

# Baricentro

GGA,jubilado  
UNAM

August 26, 2020

## Abstract

Del porqué no hay que dejar la educación en manos de Televisa.

## Part I

**El centro del sistema solar no es el sol, ni el foco de la elipse de la órbita de algún planeta, la matemática asegura es...**

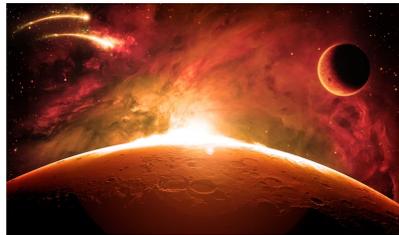


Fig.1. aphelleon /shutterstock.com

# 1 Solución de problemas geométricos con ayuda del centro de masa (centro de gravedad, o baricentro) con la matemática de hace 1300 años.



La idea de *centro de masa* (*centro de gravedad*) fue introducido, por el que seguramente fue el más grande matemático del mundo antiguo, el geometra griego *Arquímedes* (287 – 212 a.n.e.) El descubrió que con ayuda de este concepto, mediante el imaginar una balanza e imaginar también una suspensión de masas en diferentes puntos de figuras geométricas, es posible resolver muy diversos problemas geométricos puros. Por ejemplo, se podía calcular el volumen de una esfera y demostrar el teorema de que las tres medianas de un triángulo se intersecan en un punto.

Qué fue lo que escribio acerca de este método *Arquímedes* a otro gran geometra de su época *Eratóstenes*: “Consideré adecuado exponerte un método peculiar, gracias al cual se obtiene una herramienta para investigar ciertos problemas matemáticos con ayuda de la mecánica. Este procedimiento, con mi más profundo convencimiento, es muy conveniente para resolver proposiciones geométricas; muchas cosas por primera vez resultaron para mí nítidamente claras gracias al método mecánico. . . Tengo la convicción de que muchos de mis contemporáneos y sucesores al conocer este método estarán en disposición de encontrar nuevos teoremas. . .” [1].



Fig.? Arquímedes de Syracuse. Fig.?A. Eratóstenes.

En efecto, en lo sucesivo hubo matemáticos que recurrieron a razonamientos mecánicos para solucionar problemas geométricos. En particular, el astrónomo

y matemático jesuita sueco de origen judío *Paul Guldin* (1577-1643) le dedicó a este método el libro en latín '*De centro gravitatis*' (1635) ("Centrobárica" un estudio sobre el centro de gravedad), donde aplica los razonamientos mecánicos al cálculo de superficies y volúmenes de distintos cuerpos [2].

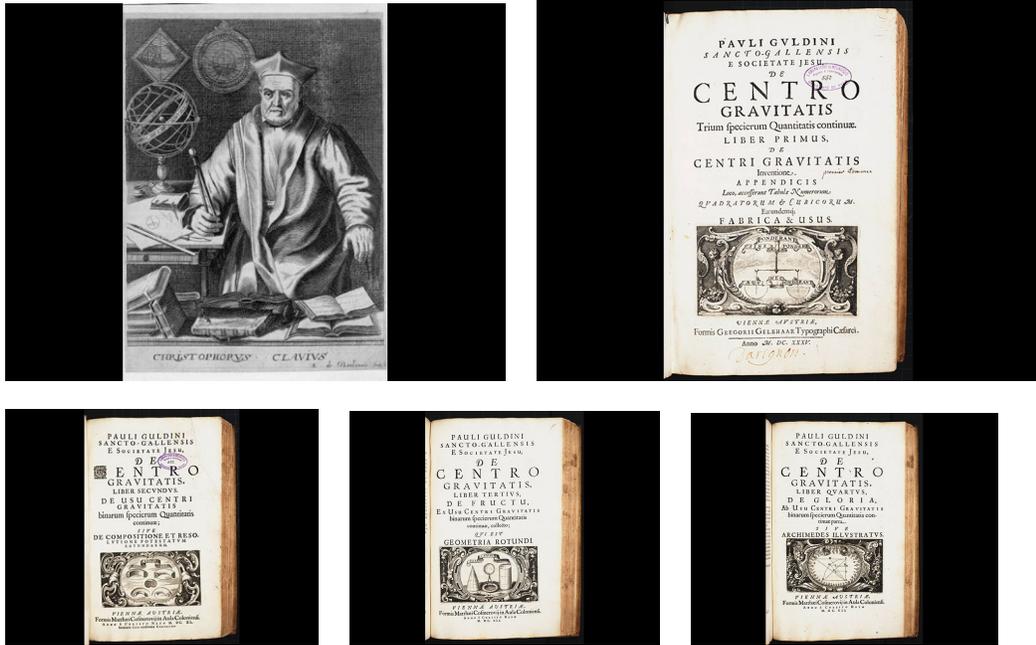


Fig.7. Falsa imagen que con frecuencia se presenta como la de *Paul Guldin* y los 4 tomos de su '*De centro gravitatis*' ((1635) 'Centrobárica'[2])

Los hubo, quienes con éxito atrajeron el concepto de centro de masa en la búsqueda de *lugares geométricos* de puntos. Así se llega al famoso matemático y astrónomo alemán *August Möbius* (1790-1868), pionero de la topología y descubridor de la superficie no orientable, ahora conocida como *Cinta de Möbius*. Fue uno de los ayudantes de Gauss y escribió el libro "*Cálculo baricéntrico*" (1827 [3]) pudiendo construir todo un apartado de la geometría, la llamada *geometría proyectiva*, con base en el concepto de centro de gravedad.

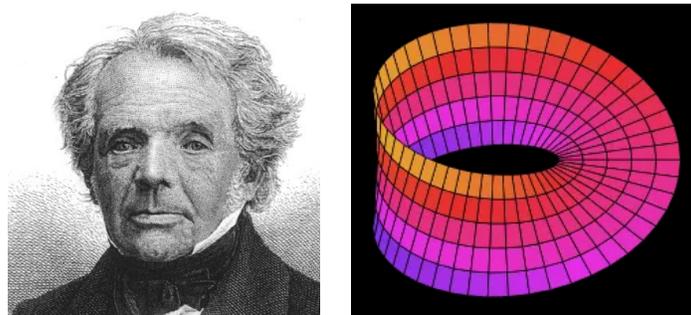


Fig.?. A. Möbius y su cinta.

A manera de anecdotario puede decirse que con base en ese mismo concepto de centro de masa se creo el cálculo vectorial, la demostración de desigualdades, etc.y ahora para variar también el *centro del sistema solar*.

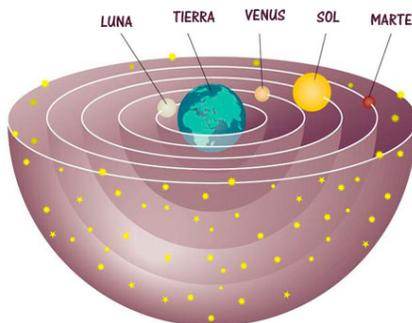
## 2 El centro del sistema solar (Aristóteles,Ptoloméo, Co- pérnico).

El científico espacial *James O'Donoghue* compartió animaciones que muestran (más no demuestran) fehacientemente que el *Sol* no es el verdadero *centro del siste- ma solar*. Se puede hacer hincapié en que el modelo del sistema solar prevaleciente es el modelo *heliocéntrico* de *Copérnico* [4] (antecesor *Aristarco*), que causó toda una revolución en el siglo *XVI*, cuando lo propuso como sustitución del modelo de *Ptoloméo* [5], el cual prevalecía desde el siglo *II* como el modelo *geocéntrico* utilizado por astrónomos y pensadores religiosos (con pequeñas modificaciones al de *Aristóteles* [6]).



Fig.?. Copérnico, Ptoloméo, Aristóteles.

Actualmente el modelo de Copérnico, no sólo es el más conocido, estudiado y re- producido en todo el mundo, sino enseñado desde la educación preescolar.



Primera visión del sistema solar.



Dos visiones del mundo (biblioteca central CU-México)



## 2.1 Centro de masa, o Centro de gravedad o Baricentro.

¿Qué es un baricentro?

Decimos que los planetas orbitan estrellas, pero eso no es toda la verdad. Los planetas y las estrellas orbitan alrededor de su centro de masa común. Este centro de masa o centro de gravedad se llama *baricentro*. Los baricentros también ayudan a los astrónomos a buscar planetas más allá de nuestro sistema solar.

¿Qué es un *centro de masa*?

Cada objeto tiene un *centro de masa*. Es el centro exacto de todo el material del que está hecho el objeto. El centro de masa de un objeto es el punto en que el objeto se puede *equilibrar*.

A veces, el centro de masa está situado directamente en el centro del objeto, como en el caso de una regla, equilibrándola con la punta de un dedo. Ese es el centro de masa o centro de gravedad o baricentro de una regla.



Fig.?. Centro de gravedad de la regla.

Pero a veces el centro de masa no está en el centro del objeto, como en el caso de un martillo, que tiene la mayor parte de su masa en uno de sus extremos, por ello que su centro de masa está mucho más cerca del extremo pesado.



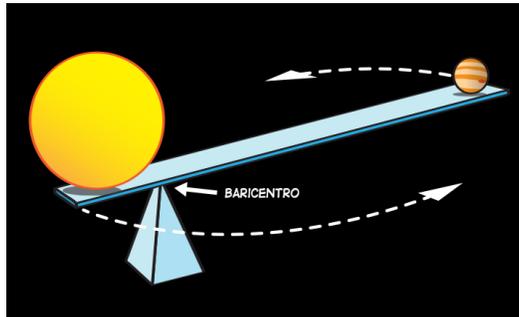
Fig.?. Centro de gravedad del martillo.

En el espacio, dos o más objetos que orbitan entre sí también tienen un centro de masa en el punto alrededor del cual los objetos giran. Ese punto es el baricentro de los objetos. El baricentro suele estar más cerca del objeto con mayor masa.

Fig.?. Se muestra que el baricentro está más cerca del objeto con mayor masa.

## 2.2 Baricentros en el sistema solar.

¿Dónde está el *baricentro* entre *La Tierra* y el *Sol*? Dado, que el *Sol* tiene mucha más masa que *La Tierra*, significa que el *Sol* es como la cabeza del martillo. Por lo tanto, su baricentro estará más cerca del centro del *Sol* (véase Simulador de Órbitas con baricentro en el Apéndice1).



Júpiter es mucho más grande que la Tierra. Tiene como 318 veces más masa. Como resultado, el baricentro de Júpiter y el Sol no está en el centro del Sol. En realidad, está fuera de la superficie del Sol! (Apéndice1)

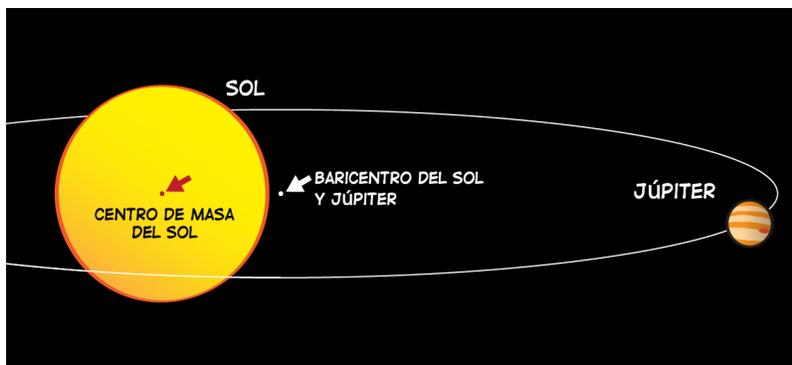


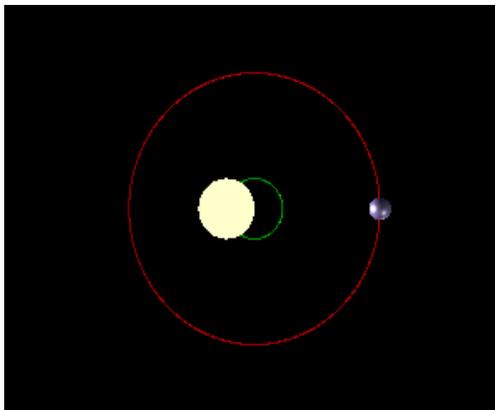
Fig.?. Una ilustración que muestra el baricentro del sol y Júpiter versus el centro de masa del sol.

Nuestro sistema solar también tiene un *baricentro*. El *Sol*, la *Tierra* y todos los demás planetas del sistema solar orbitan alrededor de este baricentro. Es el centro de masa de todos los objetos en el sistema solar combinados.

El baricentro de nuestro sistema solar cambia constantemente de posición. Su posición depende de dónde están los planetas en sus órbitas (esta es una descripción de lo que ocurre, pero no es la guía para su demostración). El *baricentro* del sistema solar puede estar *cerca del centro del Sol* o *fuera de la superficie del Sol*. Al orbitar el *Sol* este *baricentro móvil*, se tambalea (observado en las simulaciones).

### 2.3 ¿Cómo ayudan los baricentros a encontrar otros planetas?

Si una *estrella* tiene *planetas*, la estrella orbita alrededor de un baricentro que está fuera del centro de la estrella. Esto hace que parezca que la estrella bamboletea:



Animación que muestra la estrella del planeta en órbita ‘desde arriba’, con la estrella tambaleándose.

Aquí un planeta grande y una estrella aún más grande orbitan alrededor de su *centro compartido de masa* (o *centro compartido de gravedad*, o *baricentro*), visualizados ‘desde arriba’.

*falta*

Fig.?. Animación que muestra el planeta en órbita alrededor de la estrella lateralmente, con la estrella moviéndose de un lado para el otro.

En esta nueva animación, un planeta grande y una estrella aún más grande orbitan su centro compartido de masa, o baricentro, vistos lateralmente. El baricentro se encuentra ligeramente descentrado es lo que hace que la estrella oscile hacia adelante y hacia atrás.

Los planetas que giran alrededor de otras estrellas, los llamados *exoplanetas*, son muy difíciles de ver directamente. Están ocultos por el resplandor brillante de las estrellas alrededor de las que orbitan. Detectar el bamboletéo de una estrella es una manera de averiguar si hay planetas que orbitan a su alrededor. Los astrónomos han detectado muchos planetas que se encuentran alrededor de otras estrellas al estudiar sus baricentros, además de usar *otras varias técnicas*.

## 2.4 Intentando formalizar el proceso decrito.

Ahora si regresando al apartado donde se quería fundamentar lo que muestra en sus animaciones fruto de sus simulaciones *O'Donoghue* [4], pero que no demuestra sus propias conclusiones.

Desde mi punto de vista y para justipreciar las dificultades de todo lo afirmado se tendría que empezar con el análisis en un instante fijo del proceso y analizar el sistema solar como si los planetas estuvieran fijos y posteriormente analizar el sistema en su dinámica propia.

Para empezar se propone iniciar regresando a la idea original de *Arquímedes*, esto es concebir al *sol* y a los *planetas* como *puntos materiales*, es decir como parejas ordenadas de puntos (geométricos) que serán denotados con letras mayúsculas tipo *A*, suministrados de masas que denotaremos con *m*, por ello un *punto material* quedaría representado por la pareja  $(A, m)$ , donde esta representa al punto (geométrico) *A* con su masa asociada *m*.

Y éste sería el formalismo inicial a ser usado en lo sucesivo, más aún el *punto material* podría denotarse como  $\mathbf{A} \stackrel{not}{\equiv} (A, m)$ , donde el  $\mathbf{A}$  (negrita) representa a la pareja del punto material  $(A, m)$ .

Desde el punto de vista matemático el punto material  $\mathbf{A} \stackrel{def}{\equiv} (A, m)$  es la pareja formada por el punto (geométrico) *A* y cierta masa asociada denotada por el número (no negativo) *m*. Para empezar supóngase que se tiene dos puntos materiales  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ .

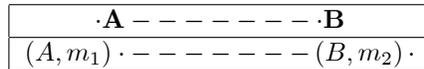


Fig.?. Dos puntos materiales:  $\mathbf{A} \equiv (A, m_1)$  y  $\mathbf{B} \equiv (B, m_2)$  y la recta que los une, en sus dos notaciones.

Por *baricentro* (o *centro de gravedad* o *centro de masa*) de dos *puntos materiales*  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{A} \equiv (A, m_1)$  y  $\mathbf{B} \equiv (B, m_2)$ ) se entenderá al punto material  $\mathbf{C}$  perteneciente al segmento *AB* y que satisface la llamada “*Ley de la palanca*”, a saber: el producto de su distancia (brazo) a uno de esos puntos geométricos (*A*) por la masa adjunta a ese punto (geométrico) *m*<sub>1</sub> es igual al producto de su distancia al segundo de los puntos (*B*) por la masa asociada a dicho segundo punto *m*<sub>2</sub>, o en símbolos:  $m_1 \cdot dist(A, C) = m_2 \cdot dist(C, B)$ , esto es:

$$m_1 \cdot AC = m_2 \cdot CB.$$

El sentido físico del *punto baricéntrico*  $\mathbf{C}$  es de lo más inmediato: supóngase que *AB* representa una varilla ideal rígida imponderable (‘*sin peso*’) en cuyos extremos se colocan las masas *m*<sub>1</sub> y *m*<sub>2</sub> (lo de ‘*imponderable*’ de la varilla es en el sentido de que su masa comparada con las masas *m*<sub>1</sub> y *m*<sub>2</sub> es tan pequeña que es despreciable), entonces *C* es aquel punto, en el cual hay que apoyar la



## 2.5 Empiezan las dificultades, no mencionadas en el artículo.

Hasta aquí todo perfecto, pero todo es *estático* y se desearía adjuntarle una *dinámica*, puesto que los *planetas* y la *estrella* el *Sol* tienen sus órbitas que recorren a lo largo del tiempo  $t$ .

Actuando de la manera más ingenua posible se podría generalizar concibiendo a los puntos (geométricos)  $A_1, A_2, \dots, A_n$  como no fijos, sino que dependan del tiempo  $t$ , esto es como funciones del tiempo  $t$ :  $A_1(t), A_2(t), \dots, A_n(t)$ , pero entonces aquí empezarían los tropiezos, puesto que para sólo tres puntos materiales ya aparecería el clásico *problema de los tres cuerpos* (Éste problema consiste en determinar, en cualquier instante del tiempo  $t$ , las posiciones  $A_i$  y las velocidades  $\dot{A}_i$  de los tres cuerpos, de cualquier masa  $m_i$ , sometidos a la atracción gravitacional mutua y partiendo de unas condiciones iniciales, o posiciones y velocidades dadas)

Esto a su vez, remitiría a los inicios del siglo *XX* y al nacimiento de la Teoría del *Caos físico*, con *Poincaré* [5?] a la cabeza, ya que en esos entonces era conocida la solución del *problema de dos cuerpos* mediante el método de cuadraturas integrales, pero nunca se pudo obtener la solución general del *problema de los tres cuerpos* con ese método y en algunos casos su solución llevaba a comportamientos *caóticos*, en ese mismo sentido físico del término, lo cual significa que a pequeñas perturbaciones de sus condiciones iniciales las soluciones se podían disparar drásticamente (el famoso *efecto mariposa* que aparecería 3/4 partes de un siglo después con *Mandelbrot* [6]).

En resumen, el problema de los  $n$  (con  $n \geq 3$ ) no puede resolverse con el método de cuadraturas integrales o integrales de movimiento o primeras integrales. Así lo demostró el mismo *Poincaré* [?], no existe una fórmula que lo rijan. Esto significa que de las 18 integrales de movimiento sólo 10 se resuelven con leyes de conservación.

Además de estas 10 integrales no existe ninguna otra algebraicamente independiente con esas 10. Sin embargo eso no implica que no pueda existir una solución general del *problema de los tres cuerpos*, aunque las búsquedas de nuevas integrales hasta ahora ha sido en forma de *series*. De hecho, *Sudman* en 1909 proporcionó una solución mediante una serie convergente.

Después de todo este recuento, el problema de los tres cuerpos no surge como un problema puramente especulativo, dado que el sistema La Tierra-Luna-Sol resulta ser un caso muy próximo al clásico problema de los tres cuerpos. Por eso no es raro constatar que *Delaney CE* [7] realizó un estudio en 1860-67 en dos grandes volúmenes y ahí ya aparece atisbos del *Caos físico* y aplica la Teoría de perturbaciones al pretender resolverlo como un problema de dos cuerpos y con siderar que el tercero (la Luna) perturba la posición de los otros dos.

Se trata ‘movimientos caóticos’, que en términos más actuales tendrá que esperar a ser abordado hasta 1949 cuando el gran matemático uruguayo *José Luis Massera* lo caracterizó en términos de las funciones de Lyapunov.

Regresando a *Pierre Simon Laplace* [9] en su ‘*Traité de Mécanique Céleste*’ (1776) donde reivindica su *Principio Determinístico* al afirmar que si se conociera la posición y la velocidad de todas las partículas del universo en un instante dado

se podría pre- decir su pasado y futuro. Este Principio de determinismo Laplaciano prevaleció por más de 100 años. Pero a finales de siglo XIX irrumpe el matemático *Poincaré* plante- ando su nuevo enfoque al preguntarse si el sistema solar era estable por siempre.

Por ello es que *Poincaré* fue el primero en pensar en la posibilidad del *caos físico* en el sentido de comportamientos de alta sensibilidad respecto de las condiciones ini- ciales. Así es como reivindica el *azar* y lo *aleatorio*, postulando que el *azar* no es sino la medida de la ignorancia del humano y a la vez reconociendo la existencia de fenó- menos que no eran completamente *aleatorios*, pero que no correspondían a una diná mica *lineal*, aquellos en los que ante pequeñas perturbaciones de las condiciones ini- ciales se obtenían enormes cambios en los resultados, la dinámica de lo *no lineal*.

Así comenzó la búsqueda de las leyes que gobiernan el *clima*; la *sangre* fluyendo por el corazón; la *turbulencia*; las *epidemias*; las *bolsas de valores*; el *problema de los tres cuerpos restringido*, donde la masa de uno de los cuerpos es despreciable; el *pro blema de los tres cuerpos restringido circular* bajo la restricción de de que dos de los cuerpos están en órbitas circulares (que se aproxima al sistema *Sol-Tierra-Luna*); cuando el cuerpo de masa despreciable es un satélite. La esfera de *Hill*. El lóbulo de *Roche*. Los puntos de *Lagrange* y un largo etcétera.

Todo esto quedo obviado en el artículo de Alejandro I. López y ¡como si nada!

Cuidado con el divulgador científico *Alejandro I. López?*. Cuidado con la revista *‘Muy Interesante’*. Cuidado con *Televisa*. Cuidado con dejar la educación pública en manos privadas.



Fig.?. vadim.sadovski/shutterstock

### 3 REFERENCIAS.

#### References

- [1] *El Método*; Funes, Repositorio digital de documentos en educación matemática; Universidad de los andes, Colombia.
- [2] *Paul Guldin*; De centro gravitatis, 4 tomos (1635), History of Science Collection (1635-41); Linda Hall Library.
- [3] *August Möbius*; Der barycentrische Calkul (The Calculus of Centres of Gravity); 1827.
- [4] *Nicolas Copérnico*; De revolutionibus orbium coelestium (Sobre las revoluciones de las esferas celestes), Edit. Johannes Petrius, Nüremberg Sacro Imperio Romano Germánico, 1543.
- [5] *Claudio Ptoloméo*; Almagesto, s. II.
- [6] *Aristóteles*;
- [7] *James O'Donoghue*; Simulación presentada en su cuenta de Twitter.
- [8] *Mandelbrot*
- [9] *Hanri Poincaré*;
- [10] *xxx Sundman*; 1909
- [11] *Pierre Simon Laplace*; *Traité de Mécanique Céleste*; (1776)
- [12] <http://orbitalimulator.com/gravity/articles/ssbarycenter.html> (visto 24-08-20)



## 4

### .1 El primer Apéndice.

<http://orbitalimulator.com/gravity/articles/ssbarycenter.html>

## .2 ¿Qué es ‘Gravity Simulator’?

Los astrónomos profesionales tienen muchas herramientas a su disposición. Podría pensarse, a un astrónomo como alguien que se la pasa detrás del ocular de un telescopio grande, sin embargo los hay que se la pasan más tiempo frente a una computadora. Usando computadoras, los astrónomos pueden modelar, estudiar y observar el universo de formas que no son posibles con un telescopio. Los astrónomos aficionados, sin embargo, a menudo se limitan a observar solo con telescopios.

‘Gravity Simulator’ proporciona a los astrónomos aficionados una poderosa herramienta de integración numérica. Al realizar simulaciones de  $n$  cuerpos, puede estudiar las órbitas de planetas, lunas, asteroides o cualquier objeto del universo. Puede recrear simulaciones realizadas por astrónomos profesionales o experimentar con simulaciones de su propia factura.

Con la función de marco giratorio de Gravity Simulator, se puede estudiar con facilidad la compleja relación orbital entre las diversas lunas de Saturno, o la relación entre la órbita de la Tierra y la órbita en herradura de *Cruithne*, un asteroide a menudo denominado "*la segunda luna de la Tierra*".

Puede ejecutar las numerosas simulaciones que vienen con Gravity Simulator y otras adicionales disponibles en este sitio web. Una vez que se sienta cómodo con las simulaciones existentes, probablemente desee crear algunas propias.

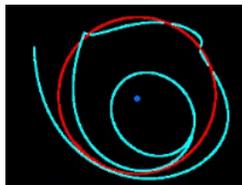
*Gravity Simulator* permite estudiar el universo de una forma completamente nueva

**Para disfrutar...** hay dos versiones de este programa. La versión original es solo para Windows. Basta con un toque en el enlace de descarga para descargar el archivo de instalación. La última versión se ejecuta en su navegador web, por lo que se ejecutará en cualquier plataforma. No requiere Java ni Flash. Haga clic **aquí** para obtener la versión del navegador.

### **Nuevo**

Durante su vida, las constelaciones no cambiarán. ¡Pero durante largos períodos de tiempo, lo hacen! El movimiento propio simulador le permitirá ver todos los cambios de la constelación con el tiempo. ¡Incluso te permitirá volar a través de las constelaciones!

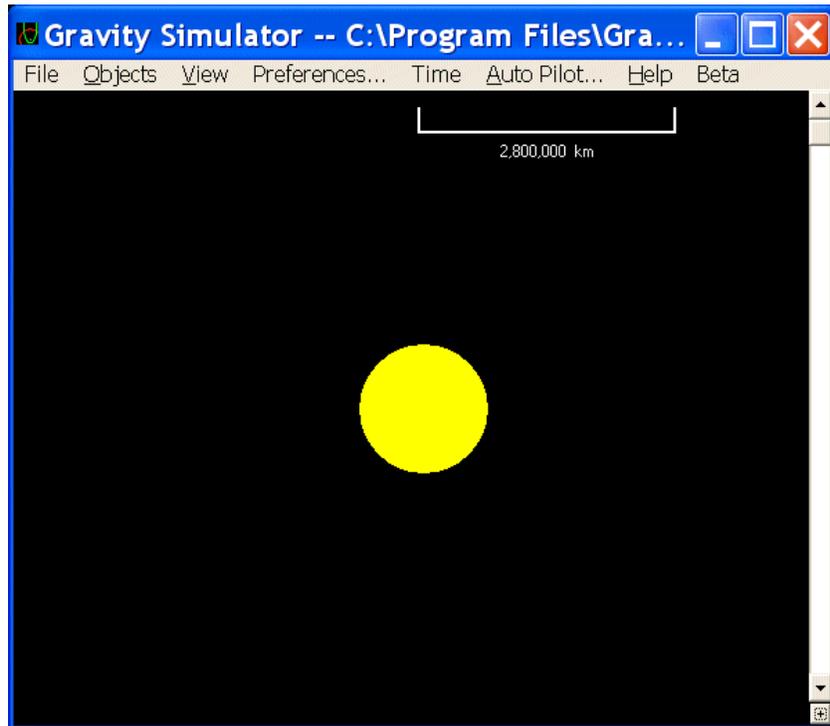
## .3 El baricentro del sistema solar.



Aunque es conveniente pensar en el *Sol* como el ancla estacionaria de nuestro sistema solar, en realidad se mueve cuando los planetas tiran de él, lo que hace que orbite el baricentro del sistema solar. El Sol nunca se aleja demasiado del

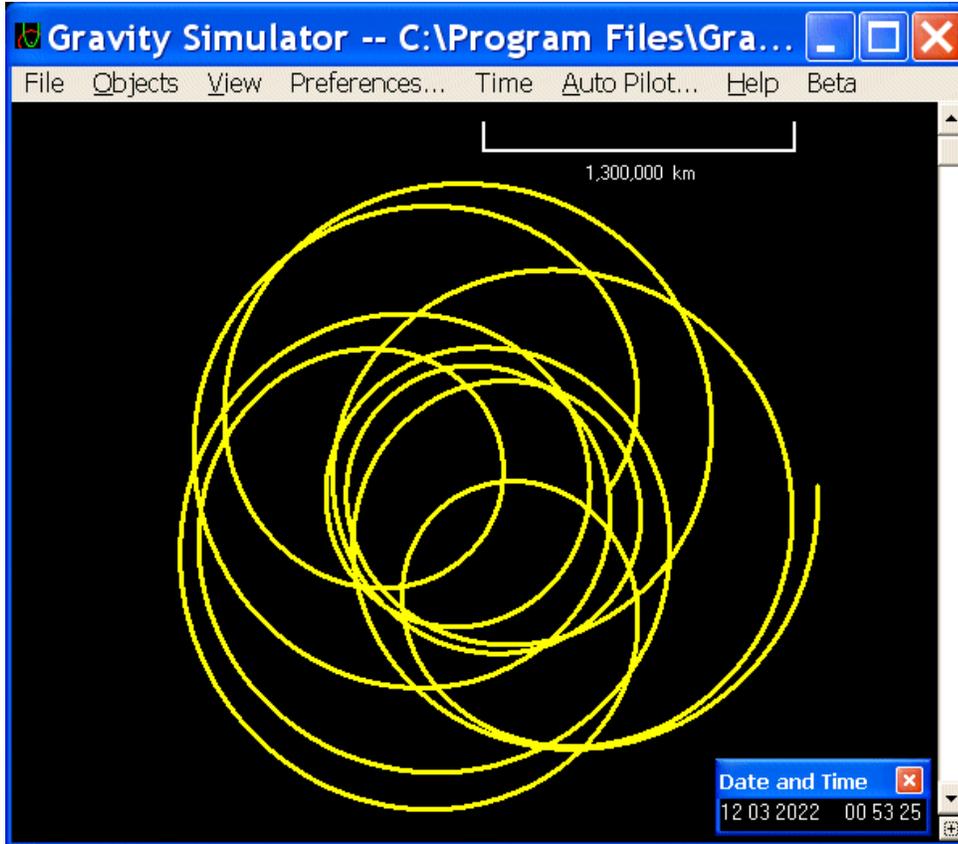
*baricentro* del sistema solar. El baricentro suele estar fuera de la *fotósfera* del *Sol*, pero nunca fuera de la corona del *Sol*. La simulación *sbarycenter.gsim* le permite ver el *Sol* orbitar el baricentro del sistema solar. Al eliminar los planetas uno por uno, se puede observar el efecto que cada uno tiene en el baricentro del sistema solar.

·A continuación, se muestran algunas capturas de pantalla que describen cómo hacer esto. Aquí hay una imagen del *Sol* bloqueada en el centro de la pantalla:



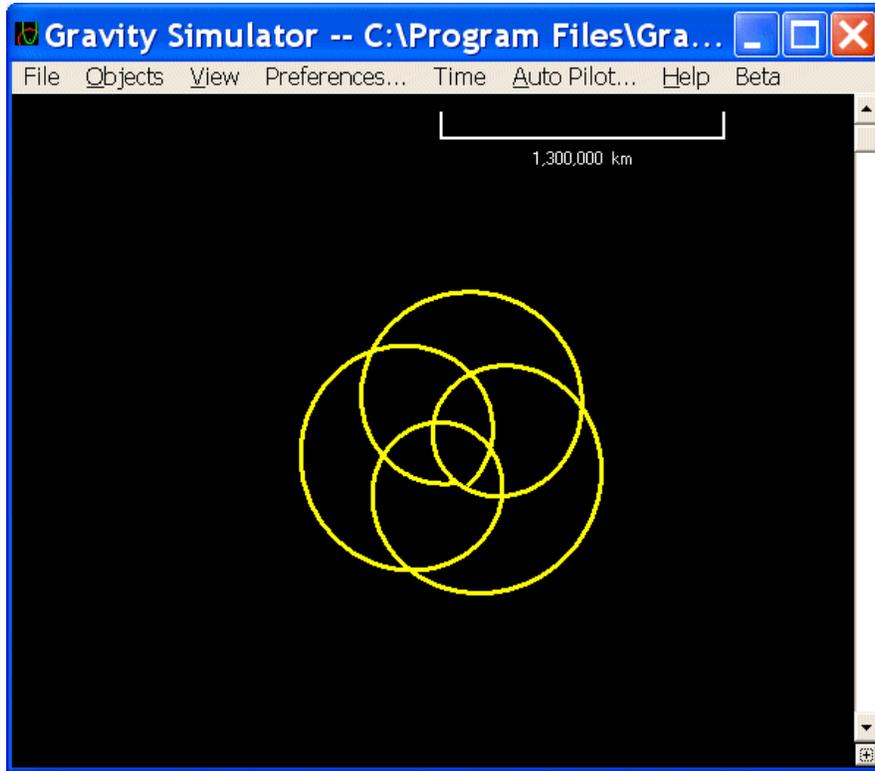
·Editar el *Sol* y establecer su tamaño en 0 mientras conserva su *masa* permite acercarse al *baricentro* del sistema solar y observar la trayectoria del *Sol* a su

alrededor:



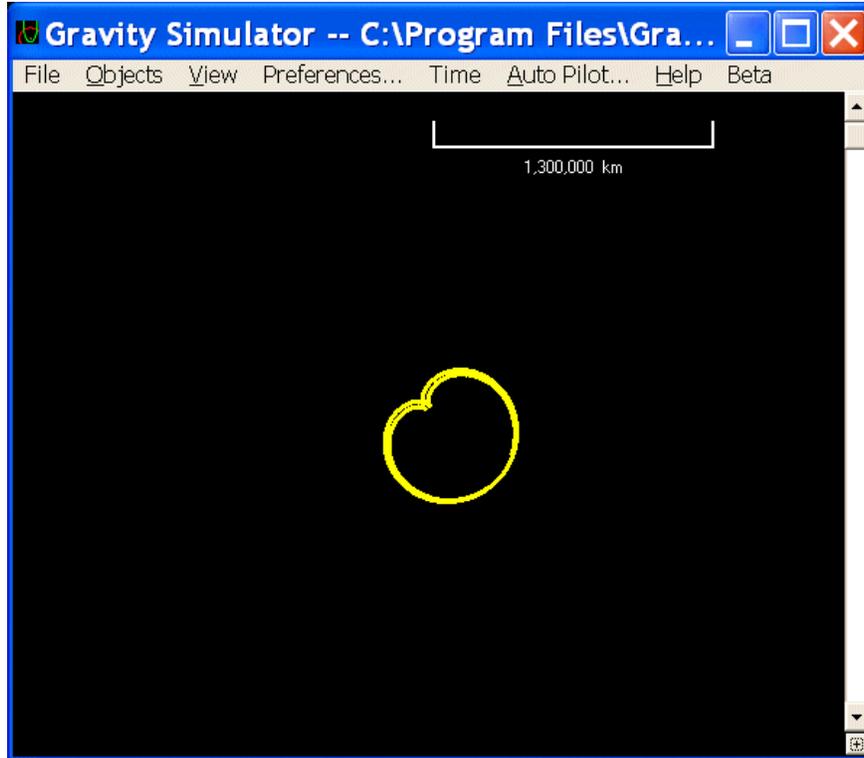
· Editar *Júpiter* y establecer su masa en 0 demuestra que *Júpiter* es respon-

sable de la mayor parte de la oscilación:



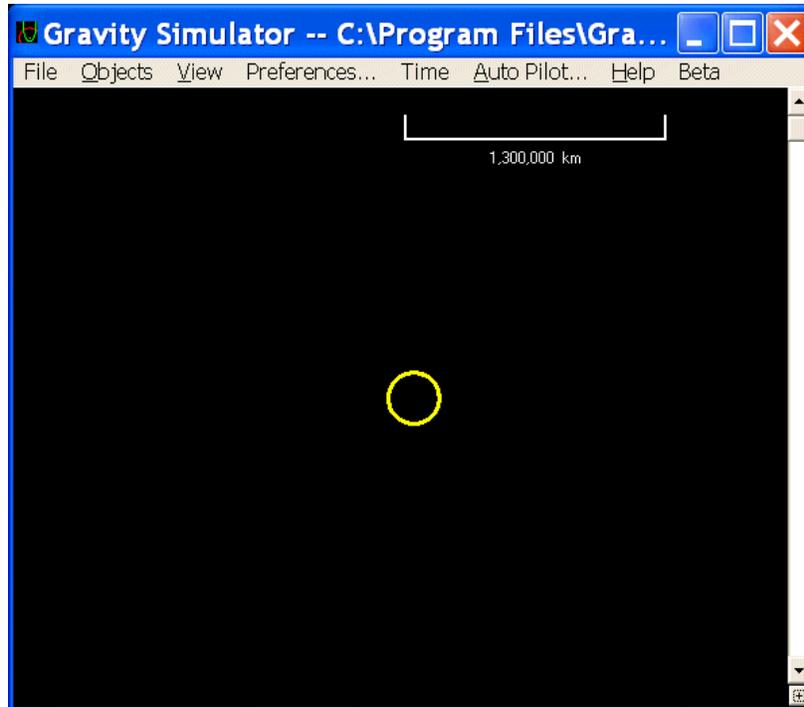
·*Saturno* es el siguiente perturbador más fuerte. Establecer su masa en 0

muestra:



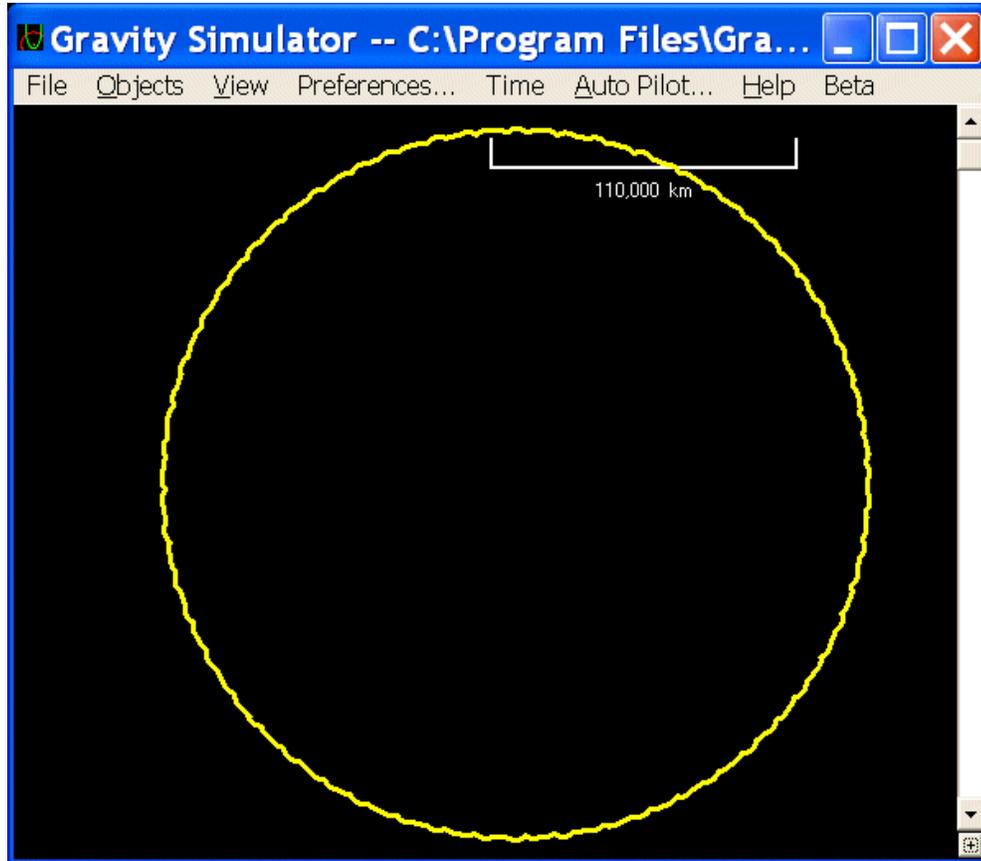
·El siguiente perturbador más fuerte es *Neptuno*. Al establecer su masa en 0, el movimiento del *Sol* alrededor del *baricentro* del sistema solar traza un *círculo* alrededor de su *baricentro*. *Urano* es responsable de este *círculo*. El período del *Sol* alrededor del *baricentro* y el *período de Urano* alrededor del

baricentro *coinciden*:



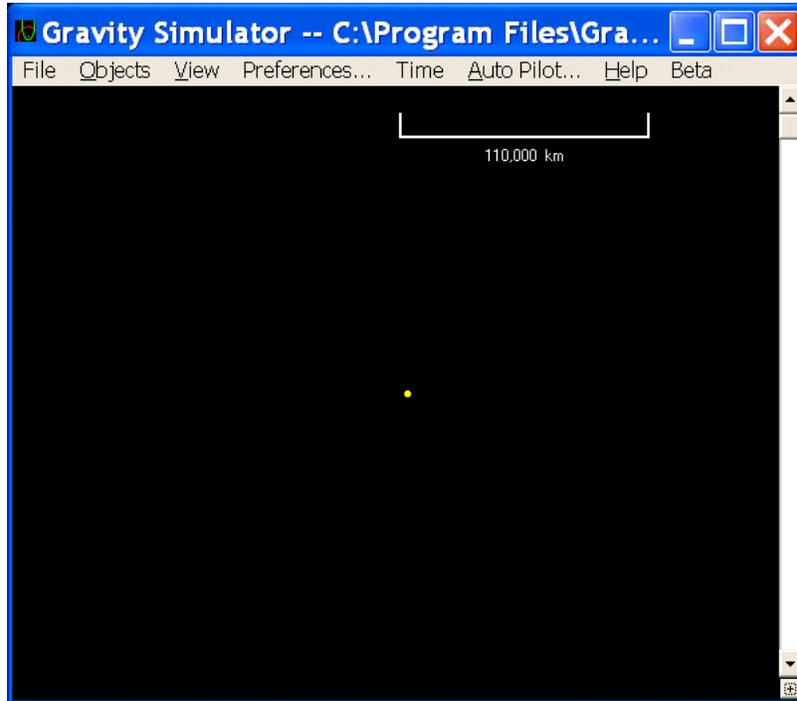
·Al acercar expone los *efectos de los planetas más pequeños* en el *círculo*

inducido por *Urano*:



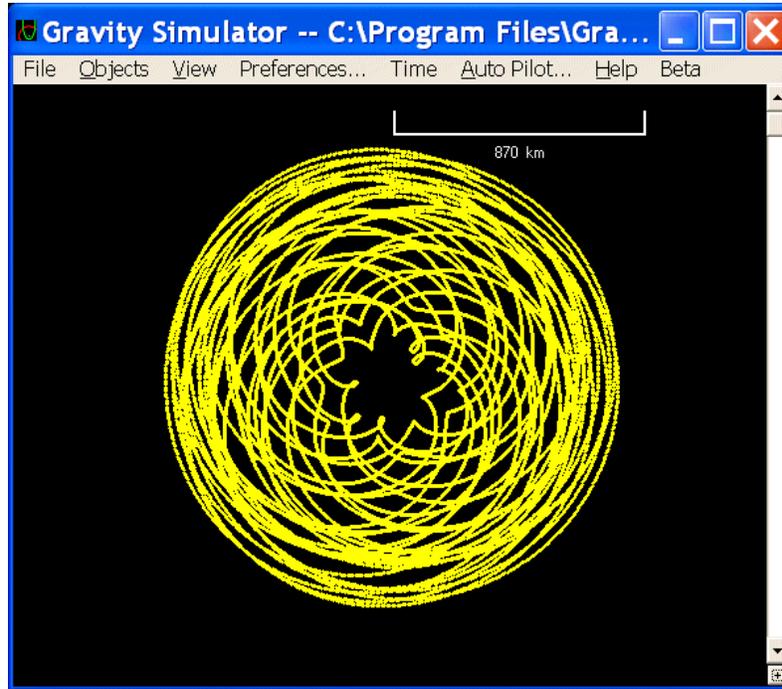
·Establecer la *masa de Urano* en 0 elimina el bamboleteo inducido por *Urano*.

El *centro* del *Sol* ahora parece descansar en el *baricentro* del *sistema solar*:



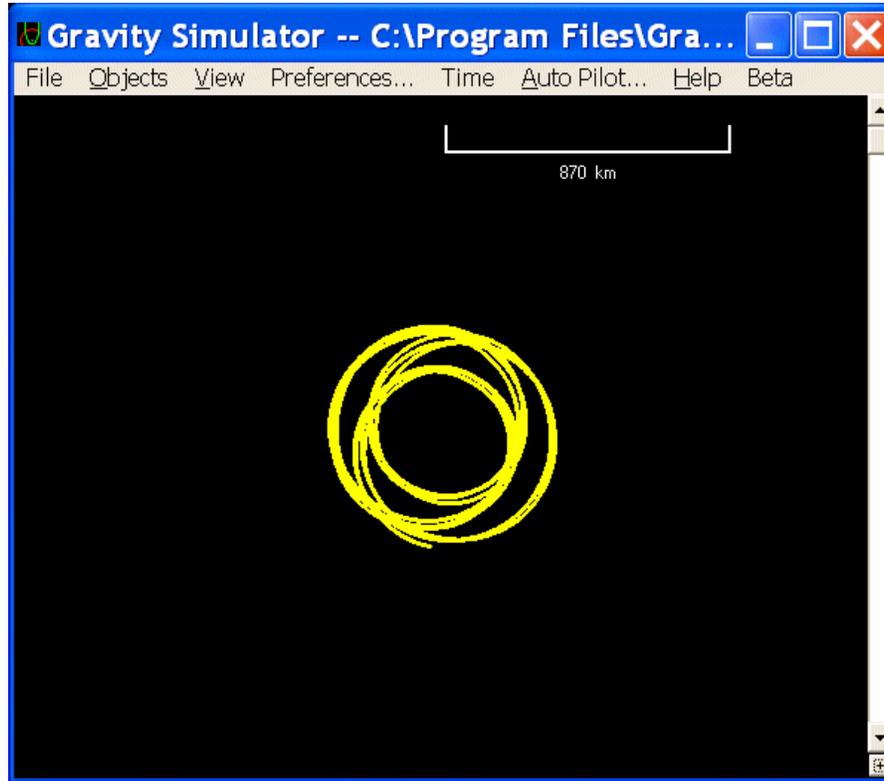
·Pero acercar aún más expone las *influencias de los planetas restantes* en el *bari- centro* del sistema solar: el sistema *La Tierra / Luna* es responsable de la

mayor parte del bamboleteo:



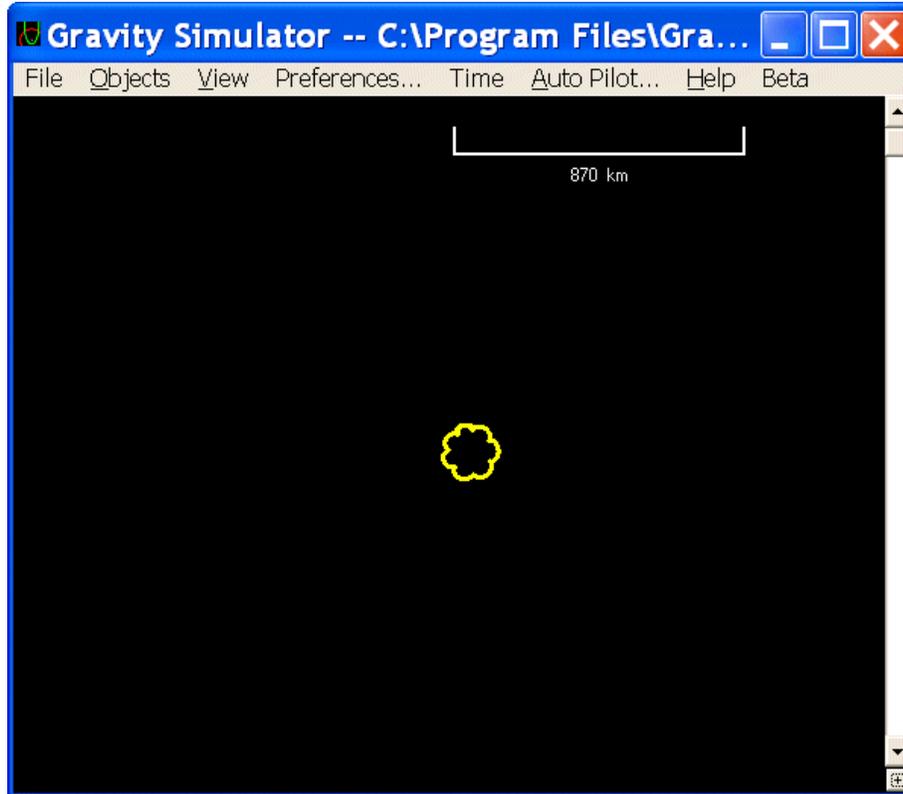
·Establecer la masa de la *La Tierra / Luna* en 0 deja a *Venus* como el

perturbador más significativo. Tiene la siguiente influencia:



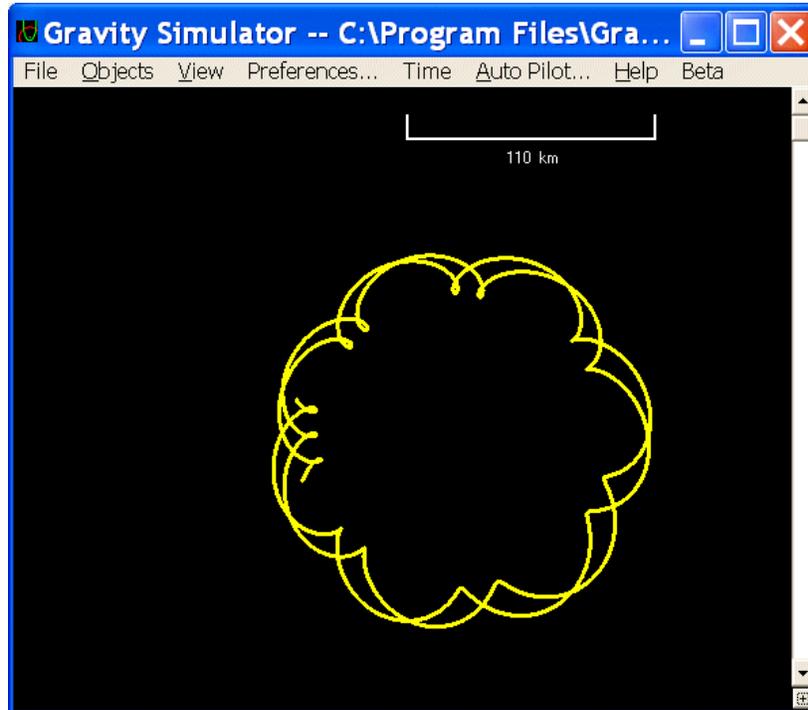
·Establecer la *masa de Venus* en 0 deja a *Mercurio, Marte y Plutón* como los únicos perturbadores. Hacen que el centro del *Sol* siga el siguiente camino

alrededor del *baricentro* del sistema solar:



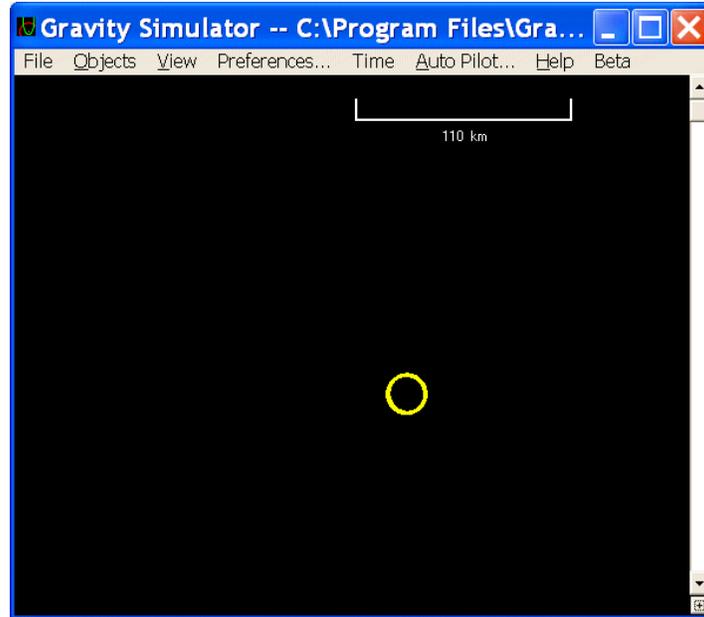
·Acercádonos para una vista más clara, se ven los *efectos de Mercurio y*

*Marte*. El efecto de *Plutón* está al descentrar este patrón:



·Establecer a *Marte*, que ahora es el perturbador más significativo, en 0 muestra que la influencia de *Mercurio* hace que el *centro del Sol* trace *círculos*

alrededor del baricentro del sistema solar:



·El dejar que esta simulación se ejecute durante la *mitad* de la *órbita de Plutón* ex- pone la *influencia de Plutón* en el *baricentro* del sistema solar:



En: <http://orbitalimulator.com/gravity/articles/ssbarycenter.html> se encuentra el simulador de orbitas del baricentro, cuyos ejemplos de imágenes anteceden. El programa para windows ahí mismo puede descargarse.

**.4**