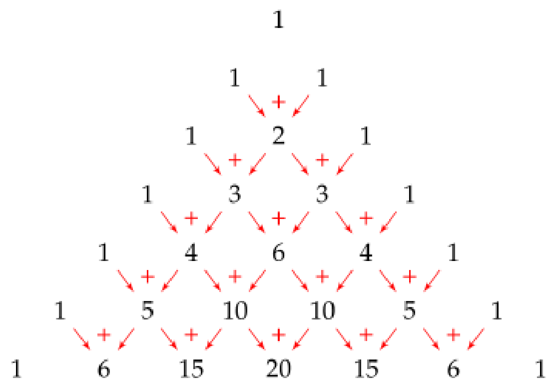
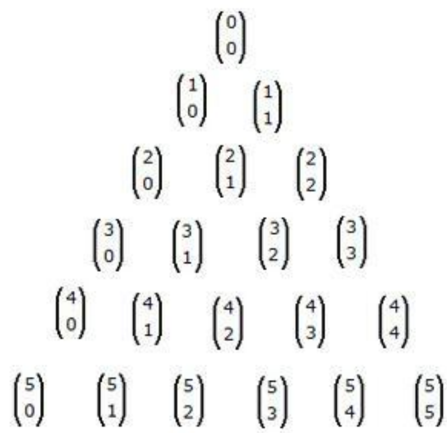
Teorema del binomio e Inducción Matemática.

Una de los más interesantes Patrones numéricos es el triángulo de Pascal.

El triangulo de pascal es útil para la obtención de los coeficientes de la expansión binomial $(x+y)^n$.





Probaremos el teorema del binomio, utilizando inducción matemática.

El teorema del binomio de Newton nos dice:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k}\, x^{n-k} y^k$$

$$donde\ C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad "las\ combinaciones\ de\ n\ en\ k"$$

Si desarrollamos la suma obtenemos:

$$(x+y)^n = C_{n,0}x^n + C_{n,1}x^{n-1}y + \cdots + C_{n,r}x^{n-r+1}y^{r-1} + C_{n,r+1}x^{n-r}y^r + \cdots + C_{n,n-1}xy^{n-1} + C_{n,n}y^n$$

- **Base de inducción:**

$para\ n = 1$

$$(x+y)^1 = x + y = 1x + 1y \quad como \quad C_{1,0} = C_{1,1} = 1$$

$$pues\ C_{1,0} = \frac{1!}{(1-0)!\,0!} = \frac{1}{0!} = 1\ dado\ que\ 0! = 1$$

$$(x+y)^1 = C_{1,0}x + C_{1,1}y$$

Por lo tanto el teorema del binomio se cumple para $n = 1$

- Paso inductivo:

Hipótesis de inducción:

$suponemos\ que\ se\ cumple\ para\ n = k$

$$(x+y)^k = C_{k,0}x^k + C_{k,1}x^{k-1}y + \cdots + C_{k,r}x^{k-r+1}y^{r-1} + C_{k,r+1}x^{k-r}y^r + \cdots + C_{k,k-1}xy^{k-1} + C_{k,k}y^k$$

Por demostrar:
$que\ se\ cumple\ para\ n = k+1$

$$(x+y)^{k+1} = C_{k+1,0}x^{k+1} + C_{k+1,1}x^k y + \cdots + C_{k+1,r}x^{k-r+2}y^{r-1} + C_{k+1,r+1}x^{k-r+1}y^r + \cdots + C_{k+1,k}xy^k + C_{k+1,k+1}y^{k+1}$$

Demostración:

$$(x+y)^{k+1} = (x+k)(x+y)^k = x(x+y)^k + y(x+y)^k$$

Entonces

$$(x+y)^{k+1} = C_{k,0}x^{k+1} + C_{k,1}x^k y + \cdots + C_{k,r}x^{k-r+2}y^{r-1} + C_{k,r+1}x^{k-r+1}y^r + \cdots + C_{k,k-1}x^2y^{k-1} + C_{k,k}xy^k * + C_{k,0}x^k y + C_{k,1}x^{k-1}y^2 + \cdots + C_{k,r}x^{k-r+1}y^r + C_{k,r+1}x^{k-r}y^{r+1} + \cdots + C_{k,k-1}xy^k + C_{k,k}y^{k+1}$$

Como $C_{k,0} = C_{k+1,0}$, $C_{k,k} + C_{k,k-1} = C_{k+1,k}$ y $C_{k,k} = C_{k+1,k+1}$

Podemos concluir

$$(x+y)^{k+1} = = C_{k+1,0}x^{k+1} + C_{k+1,1}x^k y + \cdots + C_{k+1,r+1}x^{k-r+1}y^r + \cdots + C_{k+1,k}xy^k + C_{k+1,k+1}y^{k+1}$$

Que es lo que queríamos probar. Por lo que concluimos que la fórmula dada para $(x+y)^n$ es correcta para toda $n \in N$.