientes?

Una que pase por A y otra por B

Pero, necesitamos que la paralela pase por P ¿Cómo podemos garantizarlo?

Haciendo que alguna de las transversales pase por P

Dibujemos la figura



Tenemos un triángulo y queremos una paralela a un de sus lados

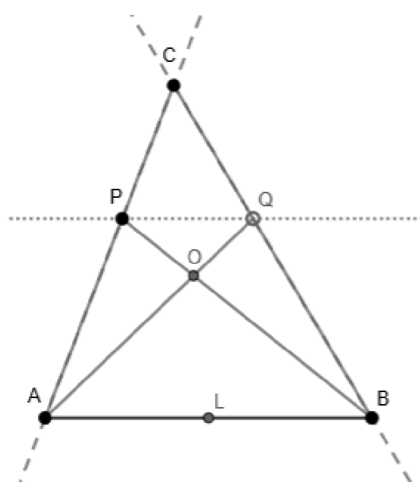
Necesitamos encontrar un punto Q en BC tal que $\frac{CP}{PA} = \frac{CQ}{QB}$

¿Cómo lo hacemos?¿A qué se parece?¿Hemos resuelto algún problema similar?

Se parece a la figura del problema anterior, pero en el problema anterior teníamos la paralela

¿Qué nos dice el problema anterior?

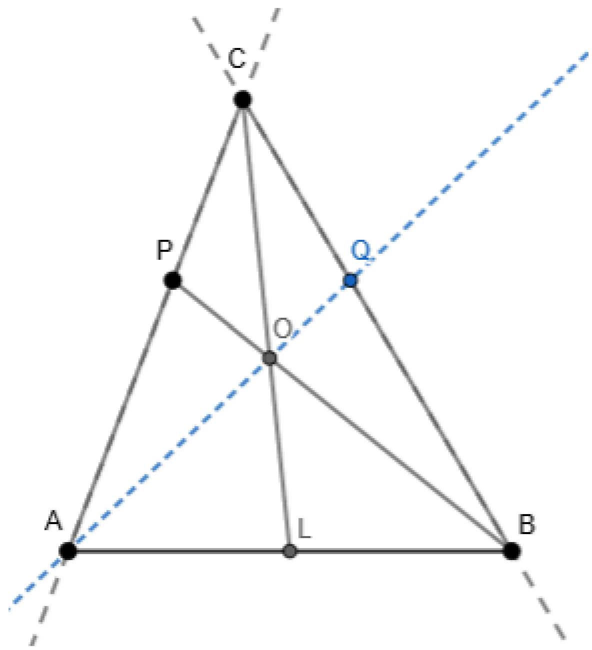
En nuestra figura, nos dice que si PQ es paralela a AB entonces CO es una mediana con O la intersección de BP y AQ



¿Podemos usarlo?¿Cómo?

Como L es el punto medio de AB entonces CL es una mediana y conocemos P por lo que podemos trazar BP, entonces la recta que pasa por A y la intersección de CL y BP determina a Q

Dibujemos la figura



Entonces Q es el punto buscado, es decir PQ el paralela a AB

¿Por qué?

Pues por construcción AQ, BP y CL son concurrentes y por el teorema de Ceva

$$\frac{AL}{LB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$$

Y sabemos que AL=LB, es decir $\frac{AL}{LB}=1$

Entonces tenemos que

$$\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$$

De donde obtenemos

$$\frac{CP}{PA}=\frac{CQ}{QB}$$

Es decir, los segmentos que determinan las transversales CA y CB son proporcionales y en consecuencia PQ||AB

Así, hemos trazado una paralela a AB por el punto dado P usando sólo regla.

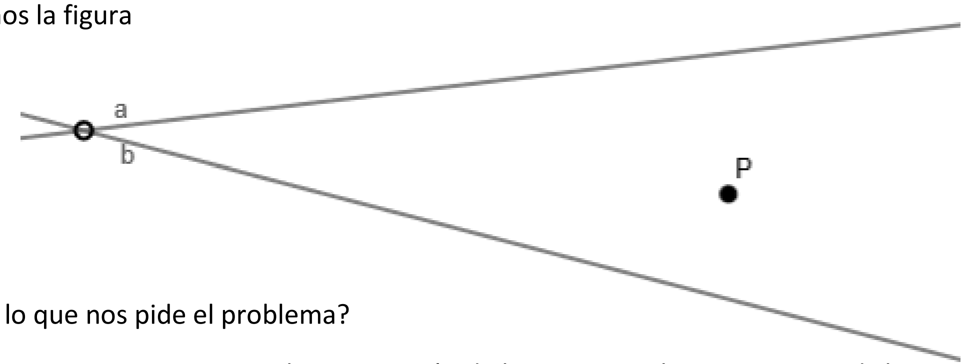
Problema 4

Refiera la solución del siguiente problema al Teorema de Desargues: Dadas dos líneas rectas y un punto que no se encuentre en ellas. Con regla solamente, trazar una línea por el punto dado y por el punto de intersección de las dos líneas dadas sin usar este punto de intersección.

¿Qué es lo que tenemos?

Dos rectas y un punto fuera de ellas

Dibujemos la figura



¿Qué es lo que nos pide el problema?

Trazar una recta por P y la intersección de las rectas a y b, pero sin usar dicha intersección y usando solamente regla

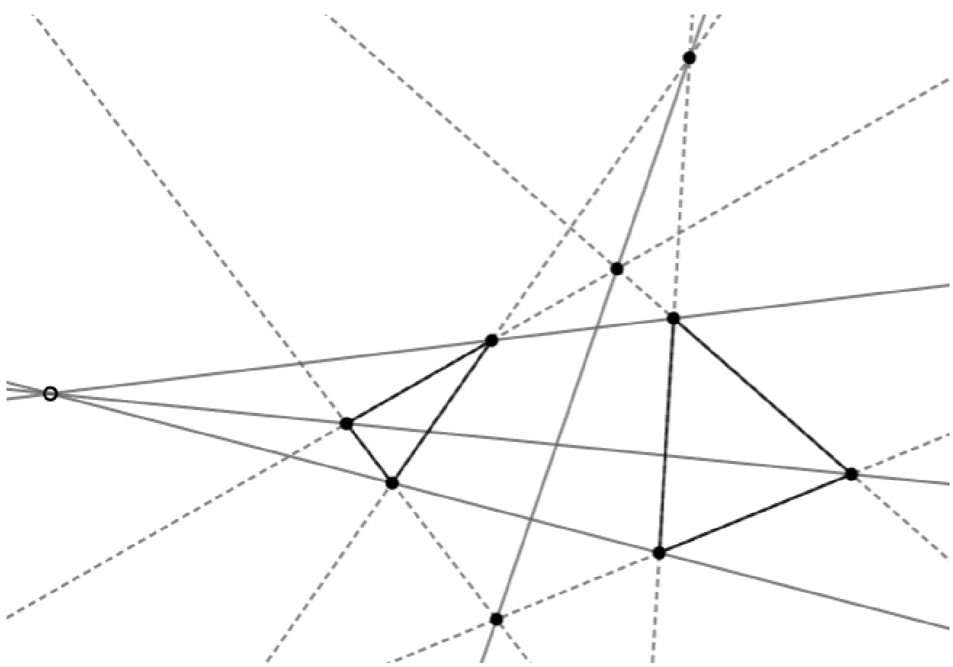
Entonces sólo podemos trazar rectas, no paralelas ni perpendiculares

Ahora bien ¿Qué más nos dice el problema?

Que usemos el teorema de Desargues

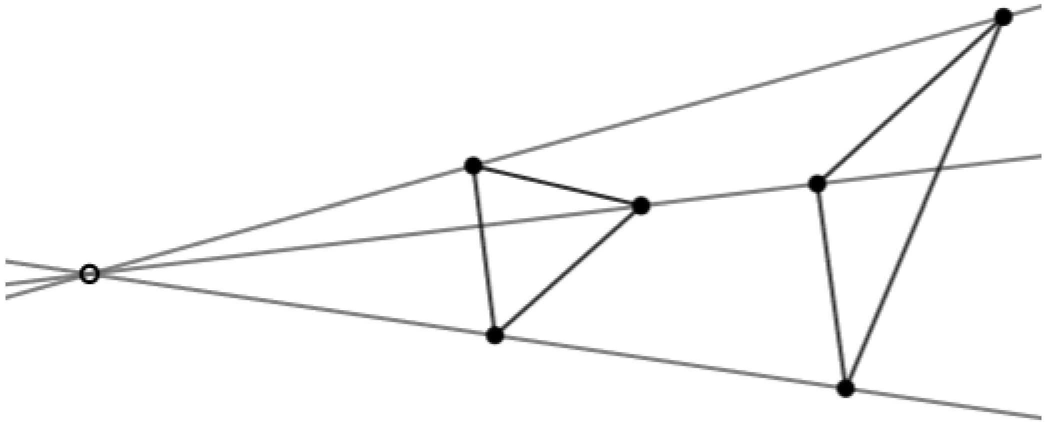
¿Qué nos dice el teorema de Desargues?

Si dos triángulos están en perspectiva, los puntos de intersección de lados correspondientes son colineales; e inversamente, si los lados respectivos de dos triángulos se cortan en tres puntos colineales, entonces los triángulos están en perspectiva.



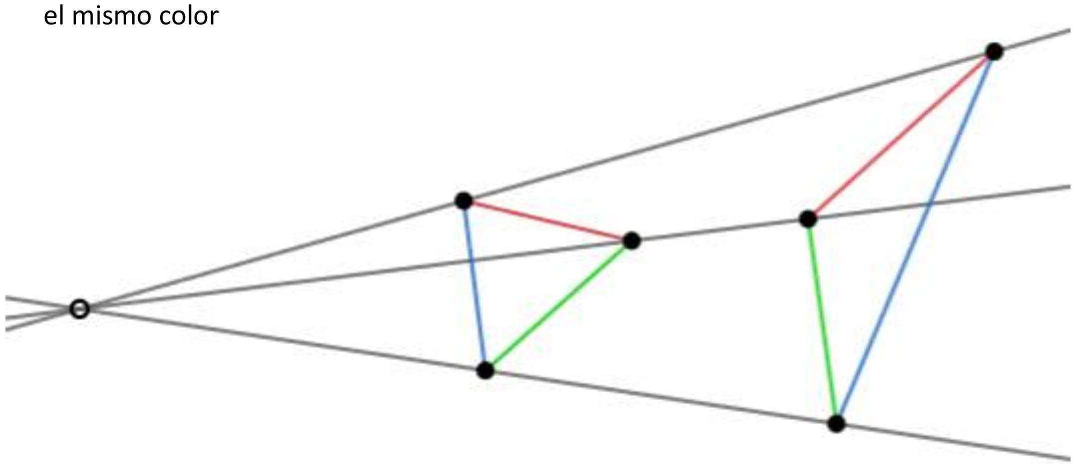
**¿Qué significa que dos triángulos estén en perspectiva?

Se dice que dos triángulos están en perspectiva si sus vértices correspondientes se encuentran sobre rectas concurrentes, como se muestra en la figura, al punto de intersección de dichas rectas se le llama centro de perspectiva



**¿A qué se refiere con lados correspondientes?

Cuando dos triángulos están en perspectiva los lados correspondientes son aquellos que tienen sus extremos sobre las misma rectas; en la figura los lados correspondientes tienen el mismo color



Queremos construir una recta que concurra con a y b ¿Cómo podemos usarlo?

Como queremos tres rectas concurrentes necesitamos triángulos en perspectiva

¿Cuáles triángulos?

Como queremos que las rectas concurrentes sean a, b y la recta por P, que es la que buscamos, entonces los triángulos tienen un vértice en a y otro en b

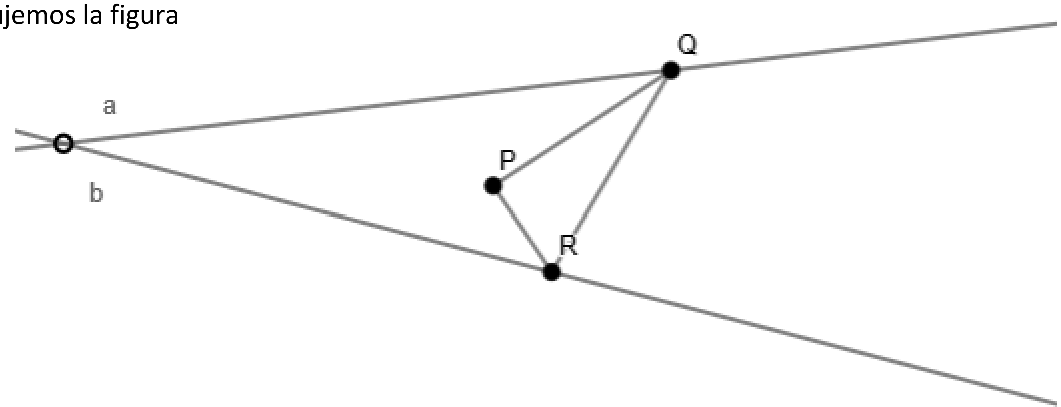
¿Qué más sabemos?¿Cómo podemos garantizar que la otra recta, la que buscamos, pase por P?

Haciendo a P el vértice de uno de los triángulos

Entonces podemos determinar uno de los triángulos ¿Por qué?

Porque sabemos que tiene un vértice en a, otro en b y el tercer vértice es P por lo que podemos simplemente construirlo

Dibujemos la figura



¿Qué necesitamos?

Un triángulo que este en perspectiva con ΔPQR que tenga un vértice en a y otro en b

¿Cómo podemos construirlo?¿Cómo sabemos que dos triángulos están en perspectiva sin usar las rectas concurrentes?

Por el teorema de Desargues sabemos que si los lados respectivos de dos triángulos se cortan en tres puntos colineales, entonces los triángulos están en perspectiva

Entonces, para que dos triángulos estén en perspectiva necesitamos que sus lados se intersequen en tres puntos colineales ¿Cómo lo hacemos?¿Cómo hacemos que las intersecciones de los lados de ΔPQR y el triángulo que estamos buscando sean colineales?

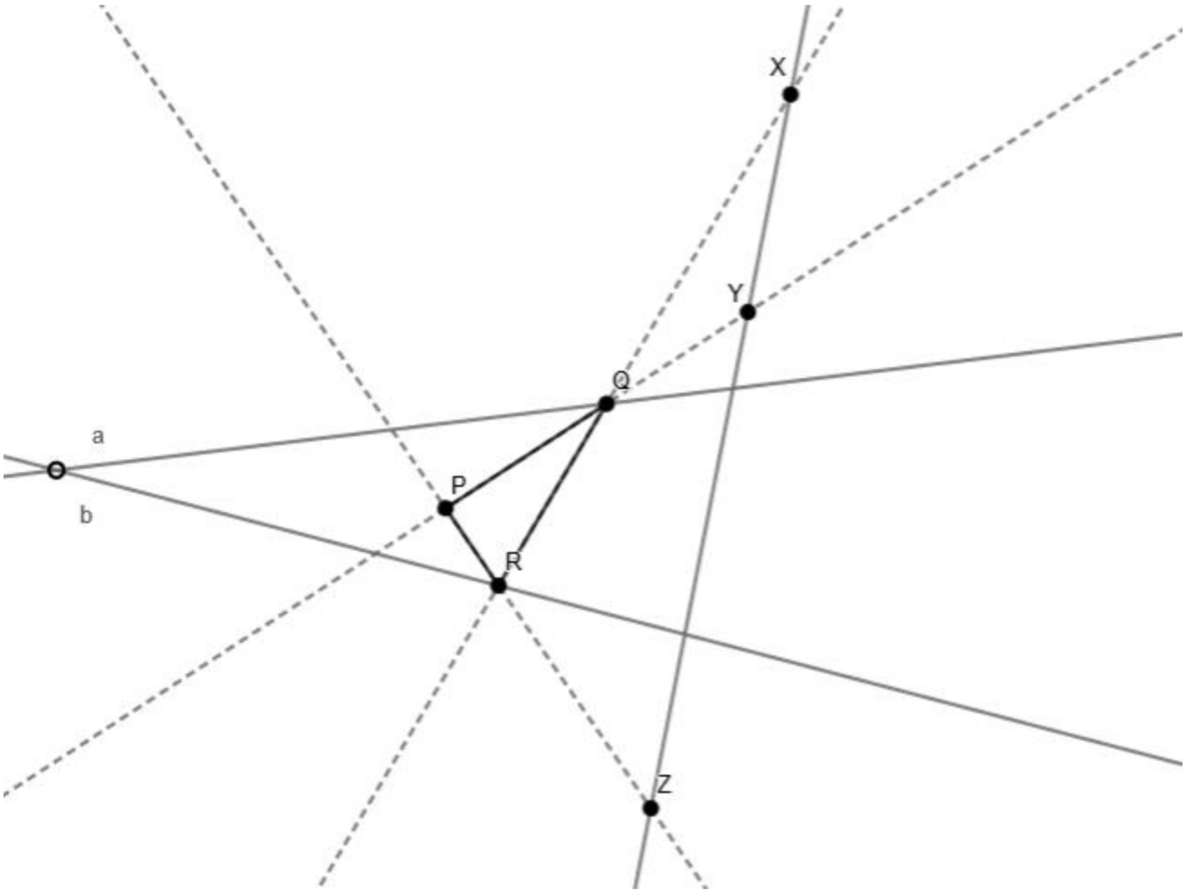
Las construimos colineales

¿Cómo?

Tomamos tres puntos colineales en los lados de ΔPQR y hacemos que sean las intersecciones de los lados

Extendamos los lados de ΔPQR y tracemos una recta que los interseque, las intersecciones son obviamente colineales

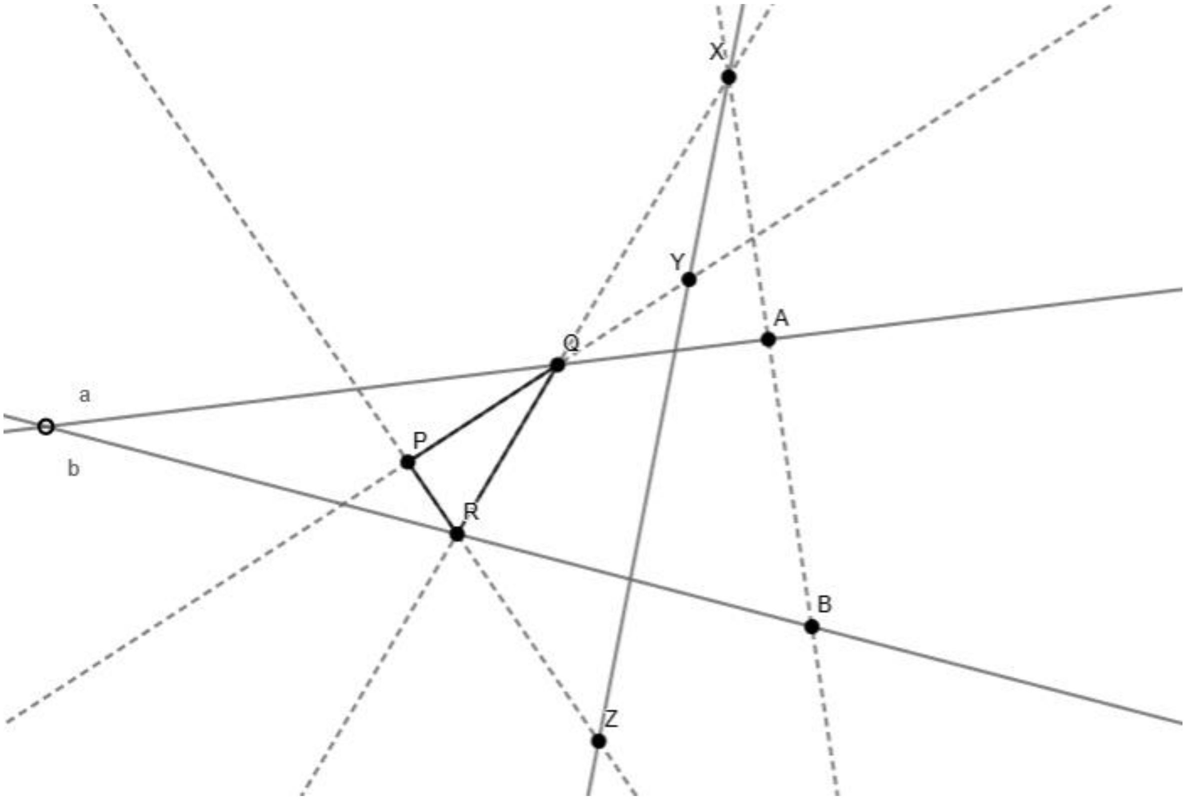
Dibujemos la figura



Queremos que X, Y y Z sean las intersecciones de los lados por lo que los lados del triángulo que buscamos deben pasar por X, Y y Z y además uno de sus vértices debe estar en a y otro en b ¿Es suficiente?¿Cómo lo determinamos?

> Es suficiente; como el triángulo que buscamos está en perspectiva con ΔPQR y sus lados correspondientes se intersecan en X, Y y Z, entonces el lado de éste que tiene vértices en a y b pasa por X

Tracemos una recta por X que corte a a y b

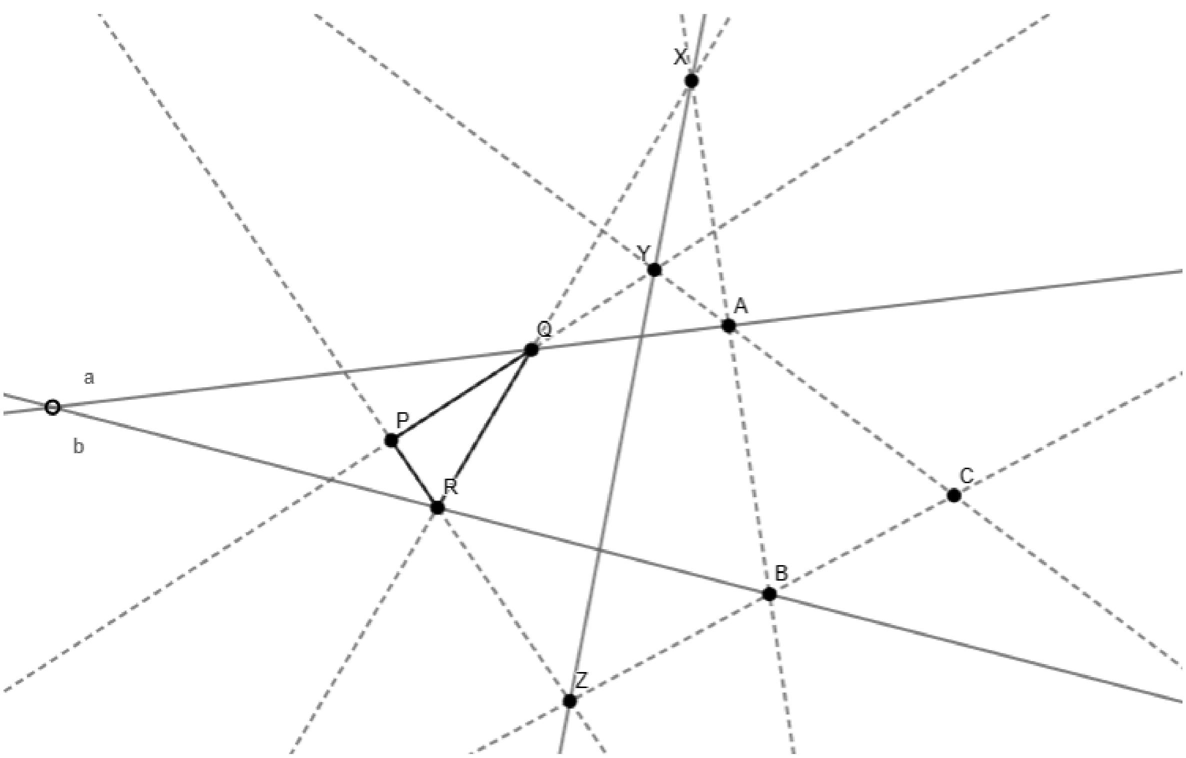


Entonces A y B son dos de los vértices del triángulo que buscamos

¿Cómo determinamos el vértice faltante?

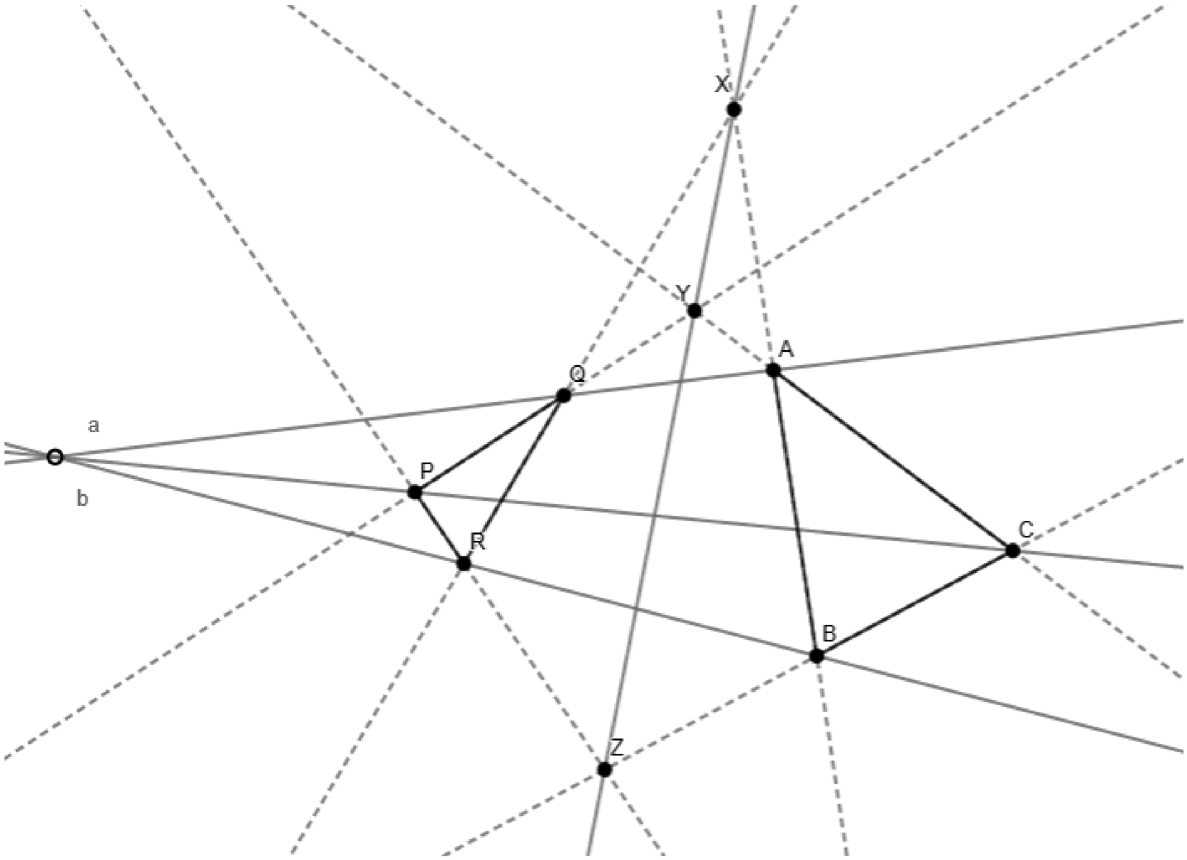
> Simplemente trazamos AY y BZ, para determinar los otros lados del triángulo, y la intersección es el vértice buscado

Tracemos la figura



Así, los triángulos ΔPQR y ΔABC están en perspectiva pues las intersecciones de sus lados correspondientes son colineales y, por el teorema de Desargues, deben estar en perspectiva

Y en consecuencia a, b y PC, las rectas que pasan por sus vértices correspondientes, concurren



Por lo que PC es la recta buscada

De modo que trazamos una recta por P que concurre con las rectas a y b sin usar su punto de intersección y usando solo regla.

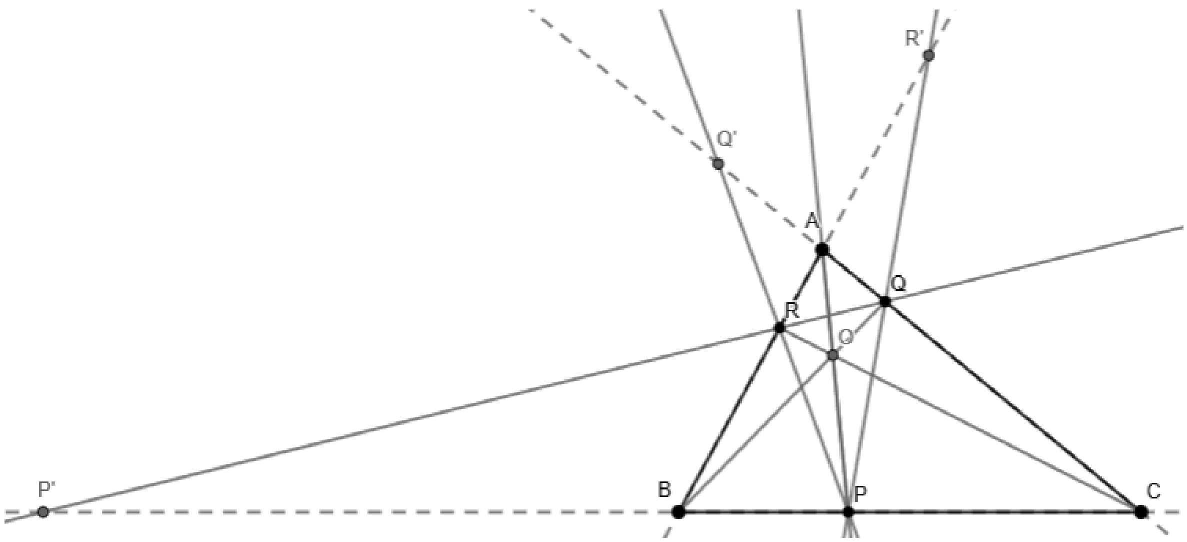
Problema 5

Si P, Q y R son puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC, tales que AP, BQ y CR son concurrentes y si QR, RP y PQ cortan a BC, AC y AB en P’, Q’ y R’ respectivamente, entonces P’, Q’ y R’ son colineales y además AP, BQ’ y CR’ son concurrentes.

¿Qué es lo que tenemos?

> Un triángulo ΔABC y puntos P, Q y R en sus lados tales que las líneas AP, BQ y CR concurren y P’, Q’ y R’ las intersecciones de éstas con BC, AC y AB respectivamente

Dibujemos la figura



¿Qué es lo que queremos demostrar?

> Que P’, Q’ y R’ son colineales y además AP, BQ’ y CR’ son concurrentes

Primero veamos que P’, Q’ y R’ son colineales ¿Cómo lo hacemos?¿Cómo sabemos que tres puntos son colineales?

> Sabemos que las intersecciones de los lados correspondientes de dos triángulos en perspectiva son colineales

¿Podemos usarlo?¿Cómo?

> Necesitamos dos triángulos que estén en perspectiva tales que las intersecciones de sus lados correspondientes sean P’, Q’ y R’

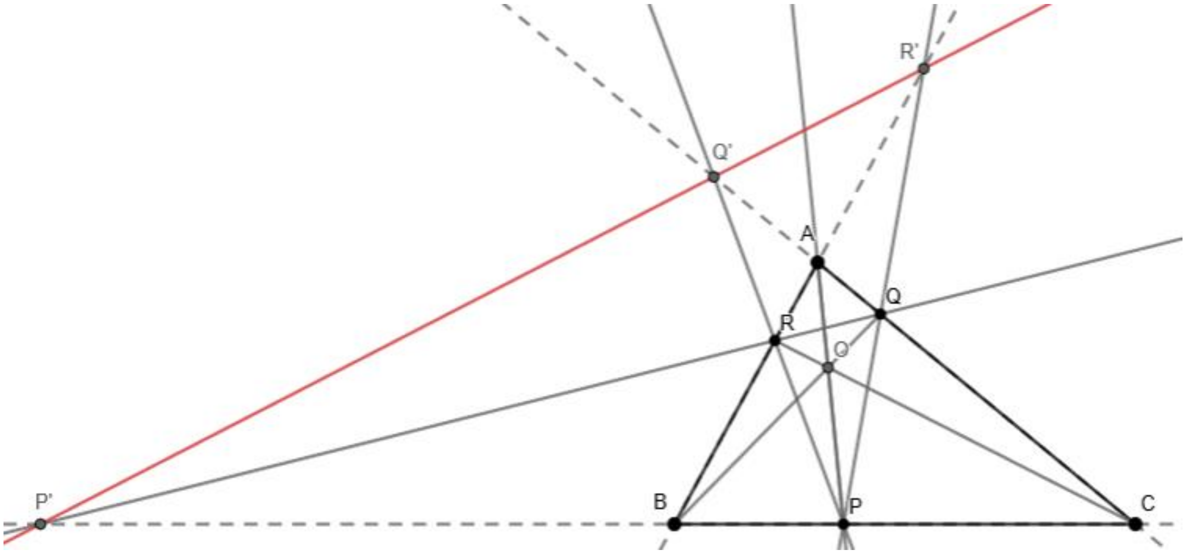
Entonces ¿Cuáles son los triángulos que necesitamos?

> Los triángulos ΔABC y ΔPQR

¿Por qué?

> Sus vértices están sobre las líneas AP, BQ y CR que concurren en el punto O

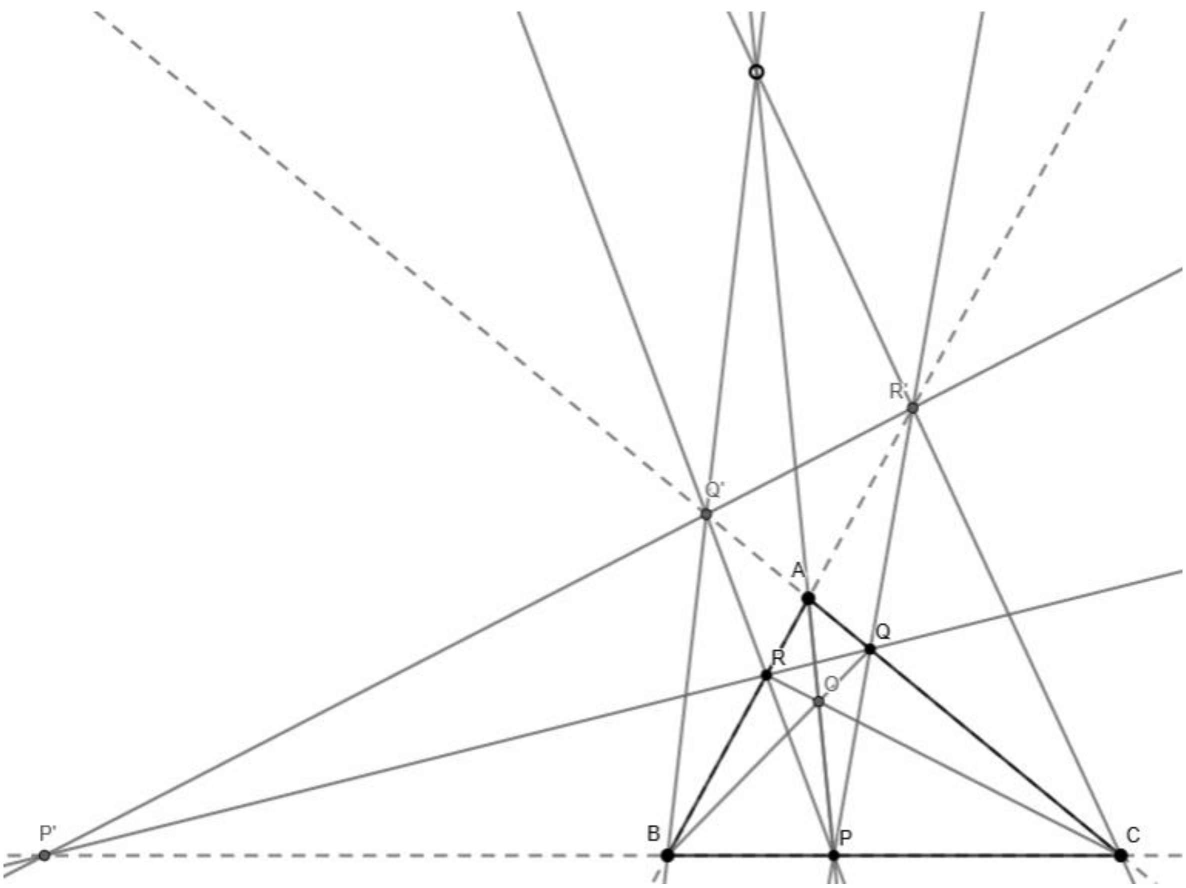
Así ΔABC y ΔPQR están en perspectiva con O como centro de perspectiva por lo que las intersecciones de sus lados correspondientes son colineales, pero dichas intersecciones son P’, Q’ y R’, es decir, P’, Q’ y R’ son colineales



¿Qué nos falta demostrar?

Que AP, BQ’ y CR’ son concurrentes

Dibujemos la figura



¿Cómo lo hacemos?¿Cuándo sabemos que tres rectas son concurrentes?

> Sabemos que si los lados respectivos de dos triángulos se cortan en tres puntos colineales, entonces los triángulos están en perspectiva y los rectas que pasan por vértices correspondientes son concurrentes

¿Podemos usarlo?¿Qué necesitamos?

> Como queremos probar que AP, BQ’ y CR’ son concurrentes los vértices de los triángulos que buscamos están sobre ellas

¿Qué triángulos cumplen esas condiciones?

> Los triángulos ΔABC y ΔPQ’R’

¿Por qué?

> Las intersecciones de sus lados respectivos, P’, R y Q, son colineales por lo que están en perspectiva y en consecuencia las rectas que pasan por vértices correspondientes concurren, es decir, AP, BQ’ y CR’ concurren

Por lo que hemos demostrado que P’, Q’ y R’ son colineales y además AP, BQ’ y CR’ son concurrentes.

Problema 6

Si tres triángulos están en perspectiva por pares y los pares tienen un eje común de perspectiva, entonces los centros de perspectiva son colineales.

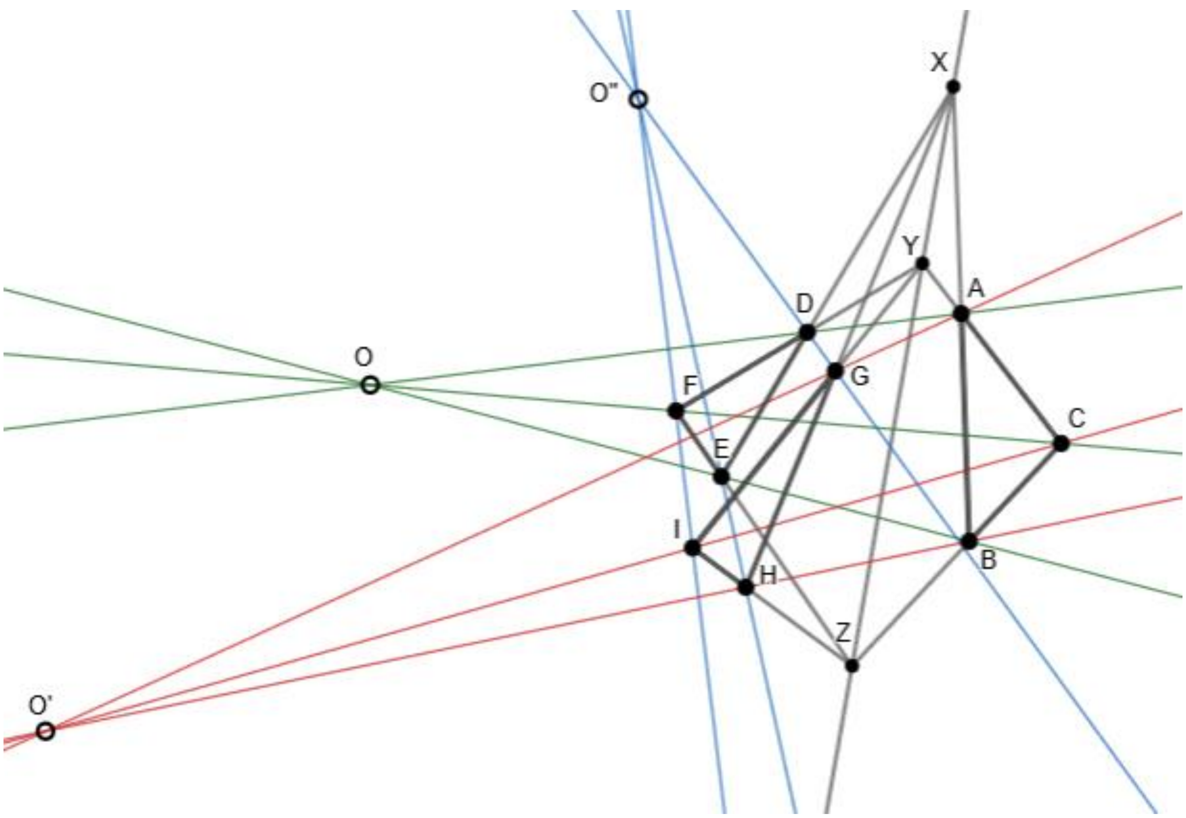
**¿Cuál es el eje de perspectiva?

> Si dos triángulos están en perspectiva, los puntos de intersección de lados correspondientes son colineales; la línea que determinan estas intersecciones se llama eje de perspectiva

¿Qué es lo que tenemos?

> Tres triángulos en perspectiva por pares, es decir, si consideramos cualesquiera dos están en perspectiva; y además el eje de perspectiva es el mismo

Dibujemos la figura



> De la figura los triángulos ΔABC, ΔDEF y ΔGHI están en perspectiva por pares con XYZ como eje de perspectiva común y O, O’ y O” son los centros de perspectiva

¿Qué es lo que queremos demostrar?

> Que los centros de perspectiva son colineales, es decir, O, O’ y O” son colineales

¿Cómo lo hacemos?¿Cuándo sabemos que tres puntos son colineales?

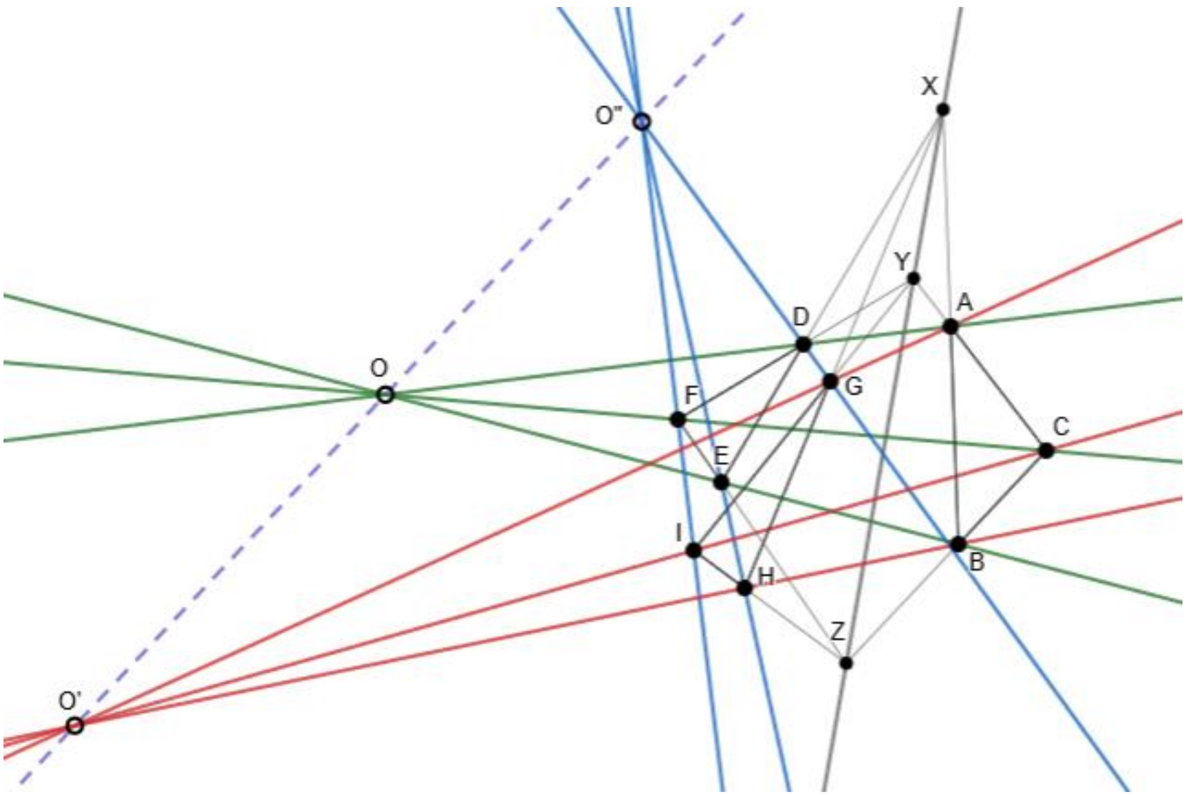
Tres puntos son colineales si son las intersecciones de los lados correspondientes de triángulos en perspectiva, por Desargues

¿Podemos usarlo?¿Qué necesitamos?

Necesitamos encontrar dos triángulos en perspectiva tal que OO’O” sea su eje de perspectiva

Entonces sus lados deben estar sobre las rectas que pasan por O, O’ y O”

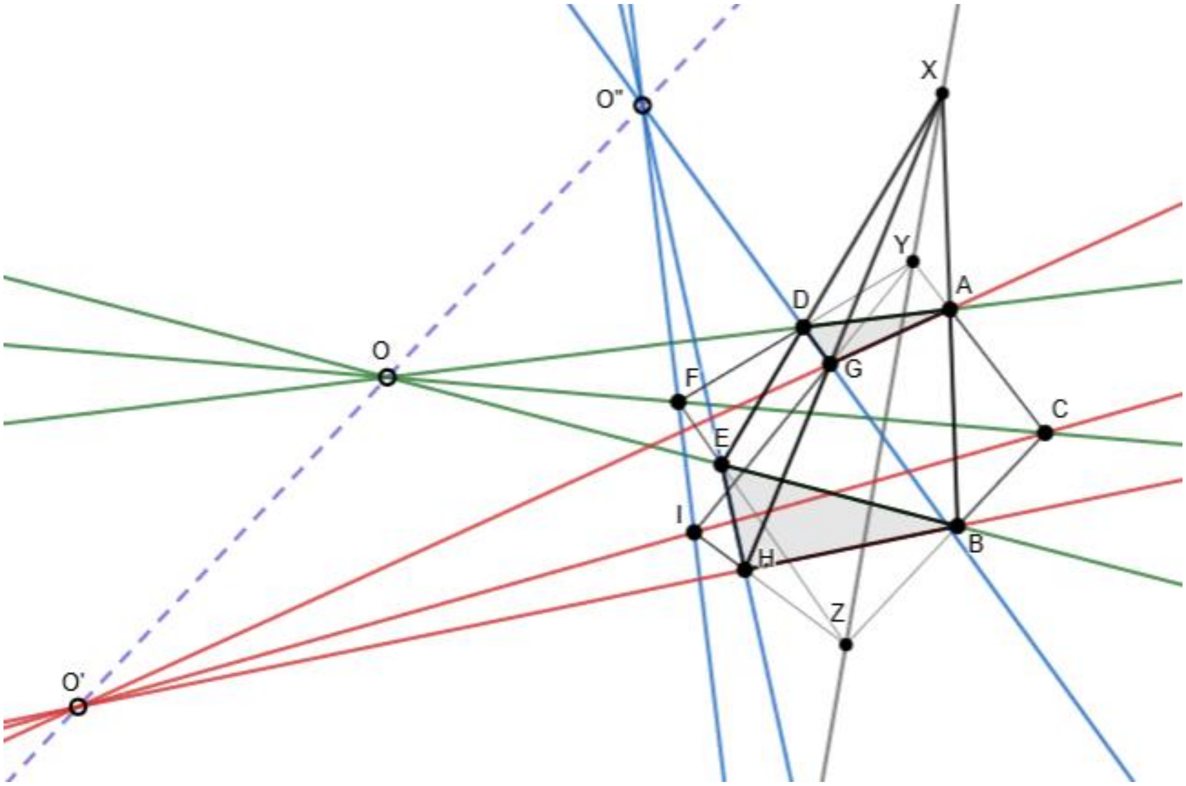
Observemos la figura



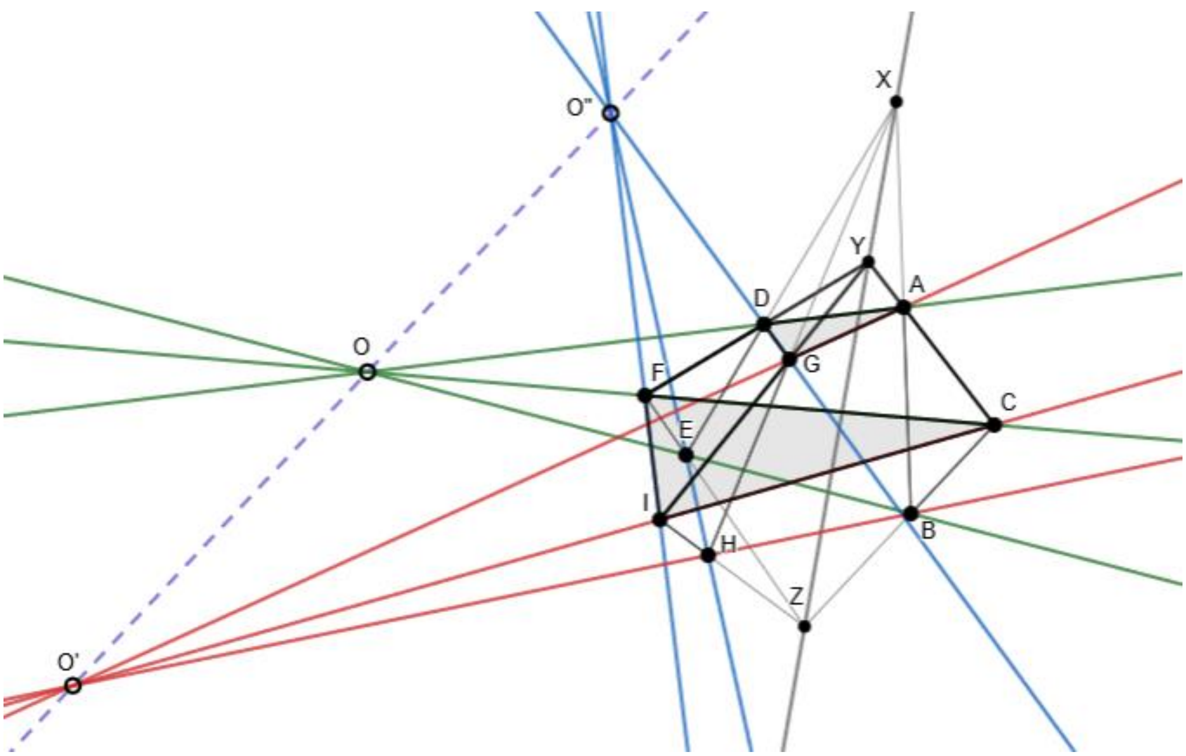
¿Qué triángulos cumplen las condiciones?

Hay varios pares de triángulos que cumplen las condiciones

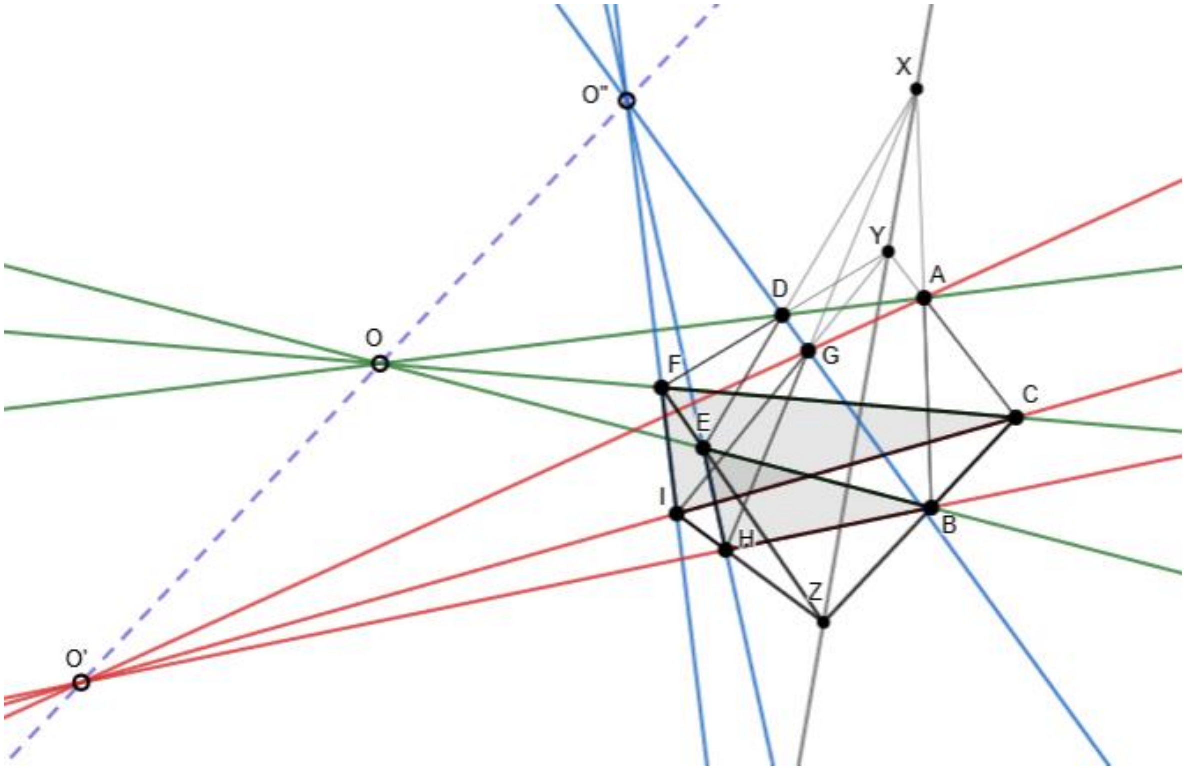
Los triángulos ΔADG y ΔBEH con X como su centro de perspectiva



Los triángulos ΔADG y ΔCFI con Y como su centro de perspectiva



Y ΔCFI y ΔBEH con Z como su centro de perspectiva



Por lo que considerando cualquiera de los pares de triángulos que acabamos de mencionar, las intersecciones de sus lados correspondientes son colineales por estar en perspectiva pero dichas intersecciones son O, O' y O"

Así, O, O' y O" son colineales que es lo que se quería demostrar.

Hileras y haces armónicos

Problema 1:

Sean A, B y C tres puntos colineales. Demostrar que el conjugado armónico de C con respecto a A y B, puede ser localizado como sigue: trazamos un triángulo tal que uno de sus lados sea AB, digamos PAB, tomamos puntos N y M en PA y PB respectivamente tales que BM y CN concurran con PC y finalmente trazamos MN y la intersección de ésta con AB, D, es el conjugado armónico de C respecto a A y B.

¿Qué nos pide el problema?

Demostrar que el método descrito es correcto

¿Qué es lo que tenemos?

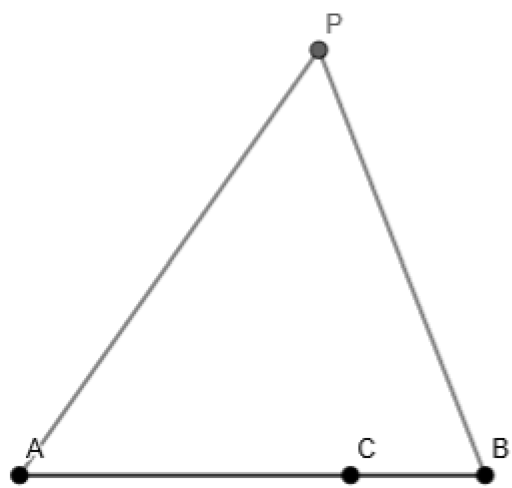
Tenemos A, B y C puntos colineales

¿Qué es lo que queremos demostrar?

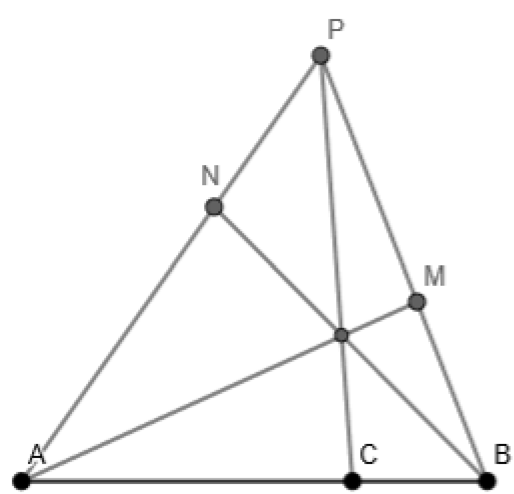
Que el punto D es el conjugado armónico de C respecto a A y B

Hagamos la construcción que describe

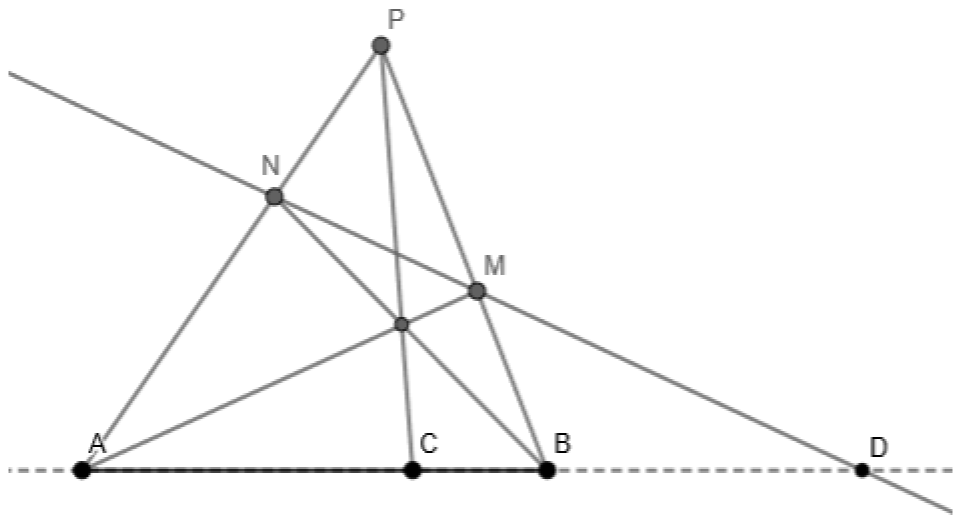
Tracemos el triángulo PAB



Tomemos puntos N y M en PA y PB respectivamente tales que BM y CN concurran con PC



Tracemos MN y sea D el punto de intersección de ésta con AB



Queremos mostrar que D es el conjugado armónico de C respecto a A y B

Entonces queremos probar que $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$ ¿Cómo lo hacemos?¿Qué es lo que si sabemos?

> Sabemos que PC, AM y BN son concurrentes y además MN es un recta trasversal al triángulo

Como PC, AM y BN son concurrentes, aplicando Ceva, tenemos que

$$\frac{PN}{NA} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BM}{MP} = 1$$

Y como MN es una transversal al triángulo PAB, aplicando Menelao, tenemos que

$$\frac{PN}{NA} \cdot \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BM}{MP} = -1$$

Y al igualar ambas tenemos que

$$\frac{PN}{NA} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BM}{MP} = -\frac{PN}{NA} \cdot \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BM}{MP}$$

De donde obtenemos que

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

Por lo que D es el conjugados armónico de C respecto a A y B

Que es lo que se quería demostrar.

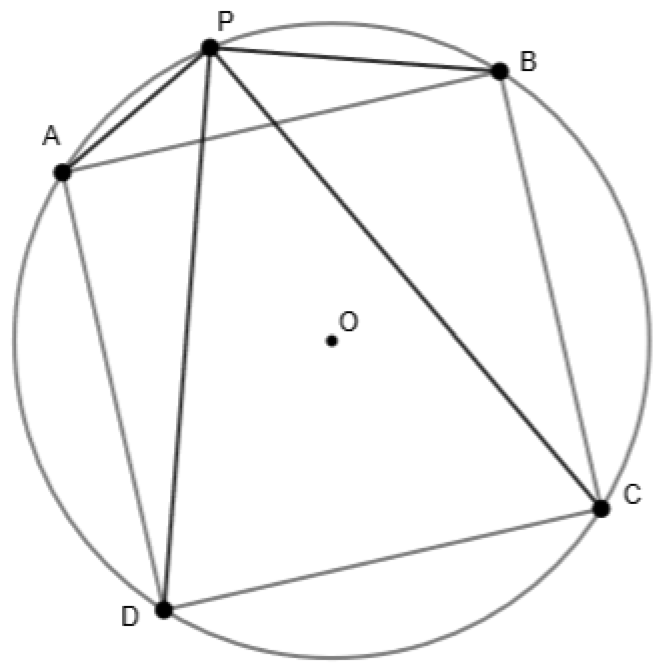
Problema 2

Las líneas que unen cualquier punto de una circunferencia a los vértices de un cuadrado inscrito, forman un haz armónico.

¿Qué es lo que tenemos?

> Una circunferencia, un cuadrado inscrito y las líneas que unen a un punto cualquiera en ella con los vértices del cuadrado

Dibujemos la figura



¿Qué es lo que queremos demostrar?

> Que PA, PB, PC y PD forman un haz armónico, es decir P{ACBD}=-1

Entonces queremos probar que

$$\frac{\sin(APB)}{\sin(BPC)} = -\frac{\sin(APD)}{\sin(DPC)}$$

¿Cómo lo hacemos?¿Qué es lo que sabemos de esos ángulos?

> Son ángulos inscritos en una circunferencia por lo que son igual a la mitad de sus ángulos centrales correspondientes

¿Nos sirve de algo?¿Qué sabemos de sus ángulos centrales?

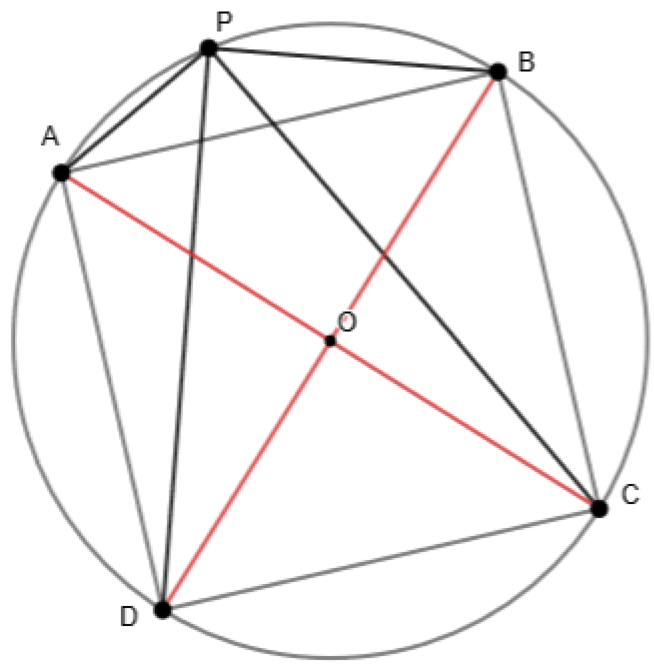
> Sabemos que las diagonales de ABCD determinan los ángulos centrales

¿Por qué? ¿Cómo sabemos eso?

> Pues como ABCD es un cuadrado, todos sus lados son iguales y sus diagonales son iguales; además, por ser paralelogramo, sus diagonales se cruzan en su punto medio, de modo que

el punto de intersección de sus diagonales equidista de todos sus vértices, es decir, es el centro de la circunferencia en la que está inscrito

Dibujemos la figura



¿Qué podemos decir ahora de los ángulos centrales?

Que <AOD=<DOC=<COB, esto pues ΔAOD≡ΔDOC≡ΔCOB ya que todos sus lados son iguales

Así <APD=<DPC=<CPB pues sus ángulos centrales correspondientes son iguales

Además <APB=<APC+<CPB pero AC es diámetro, por lo que el ángulo central de <APC es 180° y por ende <APC=90°, entonces <APB=90°+<CPB

Entonces tenemos que

$$\frac{\sin(APB)}{\sin(BPC)} = \frac{\sin(APC + CPB)}{\sin(-CPB)} = -\frac{\sin(90° + CPB)}{\sin(CPB)} = -\frac{\sin(CPB)}{\sin(CPB)} = -1$$

Y que

$$\frac{\sin(APD)}{\sin(DPC)} = 1$$

Y en consecuencia

$$\frac{\sin(APB)}{\sin(BPC)} = -\frac{\sin(APD)}{\sin(DPC)}$$

Que es lo que queríamos demostrar.

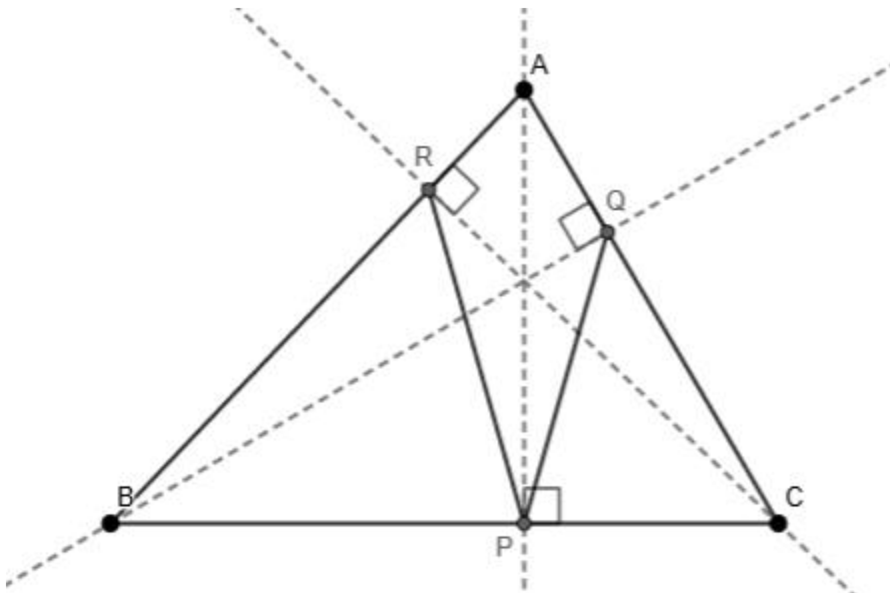
Problema 3

Si AP, BQ y CR son las alturas de un triángulo ABC, el haz P{QRAB} es armónico.

¿Qué es lo que tenemos?

Un triángulo, sus alturas y los pies de sus alturas

Dibujemos la figura



¿Qué es lo que queremos demostrar?

Que P{QRAB}=-1

Entonces queremos probar que

$$\frac{\sin(QPA)}{\sin(APR)} = -\frac{\sin(QPB)}{\sin(BPR)}$$

¿Cómo lo hacemos?¿Qué es lo que si sabemos?

Sabemos que P, Q y R son los pies de las alturas, es decir, son los vértices del triángulo pedal de las alturas

¿Hay alguna relación con las alturas?

Sabemos que las alturas de un triángulo son las bisectrices de su triángulo pedal correspondiente, por lo que AP biseca a <QPR

Entonces <QPA=<APR=α

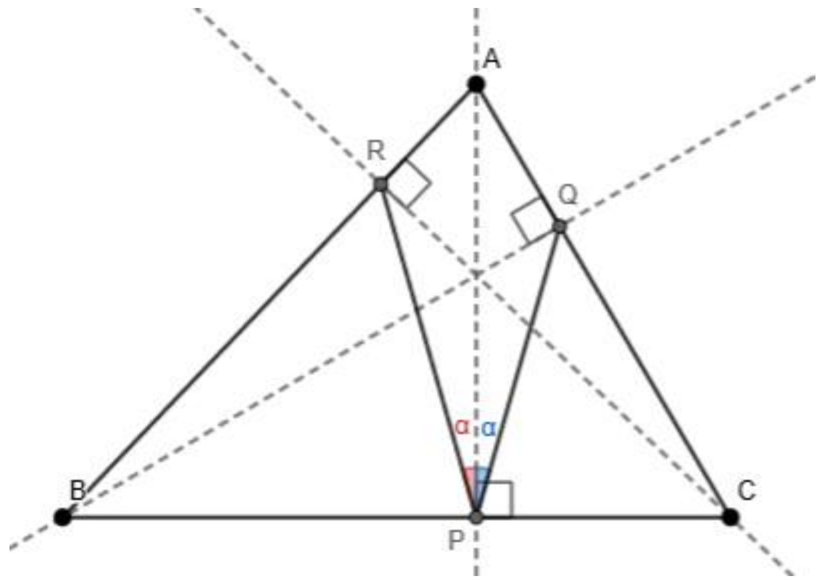
De modo que tenemos que

$$\frac{\sin(QPA)}{\sin(APR)} = 1$$

Por lo que basta probar que

$$\frac{\sin(QPB)}{\sin(BPR)} = -1$$

¿Cómo lo hacemos? Observemos la figura



¿Qué sabemos de <QPB y <BPR?

> <QPB= α +<APB y <BPR=<BPA+ α, pero como AD es perpendicular a BC y, entonces <QPB=α+90° y <BPR= -90°+α

Entonces

$$\frac{\sin(QPB)}{\sin(BPR)} = \frac{\sin(\alpha + 90°)}{\sin(\alpha - 90°)} = \frac{\sin(\alpha)}{-\sin(\alpha)} = -1$$

Así, obtenemos

$$\frac{\sin(QPA)}{\sin(APR)} = -\frac{\sin(QPB)}{\sin(BPR)}$$

Que es lo que se quería demostrar.

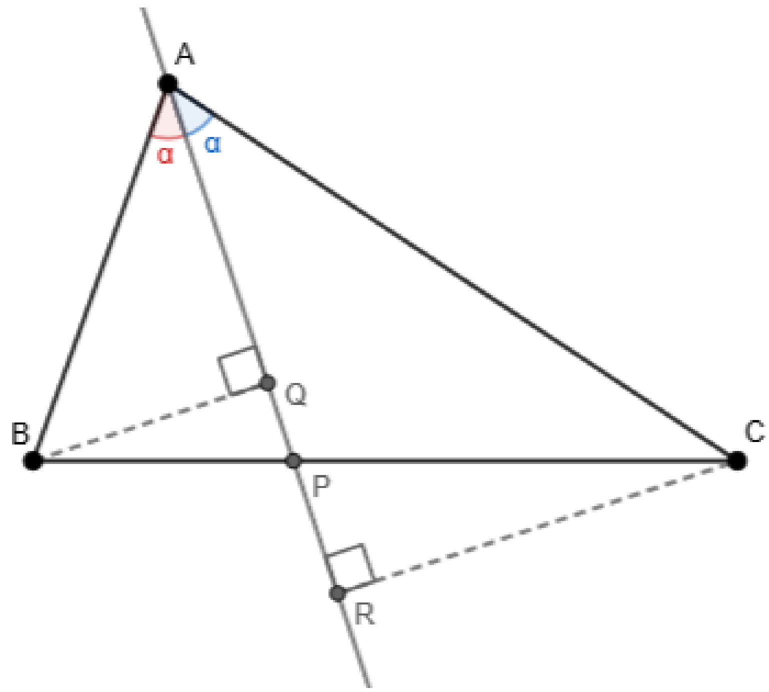
Problema 4

La bisectriz del ángulo en A del triángulo ABC corta al lado opuesto en P. Sean Q y R los pies de las perpendiculares desde B y C sobre AP. Demostrar que los cuatro puntos A, P, Q y R son armónicos.

¿Qué es lo que tenemos?

Un triángulo ABC, la bisectriz de su ángulo en A y las perpendiculares a ésta por B y C

Dibujemos la figura



¿Qué es lo que queremos demostrar?

Qué {APQR}=-1, es decir, queremos probar que $\frac{AQ}{QP} = -\frac{AR}{RP}$

¿Qué es lo que sabemos?¿Cuáles son los datos?

Como AP es la bisectriz de <BAC entonces <ABP=<PAC y BQ y CR son perpendiculares a AP

Tenemos ángulos y necesitamos relacionar segmentos de recta ¿Cómo lo hacemos?

Semejanza de triángulos

¿Qué triángulos?

Como necesitamos ver que $\frac{AQ}{QP} = -\frac{AR}{RP}$, los triángulos deben tener a alguno de esos segmentos como uno de sus lados

Notemos los triángulos ΔABQ y ΔACR, y los triángulos ΔBQP y ΔCRP

Tenemos que ΔABQ≈ΔACR pues <BAQ=<CAR=α y <AQB=<ARC=90° y en consecuencia <QBA=<RCA

Obteniendo, por la correspondencia de sus lados, que

$$\left|\frac{AB}{AC}\right| = \left|\frac{AQ}{AR}\right| = \left|\frac{BQ}{CR}\right|$$

Y, de forma similar, ΔBQP≈ΔCRP pues <QPB=<CPR, por ser opuestos por el vértice, y <BQP=<CRP=90° y en consecuencia <PBQ=<PCR

Obteniendo, de la correspondencia de sus lados, que

$$\left|\frac{BQ}{CR}\right| = \left|\frac{QP}{RP}\right| = \left|\frac{BP}{CP}\right|$$

Así, tenemos que

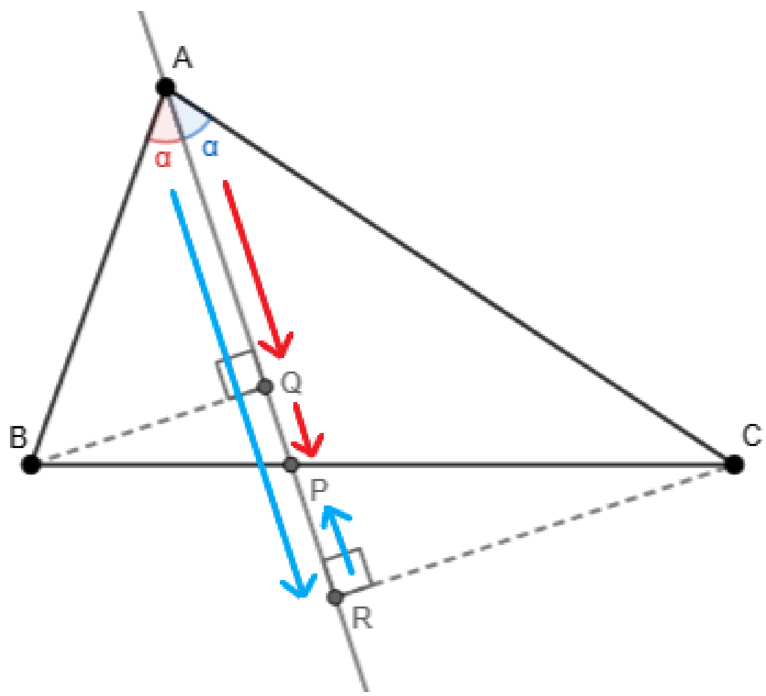
$$\left|\frac{AQ}{AR}\right| = \left|\frac{BQ}{CR}\right| = \left|\frac{QP}{RP}\right|$$

De donde obtenemos

$$\left|\frac{AQ}{QP}\right| = \left|\frac{AR}{RP}\right|$$

Note que usamos valores absolutos pues estamos hablando de segmentos dirigidos

Ahora para determinar los signos de las razones, apoyémonos en la figura



Observemos que AQ y QP tiene la misma dirección mientras que AR y RP tienen direcciones opuestas, por lo que $\frac{AQ}{QP}$ y $\frac{AR}{RP}$ tienen signos opuestos pues P está entre Q y R

Pero ¿Siempre pasa esto?¿Por qué P tiene que estar entre Q y R?

> Porque BQ‖RC pues ambas son perpendiculares a la bisectriz del ángulo en A y P está en el lado BC pero además el lado BC se encuentra entre BQ y RC, es una trasversal, por lo que, como P está en BC, P está entre BQ y CR, es decir, P está entre Q y R.

Así, tenemos que

$$\frac{AQ}{QP} = -\frac{AR}{RP}$$

Que es lo que se debía demostrar.

*Es importante mencionar que en el caso de que la bisectriz del ángulo en A sería perpendicular a BC se tendría que Q=R=P, en cuyo caso no tiene sentido hablar de hileras armónicas.

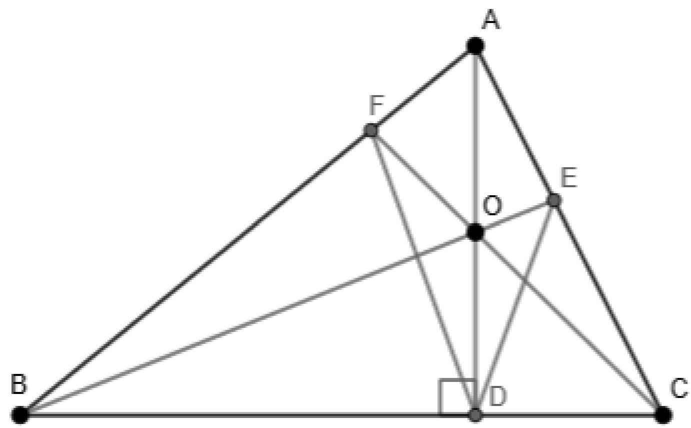
Problema 5

Sea O un punto cualquiera en la altura AD del triángulo ABC. Las rectas BO y CO intersecan a AC y AB en E y F respectivamente. Probar que el ángulo <EDF es bisecado por AD.

¿Qué es lo que tenemos?

Un triángulo ABC, AD una de sus alturas, O un punto en ella y las líneas BO y CO

Dibujemos la figura



¿Qué es lo que debemos probar?

Que <EDA=<ADF

¿Cómo lo hacemos?¿Qué es lo que sabemos?

Sabemos que AD es perpendicular a BC

¿Cómo lo usamos?¿Cómo lo relacionamos con que AD sea la bisectriz?

Sabemos que si en un haz armónico un par de líneas conjugadas es perpendicular, entonces esas líneas bisecan a los ángulos formados por las otras dos

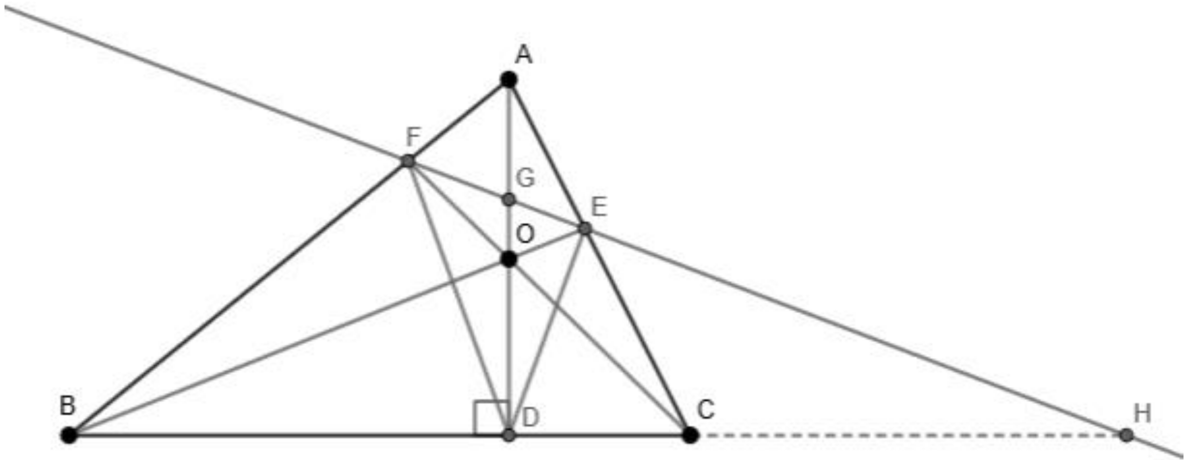
Entonces, bastaría mostrar que DF, DA, DE y DC forman un haz armónico ¿Cómo lo hacemos?¿Cómo sabemos que un haz es armónico?

Si un haz de cuatro líneas es cortado por una transversal en una hilera armónica de puntos, el haz es armónico

Necesitamos una transversal a DF, DA, DE y DC ¿Qué transversal? Necesitamos ver que forme una hilera armónica ¿Cuál nos conviene?

La línea que pasa por E y F

Dibujemos la figura



Queremos ver que F, E, G y H forman una hilera armónica ¿Cómo?¿Qué es lo que si sabemos?

Sabemos que B, C, D y H forman una hilera armónica por la construcción

¿Y eso de que nos sirve?¿Cómo lo usamos?

Si consideramos el haz AB, AC, AD y AH, como la hilera B, C, D y H es armónica, es un haz armónico y F, E, G y H son una hilera en dicho haz

De modo que F, E, G y H forman una hilera armónica

Pero F, E, G y H son, a su vez, una hilera del haz D{FEGH} por lo que es un haz armónico

Y como DA y DH son líneas armónicas conjugadas y además son perpendiculares, entonces bisecan a los ángulos que forman las otras dos

Así AD biseca a <EDF.

Problema 6

Demuestre que si tres puntos X, Y y Z están en los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC y X', Y' y Z' son sus conjugados armónicos respecto a los vértices C, A y B del triángulo, las rectas AX', BY' y CZ' son concurrentes si y sólo si X, Y y Z son colineales.

¿Qué es lo que tenemos?

> Un triángulo ABC, X, Y y Z puntos en los lados BC, CA y AB, y X', Y' y Z' son sus conjugados armónicos respecto a los vértices

¿Qué nos pide el problema?

Es una doble implicación, nos pide demostrar dos cosas:

1. Si las rectas AX', BY' y CZ' son concurrentes entonces X, Y y Z son colineales
2. Si X, Y y Z son colineales entonces las rectas AX', BY' y CZ' son concurrentes

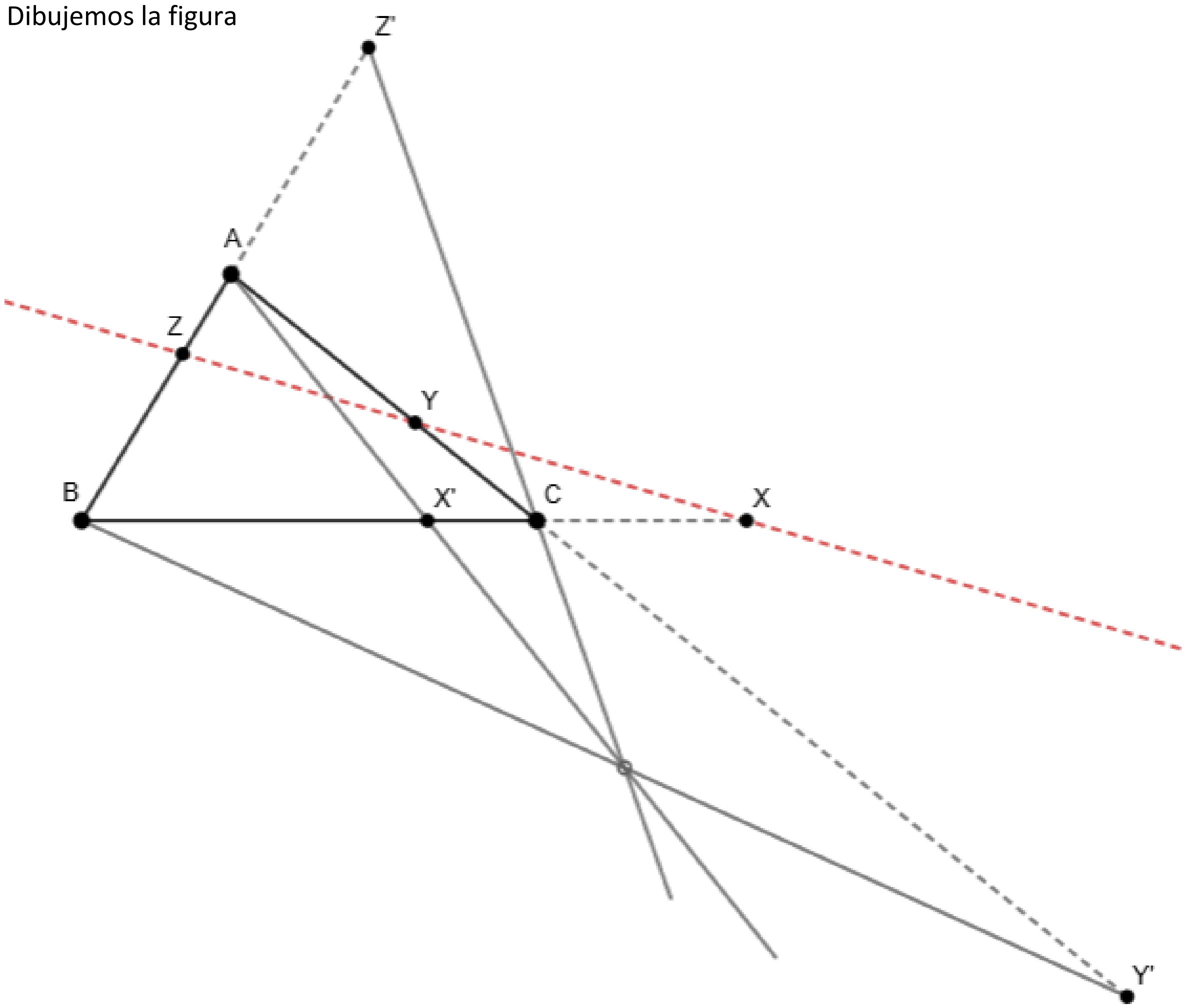
Procedamos de forma separada

I. Para el enunciado 1. Si las rectas AX', BY' y CZ' son concurrentes entonces X, Y y Z son colineales

¿Cuál es nuestra hipótesis?

> Las rectas AX', BY' y CZ' son concurrentes

Dibujemos la figura



¿Qué es lo que queremos demostrar?

Que X, Y y Z son colineales

¿Cómo sabemos que tres puntos son colineales?

Si tres puntos en los lados de un triángulo cumplen la relación del teorema de Menelao, entonces son colineales (recíproco del teorema de Menelao)

Entonces para que X, Y y Z sean colineales ¿Qué necesitamos probar?

Que $\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=-1$

¿Cómo lo hacemos?¿Qué es lo que si sabemos?

Que X', Y' y Z' son los conjugados armónicos de X, Y y Z respectivamente y que AX', BY' y CZ' son concurrentes

Entonces tenemos que A, B, Z' y Z ; B, C, X' y X ; y C, A, Y' y Y son hileras armónicas, de donde obtenemos

$$\frac{AZ}{ZB}=-\frac{AZ'}{Z'B} \quad \leftrightarrow \quad \frac{AZ'}{Z'B}=-\frac{AZ}{ZB}$$
$$\frac{BX}{XC}=-\frac{BX'}{X'C} \quad \leftrightarrow \quad \frac{BX'}{X'C}=-\frac{BX}{XC}$$
$$\frac{CY}{YA}=-\frac{CY'}{Y'A} \quad \leftrightarrow \quad \frac{CY'}{Y'A}=-\frac{CY}{YA}$$

Y además como AX', BY' y CZ' son concurrentes, por Ceva, tenemos

$$\frac{AZ'}{Z'B}\cdot\frac{BX'}{X'C}\cdot\frac{CY'}{Y'A}=1$$

Y al sustituir las igualdades anteriores en esta última obtenemos

$$\frac{AZ'}{Z'B}\cdot\frac{BX'}{X'C}\cdot\frac{CY'}{Y'A}=\left(-\frac{AZ}{ZB}\right)\cdot\left(-\frac{BX}{XC}\right)\cdot\left(-\frac{CY}{YA}\right)=-\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$$

Es decir

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=-1$$

Así, por el recíproco del teorema de Menelao, X, Y y Z son colineales

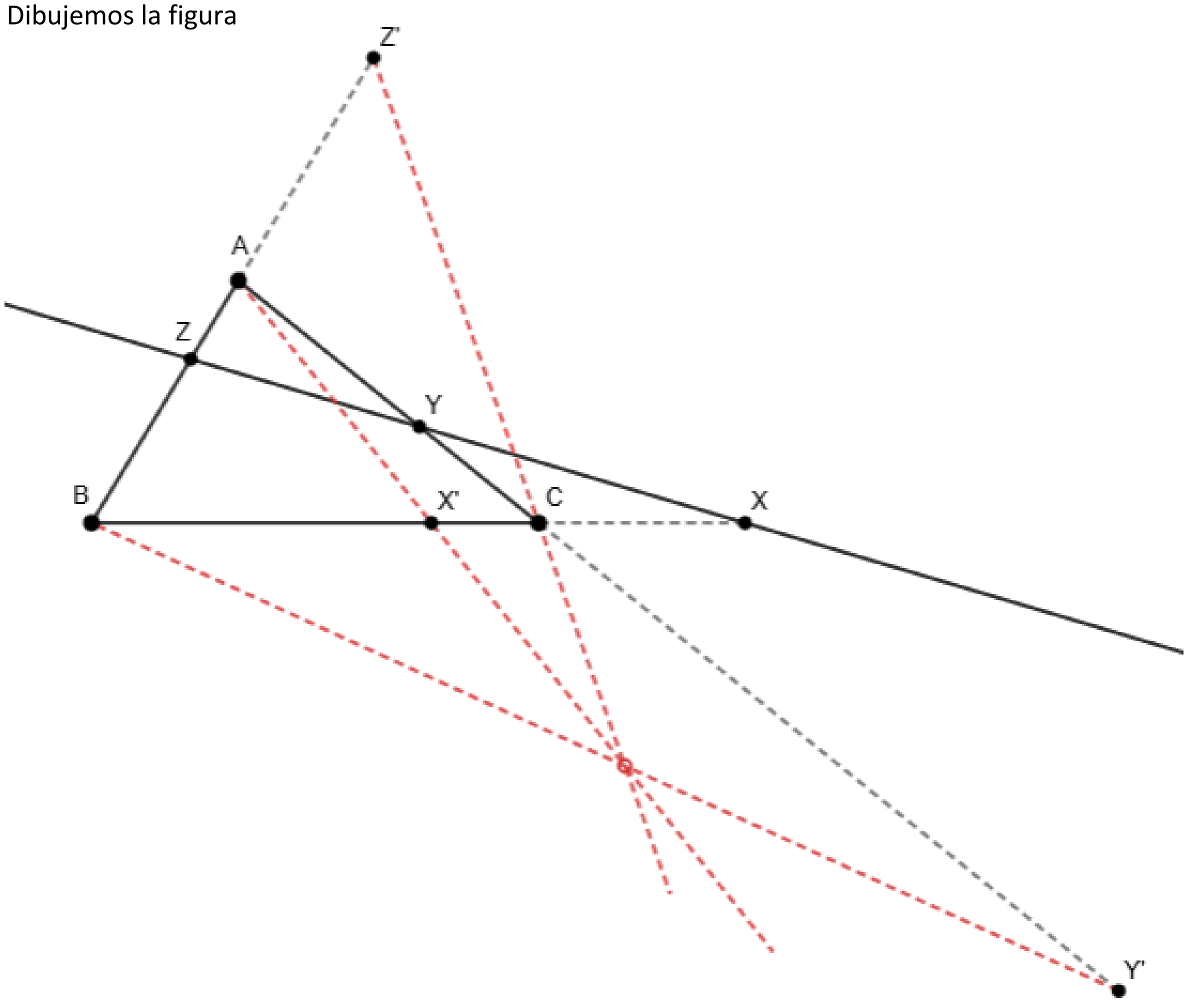
Que es lo que se quería demostrar.

II. Para el enunciado 2. Si X, Y y Z son colineales entonces las rectas AX', BY' y CZ' son concurrentes

¿Cuál es nuestra hipótesis?

Los puntos X, Y y Z son colineales

Dibujemos la figura



¿Qué es lo que queremos demostrar?

Que AX', BY' y CZ' son concurrentes

¿Cómo sabemos que tres rectas son concurrentes?

Como en este caso pasan por los vértices A, B y C de un triángulo entonces si sus intersecciones con los lados del triángulo cumplen la relación del teorema de Ceva, son concurrentes (recíproco del teorema de Ceva)

Entonces para que AX', BY' y CZ' sean concurrentes ¿Qué necesitamos probar?

Que $\frac{AZ\prime}{Z\prime B}\cdot\frac{BX\prime}{X\prime C}\cdot\frac{CY\prime}{Y\prime A}=1$

¿Cómo lo hacemos?¿Qué es lo que si sabemos?

Que X', Y' y Z' son los conjugados armónicos de X, Y y Z respectivamente y que los puntos X, Y y Z son colineales

Entonces tenemos que A, B, Z’ y Z ; B, C, X’ y X ; y C, A, Y’ y Y son hileras armónicas, de donde obtenemos

$$\frac{AZ}{ZB}=-\frac{AZ'}{Z'B} \quad \leftrightarrow \quad \frac{AZ'}{Z'B}=-\frac{AZ}{ZB}$$

$$\frac{BX}{XC}=-\frac{BX'}{X'C} \quad \leftrightarrow \quad \frac{BX'}{X'C}=-\frac{BX}{XC}$$

$$\frac{CY}{YA}=-\frac{CY'}{Y'A} \quad \leftrightarrow \quad \frac{CY'}{Y'A}=-\frac{CY}{YA}$$

Y además como X, Y y Z son colineales, por Menelao, tenemos

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=-1$$

Y al sustituir las igualdades anteriores en esta última obtenemos

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=\left(-\frac{AZ'}{Z'B}\right)\cdot\left(-\frac{BX'}{X'C}\right)\cdot\left(-\frac{CY'}{Y'A}\right)=-\frac{AZ'}{Z'B}\cdot\frac{BX'}{X'C}\cdot\frac{CY'}{Y'A}=1$$

Es decir

$$\frac{AZ'}{Z'B}\cdot\frac{BX'}{X'C}\cdot\frac{CY'}{Y'A}=1$$

Así, por el recíproco del teorema de Ceva, AX’, BY’ y CZ’ son concurrentes

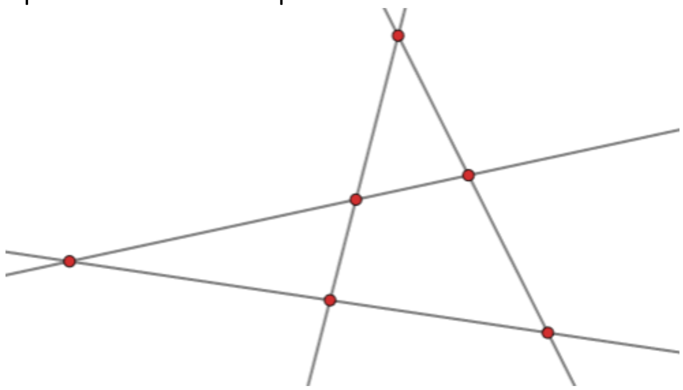
Que es lo que se quería demostrar.

Problema 7

Construya un cuadrilátero completo que tenga un triángulo diagonal dado.

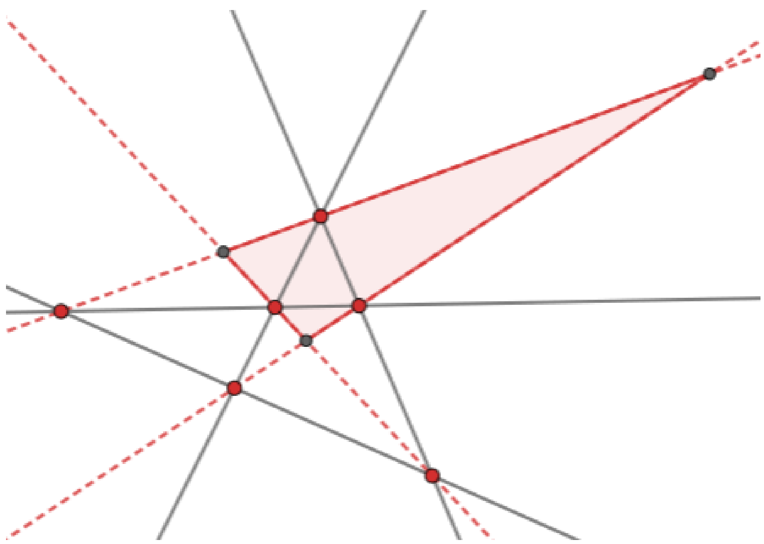
**¿Qué es un cuadrilátero completo?

Es la figura que consiste de cuatro líneas, ninguna terna de ellas concurrente, y los seis puntos en los que se interseca cada par de rectas



**¿Cuál es el triángulo diagonal de un cuadrilátero completo?

Es el triángulo cuyos lados unen vértices opuestos del cuadrilátero completo, dos vértices de un cuadrilátero completo son opuestos si ninguna de las cuatro líneas que definen al cuadrilátero los unen



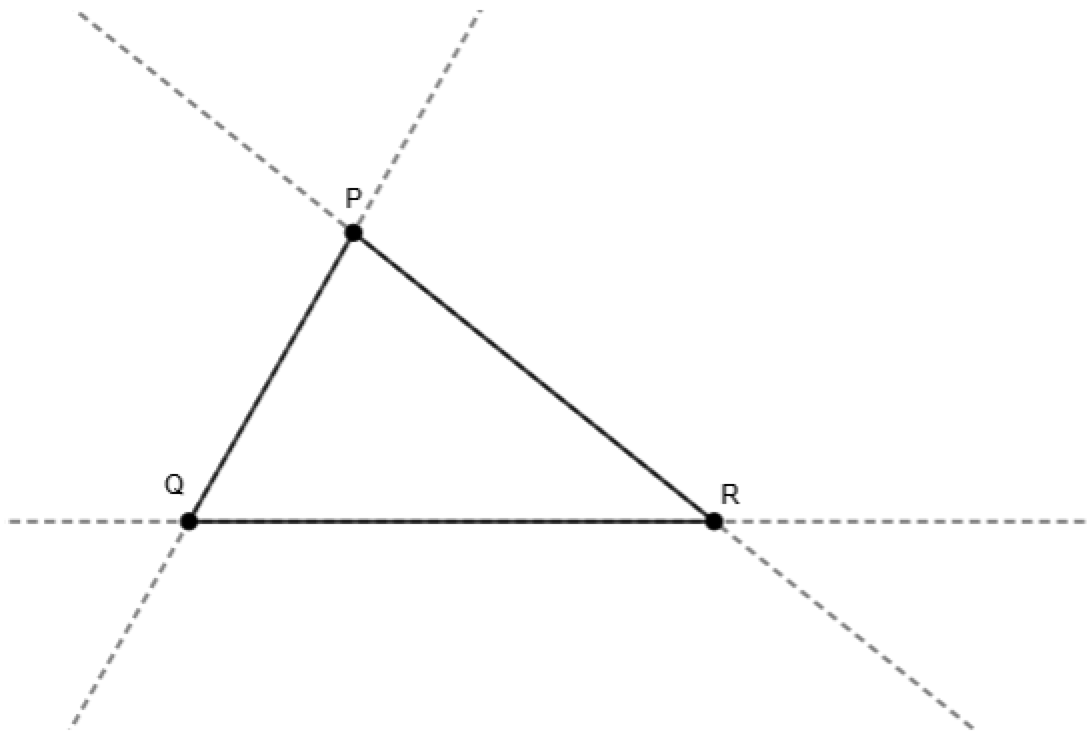
¿Qué es lo que tenemos?

Un triángulo dado

¿Qué es lo que nos pide el problema?

Construir un cuadrilátero completo cuyo triángulo diagonal sea el dado

Dibujemos la figura



¿Qué es lo que sabemos?

Como ΔPQR es el triángulo diagonal sus lados determinan las diagonales del cuadrilátero completo

¿Qué más sabemos?¿Hay alguna relación con los vértices del cuadrilátero?

En cada diagonal del cuadrilátero completo, hay una hilera armónica, que consiste de los vértices del triángulo diagonal y los dos vértices del cuadrilátero que están en dicha diagonal

Entonces los vértices del cuadrilátero completo están en los lados del triángulo dado y además son conjugados armónicos respecto a sus vértices

De modo que tres de los vértices del cuadrilátero que buscamos están sobre el triángulo y los otros tres fuera de él

¿Qué pasa si consideramos a los vértices del cuadrilátero completo que están fuera del triángulo diagonal?¿Qué sabemos de ellos?

Son los conjugados armónicos de los vértices que están sobre el triángulo diagonal y además son colineales

¿Y eso de que nos sirve?¿Cómo podemos usarlo?

Queremos tres puntos en los lados del triángulo tales que sus conjugados armónicos respecto a sus vértices sean colineales

¿Hemos resuelto algún problema similar?

Se parece al problema anterior

¿Qué nos dice el problema anterior?

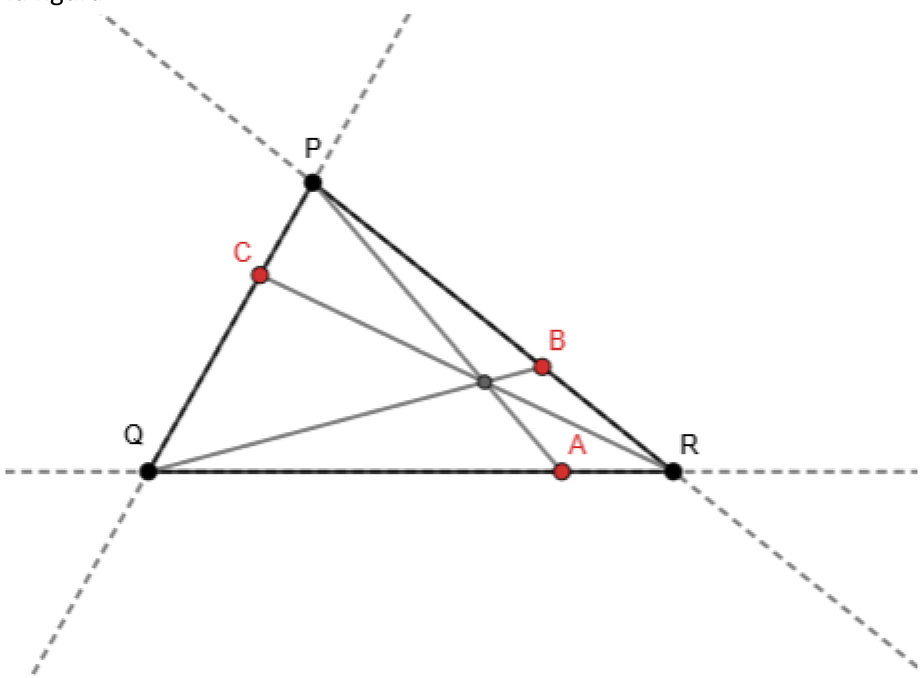
> Si tres puntos X, Y y Z están en los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC y X’, Y’ y Z’ son sus conjugados armónicos respecto a los vértices C, A y B del triángulo, las rectas AX’, BY’ y CZ’ son concurrentes si y sólo si X, Y y Z son colineales

¿Podemos usarlo?¿Cómo?

> Si tomamos tres puntos A, B y C en los lados QR, RP y PQ del triángulo PQR tales que PA, QB y CR concurran entonces sus conjugados respecto a los vértices del triángulo son colineales

Entonces, tomemos A, B y C en los lados QR, RP y PQ tales que PA, QB y CR concurren

Dibujemos la figura

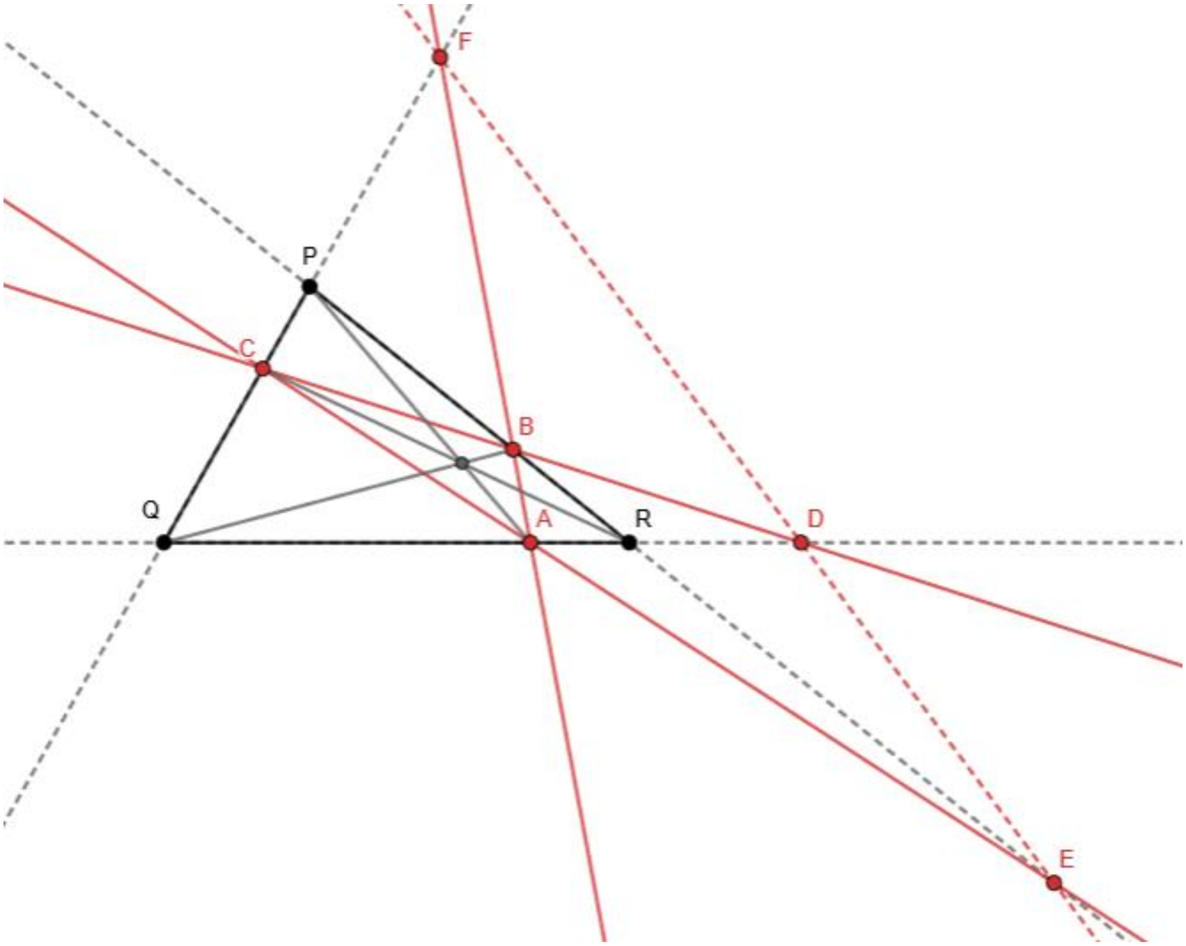


¿Qué sabemos que los conjugados armónicos de A, B y C?

> Por el problema anterior son colineales

¿Qué más sabemos?¿Cómo los encontramos?

> Por la construcción; el conjugado armónico de A es la intersección de BC con QR, el conjugado armónico de B es la intersección de AC con RP y el conjugado armónico de C es la intersección de AB con PQ



Así, A, B, C, D, E y F son los vértices de un cuadrilátero completo que tiene a PQR como su triángulo diagonal

*¿Es único? Es fácil ver que el cuadrilátero no es único ya que los puntos A, B y C no lo son. Intente dibujar un cuadrilátero diferente cambiando los puntos A, B y C.

Bibliografía

Shively, Levi Stephen. An introduction to modern geometry. John Wiley & Sons. 1939.

Cardenas Rubio, Silvestre. Notas de geometría. UNAM, Facultad de Ciencias. 2013.

Bulajich Manfrino, Radmila; Gómez Ortega, José Antonio. Geometría. UNAM, Instituto de Matemáticas. 2002.