Clasificar.

GGA, Profesor jubilado de la FC-UNAM.

11 agosto de 2021.

Contents

Part I

Clasificación.

Appendix A

Se resuelve un problema abierto de clasificación planteado décadas atras.

A.1 La pareja de investigadores *Gianluca Paolini - Saharon Selah* ha demostrado que tratar de clasificar grupos de números llamados "grupos abelianos libres de torsión" es tan difícil como puede llegar a ser.

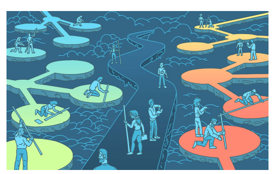
Imagine que está realizando un *censo* de todas las plantas que crecen en una *región específica*, y en lugar de *contar cada planta*, decide *organizarlas* por *especies*. Hacer esto a lo largo de *ciertos tramos* de la *costa de la Toscana no sería* demasiado *difícil*, dijo el matemático de la Universidad de Turín *Gianluca Paolini* [1], porque encontrará principalmente una sola planta: pino marítimo (*pinus pinaster*). Pero si estuvieras en la selva amazónica, *antes de Bolzonaro*, por el contrario, te enfrentarías a un desafío mucho mayor tratando de *averiguar* los *nombres* y *números* de todas las *especies* que pueblan esa región. Hacerlo a plenitud sería, probablemente, imposible

Los *matemáticos*, en su *intento* de *dar sentido al extenso paisaje* de los *objetos matemáticos*, pueden *enfrentar desafíos similares.* Eso es *especialmente cierto* para los *profesionales* en el campo de la *teoría descriptiva de conjuntos*, que tratan de *calificar* la *dificultad* de los *problemas de clasificación*, a veces *concluyendo* que una *tarea de clasificación* dada es relativamente *fácil* de llevar a cabo, y a veces (como con el Amazonas) descubriendo que es *demasiado difícil.* La *disciplina* es sólo una *rama* de la *teoría de conjuntos*, el *estudio de colecciones de entes*-pueden ser puntos en el espacio, números, gráficos, vectores, cualquier cosa-llamados *conjuntos*. Los *números reales*, los *números racionales*, los *números imaginarios*, etc., son *conjuntos por derecho propio*, sin dejar escasez de objetos que los *matemáticos estudian*.

Durante *décadas*, un *problema de clasificación* - que *involucraba* un *conjunto particular* de *objetos infinitamente grandes* llamados *grupos abelianos libres de torsión* (o *TFABs*) - *estimuló* a los *investigadores*. Este *problema* fue *planteado* por 1ra. vez en *1989* por los matemáticos *Harvey Friedman* - *Lee Stanley* en un artículo [2] que, según *Paolini*, "*introdujo una nueva forma de comparar las dificultades* de los *problemas de clasificación para estructuras contables,* lo que *indica que algunas cosas son más complicadas de clasificar que otras*". ,and *Saharon Shelah*

Recien ahora, en un *documento publicado en línea* a principios de este año, *Gianluca Paolini* y su ex asesor postdoctoral, *Saharon Shelah* [1] de la Universidad Hebrea de Jerusalén, quienes finalmente han resuelto la cuestión relativa a los grupos abelianos libres de torsión (TFABs). Su artículo Enviado el 24 feb 2021 (v1), y su última revisión 16 jun 2021 (la versión, v2)]. Con el título: "Los grupos abelianos libres de torsión son Borel completos", donde se demuestra que el *espacio de Borel de grupos abelianos libres de torsión con dominio es Borel completo* es decir, la relación de isomorfismo en este espacio de Borel es lo más complicada posible, como una relación de isomorfismo. Esto resuelve un problema *abierto* por *décadas* en la *teoría descriptiva de conjuntos*, que se remonta al artículo seminal [2] sobre la reducibilidad de Borel, cuyos autores *Friedman-Stanley* de1989

Citado como: arXiv:2102.12371 [math.LO] (o arXiv:2102.12371v2 [math.LO] para la versión actual)



Crdito: Eric Nyquist.

"Sin duda es un documento importante, que resuelve un viejo problema de hace más de 30 años" (*Alexander Kechris*, del Instituto Tecnologíco de California) "[Su estrategia muestra] una increíble cantidad de inteligencia para transformar un problema complicado en algo más fácil" (*Chris Laskowski* de la Univ. de Maryland, quien ha colaborado con Shelah en aproximadamente una docena de artículos (aunque no en este). "Muchos lo habían intentado y no lo habían conseguido. Es genial tener esto resuelto".

[1] Con áreas de interés en: Lógica matemática. Teoría de modelos y Teoría de Conjuntos.

Gianluca Paolini de la Universidad de Turín (izquierda) y Saharon Shelah de la Universidad Hebrea de Jerusalén han respondido a la pregunta de décadas de antigüedad de lo difícil que es clasificar ciertos objetos matemáticos conocidos como grupos abelianos libres de torsión. Cortesía de Gianluca Paolini y Saharon Shelah.

A.1.1 Contar infinidades.

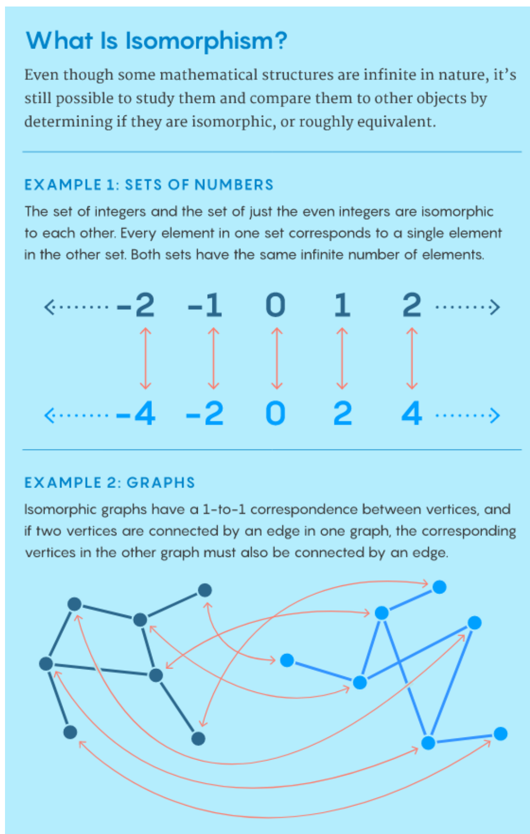
Debido a que el problema planteado por *Friedman-Stanley* involucra una clase de *estructuras numerables infinitas*, ayuda a entender cómo los matemáticos trabajan con cantidades tan aparentemente difíciles de manejar. Para empezar, ¿qué significa que una colección de estructuras sea "*contable*" (o numerable)? Los números naturales $(1, 2, 3, ...)$ son *infinitos* pero todavía se consideran *contables*, por la misma razón por la que a veces se les llama números con los que se cuenta o realiza el conteo. Si acudes a estos números en forma secuencial, prácticamente se contarán a sí mismos. (Por supuesto, estarás en ello por algún tiempo). La *cantidad de elementos* en el *conjunto de números naturales*, o su llamada 'cardinalidad', se etiqueta como *aleph-cero* ($\aleph_0$). Los *matemáticos consideran* que *cualquier conjunto que sea del mismo tamaño que el conjunto infinito de números naturales* también es *contable*.

En contraste, los *números reales* - que incluyen los *números naturales*, a los *enteros*, así como los *números racionales* e *irracionales* - también *son infinitos*, pero se clasifican como *incontables* (o *no numerables*). La razón principal es simple *hay demasiados de ellos*: Hemos sabido desde finales del s.XVIII que *más números reales* se abarrotan entre 0 y 1 que *todos los números naturales juntos*. Esta es otra forma de decir que *todas las infinidades no son creadas iguales*; algunas *son mayores* que otras. El *conjunto de números reales tiene una cardinalidad c mayor* que la de los *números naturales* ($\aleph_0$) porque hay más de ellos. Cualquier *conjunto numerable de números* es *finito* o, *si es infinito*, tiene una cardinalidad *aleph-cero*.

Entonces, *¿qué pueden hacer los matemáticos con estas ideas*? El artículo de Friedman-Stanley [2], así como el nuevo trabajo de Paolini - Shelah [3], se centraron en una *relación de equivalencia* - llamada *isomorfismo* - entre estructuras. Como ejemplo, considérese dos *grupos infinitos pero contables* de números:

... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ...
... -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6 ...

El *primer grupo* consta de los *enteros*; el segundo consiste sólo en los *enteros pares*. Estos dos grupos son isomorfos entre sí porque, entre otras cosas, tienen el *mismo número de elementos*, es decir, sus infinidades son la misma. Y cada elemento de un grupo corresponde a un solo elemento de otro conjunto o, como dicen los matemáticos, '*se asigna a*' un solo elemento. Además, la función utilizada para asignar de un grupo a otro también debe preservar las operaciones y propiedades del grupo (como *la ley asociativa de la suma*).



Cortesa: Samuel Velasco.

Los *grupos isomorfos* como estos *no son idénticos*, ya que *no tienen los mismos elementos*, pero tienen una *estructura paralela*: *cada elemento de un grupo está directamente relacionado con un solo elemento de otro grupo*. Una *función* puede *convertir* la *primera estructura* en *la segunda*, como en el *ejemplo anterior*, simplemente *multiplicando cada elemento de la primera* por 2. Las estructuras *isomorfas* tienen lo que *Paolini* llama '*la misma forma*', pero *no* exactamente *el mismo contenido.*

"Decir que *dos estructuras* son *isomorfas significa* que son *esencialmente iguales*", dijo Laskowski. "Podrías tener uno rojo o uno azul, pero en el fondo son la misma cosa". Esta *noción de isomorfismo* está en el corazón de este problema de décadas de antigüedad.

A.1.2 ¿Qué tanto es tantito? en nuestro caso ¿Qué tantote es tantotote? o ¿Qué tan complicado es complicado?

En su artículo de 1989, *Friedman - Stanley* [2] principalmente querían saber una cosa: *Dada una familia de estructuras contables, ya sean grupos infinitos de números* (como los *enteros* del ejemplo anterior) o los *grafos* (un *conjunto infinito* de *vértices* que pueden estar *conectados* por *aristas*), *¿qué tan difícil es averiguar si los objetos dentro de esa familia son isomorfos entre sí*?

Un caso tomado por *Friedman-Stanley* en [2] se refería a una familia de grafos, *cada uno con un número infinito - aunque contable -* de *vértices.* Para que 2 grafos contables sean *etiquetados* como *isomorfos*, debe haber de nuevo una correspondencia 1 a 1 entre los *vértices de un grafo* y los *vértices del otro.* Y si *dos vértices* están *conectados* por *una arista* en un grafo, los *vértices correspondientes en el otro grafo* también *deben estar conectados* por *una arista.*

Friedman - Stanley demostraron en [2] que *responder a la pregunta* de *si dos grafos numerables son isomorfos* es *altamente complicado*, *tan difícil como sea posible.* Eso *califica a la familia de todos los grafos contables* como '*Borel Completo*' (Estos matemáticos *acuñaron el término* en su artículo [2] de 1989 *debido a la dependencia de la llamada función de Borel, ideada por el matemático Émile Borel*)

Friedman - Stanley se preguntaron entonces: *¿Qué otras clases de objetos contables son Borel Completos*? Esa simple pregunta (*Laskowski*) "*es uno de los temas centrales de la teoría descriptiva de conjuntos*".

En los años posteriores a 1989 *Friedman-Stanley* y *otros* han *identificado* varias *clases de objetos matemáticos* que *satisfacen* los *criterios* de *completitud de Borel*, incluidos los *árboles* - un *tipo simplificado de grafo* - y los *órdenes lineales*, un *conjunto de números* (*naturales o reales*) dispuestos literalmente en un *orden lineal*, al *igual* que los *números* dispuestos en una línea recta numérica.

Pero entre los *muchos casos diferentes* considerados en el artículo [2] de 1989, *sólo uno* - en relación con los grupos abelianos libres de torsión ya mencionado - se *resistió* a *la clasificación por isomorfismo.* Para describir este desalentador caso término a término, se considera que los *grupos TFAB* son, fundamentalmente, *grupos numéricos. Cada TFAB* consiste de un *subconjunto numerable* de *números reales* que sigue *ciertas reglas de grupo*, como ser cerrado bajo suma y resta (de modo que *para cualquier número* p *y* q de este grupo, $p + q$ y $p - q$ también *aparecen en el grupo*). También *cumple* con la *ley conmutativa* (que significa: $p+q = q+p$), un *sello distintivo de los grupos abelianos.* Y finalmente, el término *libre de torsión* significa que si g es un elemento *distinto de cero en* *el grupo*, entonces $g+g$ nunca puede ser igual a cero, ni $g+g+g$, ni ningún sucesivo $g+g+\cdots+g$.

Durante 30 años (Shelah) los matemáticos se han preguntado: "Si se tiene *dos grupos abelianos libres de torsión [contables]*, y *se pregunta* si *son isomorfos*, *¿es este un problema fácil, un problema intermedio o es un problema difícil*?"

"*De todos los problemas planteados en el documento [2] de Friedman-Stanley, este fue el que tardó más en resolverse*" (Kechris) "*Así que es razonable llamarlo el más desafiante*". Se necesita un *nuevo enfoque* para de que rinda. *Shelah - Paolini* finalmente encontraron una manera de abrirse paso al inicio de este año.

A.1.3 Transformaciones entre estructuras

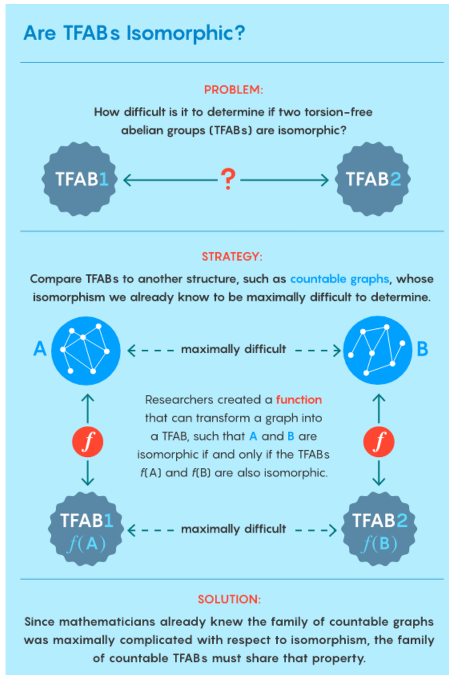
Eso precisamente hicieron utilizando el truco del matemático clásico: *reducir un problema intransigente a uno algo más manejable.* Por ello se dijeron si pudieran demostrar que los *TFABs* eran tan complejos como otra familia de estructuras que ya se sabe que son Borel Completas, por ejemplo, la *familia de grafos contables*, se probaría que los *TFABs* también lo eran. "Si quieres averiguar si una persona es la más alta del mundo, ¿cuál es la forma inteligente de hacerlo?" Preguntó *Paolini*. "*En lugar de verificar con todos en La Tierra, acudes a la persona que se considera la más alta y compruebas quién es el más alto*".

"Habiendo *decidido usar gráficos contables como criterio*" (Shelah) enfrentaron el siguiente paso crítico: *crear una función* (específicamente un tipo de función llamada de Borel, por haber sido construida por Emil Borel) que pudiera "*tomar un grafo* y *transformarlo* en un *grupo abeliano libre de torsión*". Su función tendría que aceptar un *grafo como su entrada* y *producir un TFAB como su salida, en el proceso de transferencia de información del gráfico al grupo.* Más en específico, la función f *tendría que satisfacer la siguiente relación*: *Dos grafos numerables*, G y H, son *isomorfos entre sí*, si y solo si $f(G)$ y $f(H)$ son *TFABs contables* que *también son isomorfos entre sí.*

La tarea no fue fácil, ya que no había ninguna "*tecnología*" *disponible* a la que la pareja de científicos *pudiera recurrir* para *vincular objetos matemáticos tan distintos*; tuvieron que inventarlo solo para este problema.

"*Todo el juego planteado se redujo a la construcción de esa función*" (*Laskowski*) "Es como comparar *peras con manzanas.* Los *grafos* y los *grupos* no tienen el *mismo vocabulario.* Así que lo que estás haciendo en situaciones como esta es *crear una correspondencia*".

"Y de nuevo, realmente se están *comparando grupos infinitos de peras* con *grupos infinitos de manzanas*". Pero afortunadamente (*Shelah*) *hallaron* una manera de *simplificar* las cosas. "*En lugar de tratar con todos los gráficos, puedes [usar] un grafo que sea universal*" -un grafo tan gigantesco que sus subgrafos, los grafos más pequeños contenidos dentro de él, incluyen a todos los grafos numerables posibles



Crdito: Samuel Velasco.

"*Resultó altamente impresionante la estrategia y la táctica escogidas*" (*Laskowski*) "*En lugar de tratar de asumir este problema directamente,* que *implicaría montones de grafos y grupos, simplemente elegiré* este *grafo contable madre, y cada grafo contable aparece bajo su resguardo*".

"Es así que, *Paolini - Shelah* fueron capaces de construir *la función necesaria*, *demostrando* de esta manera que los *grafos* y los *TFABs* tienen el piso parejo,osea, estan en una especie de pie de igualdad" (*Paolini*) "*Hallamos una manera de asociar grupos abelianos libres de torsión* con *grafos para que se preserve el isomorfismo*"

Y dado que los matemáticos ya sabían que la *familia de grafos contables* era *Borel Completa*, es decir, *máximamente complicada con respecto al isomorfismo*, lo que *significaba* que *la familia de TFABs contables* también era *Borel Completa.* Y así finalmente tuvieron su respuesta.

A.1.4 Nuevas selvas para explorar.

¿Este resultado podría conducir a algo más general? "*Eso está por verse*" (*Kechris*) "*pero es muy posible*".

De hecho, *Paolini-Shelah*, ya están estudiando la ampliación de su resultado. Después de haber resuelto el caso de los *TFABs contables*, ahora están estudiando el *conjunto más grande de TFABs incontables* (no numerables), que "*pueden tener una respuesta diferente*" (*Shelah*) Véase el articulito ¿De cuántos números podemos hablar? [5]

Hay razones para pensar que pueden averiguarlo."*Shelah tiene una teoría*" (*Laskowski*) "*de que ciertas preguntas se vuelven más fáciles cuando las empujas a una cardinalidad más alta*" - niveles más altos de infinito - *porque cuando los números se vuelven realmente* '*grandes*'*, la distancia crece entre números importantes,* como con *los números primos* y con *los cuadrados de enteros.* Como resultado, *Shelah* le dijo a *Laskowski*, "*el aire se vuelve más translúcido*", lo que *potencialmente* hace que sea *más fácil* para los matemáticos observar las cosas.

Mientras tanto, el documento [3] sobre los *TFABs contables* ya tiene *algunas implicaciones prácticas inmediatas.* "*Ahora sabemos que estás restringido en lo que puedes hacer*" (*Shelah*) Por ejemplo, *nunca se encontrará propiedades distintivas* (llamadas *invariantes*) de esta *familia de grupos* que *le indicarán automáticamente si dos TFABs son isomorfos.* Ésa es *una consecuencia directa* del hecho de que el *sistema de TFABs contable* es *Borel Completo.*

"Se ha podido demostrar que *no hay una manera fácil de determinar* [los isomorfismos] *en absoluto*" (*Paolini*) "*No hay término medio.Es lo más difícil posible*"

Este es un *conocimiento muy útil*, dado que la *búsqueda de invariantes* es *una preocupación importante entre los matemáticos.* "*Es como decir que la gente no debería pasar mucho tiempo tratando de inventar una máquina de movimiento perpetuo*" (*Shelah*) "*dado que ahora se sabe que una máquina de este tipo no se puede construir*".

Mirando hacia el futuro, es posible que los matemáticos descubran otras *clases de estructuras infinitas y contables, como grafos y TFABs*, que son *máximamente complicadas cuando se trata de determinar isomorfismos.* De la misma manera (Paolini), "*es concebible que podamos encontrar otras selvas en la Tierra que son tan complicadas como el Amazonas*". Pero, por supuesto, en *esta analogía*, ninguna podría *ser más complicada.*

El solo hecho de conocer ese aserto, y saber que los *TFABs* son *lo más complicados posible*, puede *simplificar*, o *descomplicar*, el panorama, tanto para los *taxónomos* como para los *teóricos descriptivos de conjuntos.*

A.2 REFERENCIAS.

Bibliography

[1] *Gianluca Paolini* Is a tenure-track assistant professor (ricercatore a tempo determinato di tipo B) at the Department of Mathematics “Giuseppe Peano” of the University of Torino (UNITO). Research interests: *Model theory and set theory*: classification theory, stability theory, abstract elementary classes, model theory of groups, model theory of incidence structures, homogeneous model theory, automorphism groups, Polish groups, independence phenomena in group theory. *Algebra and combinatorics*: algebraic combinatorics, combinatorial group theory, Coxeter groups, incidence structures, graph theory.

[2] *Harvey Friedman,* and *Lee Stanley;* **A Borel Reducibility Theory for Classes of Countables Structures***; The Journal of Symbolic Logic,* Vol. 54, No. 3 (Sep., 1989), pp. 894-914 (21 pages). JSTOR, www.jstor.org/stable/2274750. Accessed 9 Aug. 2021.

[3] *Gianluca Paolini,*and *Saharon Shelah*; **Torsion-Free Abelian Groups are Borel Complete;** [Submitted on 24 Feb 2021 (v1), last revised 16 Jun 2021 (this version, v2)], 27 pages, Subjects:-Logic (math.LO); Group Theory (math.GR), MSC classes:-03E15, 20K20, 20K30, Cite as:-arXiv:2102.12371 [math.LO] -(or arXiv: 2102.12371v2 [math.LO] for this version), Submission history, From: Gianluca Paolini [view email], [v1] Wed, 24 Feb 2021 15:54:18 UTC (38 KB), [v2] Wed, 16 Jun 2021 15:33:48 UTC (39 KB)

We prove that the Borel space of torsion-free Abelian groups with domain ■ is Borel complete, i.e., the isomorphism relation on this Borel space is as complicated as possible, as an isomorphism relation. This solves a long-standing open problem in descriptive set theory, which dates back to the seminal paper on Borel reducibility of Friedman and Stanley from 1989 [2].

[4] *Steve Nadis*; **Mathematicians Solve Decades-Old Classification Problem**; QM, Set Theory, 5 de agosto de 2021.

[5] Articulito ¿De cuántos números podemos hablar?, agosto de 2021 guillermo.gomez.alcaraz@gmail.com

A.3

Appendix A

The First Appendix

Appendix B

TORSION-FREE ABELIAN GROUPS ARE BOREL COMPLETE

GIANLUCA PAOLINI AND SAHARON SHELAH

Abstract. We prove that the Borel space of torsion-free Abelian groups with domain ■ is Borel complete, i.e., the isomorphism relation on this Borel space is as complicated as possible, as an isomorphism relation. This solves a long standing open problem in descriptive set theory, which dates back to the sem inal paper on Borel reducibility of Friedman and Stanley from 1989.

B.1 1. Introduction.

Since the seminal paper of Friedman and Stanley on Borel complexity [3], descrip tive set theory has proved itself to be a decisive tool in the analysis of complexity problems for classes of countable structures. A canonical example of this phenom enon is the famous result of Thomas from [14] which shows that the complexity of the isomorphism relation for torsion-free abelian groups of rank 1 6 n < ■ (denoted as ■=n) is strictly increasing with n, thus, on one hand, finally providing a satisfac tory reason for the difficulties found by many eminent mathematicians in finding systems of invariants for torsion-free abelian groups of rank 2 6 n < ■ which were as simple as the one provided by Baer for n = 1 (see [1]), and, on the other hand, showing that for no 1 6 n < ■ the relation ■=n is universal among countable Borel equivalence relations. As a matter of facts, abelian group theory has been one of the most important fields of mathematics from which taking inspiration for forging the general theory of Borel complexity as well as for finding some of the most striking applications thereof. The present paper continues this tradition solving one of the most important problems in the area, a problem open since the above mentioned paper of Friedman and Stanley from 1989. In technical terms, we prove that the space of countable torsion-free abelian groups with domain ■ is Borel complete.

As we will see in detail below, saying that a class of countable structures is Borel complete means that the isomorphism relation on this class is as complicated as possible, as an isomorphism relation. The Borel completeness of countable abelian group theory is particularly interesting from the perspective of model theory, as this class is model theoretically "low", i.e., stable (in the terminology of [12]). In fact, as already observed in [3], Borel reducibility can be thought of as a weak version of L■1,■-interpretability, and for other classes of countable structures such as groups or fields much stronger results than Borel completeness exist, as in such cases we can first-order interpret graph theory, but such classes are unstable, while abelian group theory is stable. Reference [8] starts a systematic study of the relations between Borel reducibility and classification theory in the context of ■0-stable theories.

Date: June 17, 2021.

No. 1205 on Shelah's publication list. Research of both authors partially supported by NSF grant no: DMS 1833363. Research of the first author partially supported by project PRIN 2017 "Mathematical Logic: models, sets, computability", prot. 2017NWTM8R. Research of the second author partially supported by Israel Science Foundation (ISF) grant no: 1838/19.

Coming back to us, we now introduce the notions from descriptive set theory which are necessary to understand our results, and we try to make a complete historical account of the problems which we tackle in this paper. The starting point of the descriptive set theory of countable structures is the following fact:

Fact 1.1. The set KL

■ of structures with domain ■ in a given countable languag

The appendix fragment is used only once. Subsequent appendices can be created using the Chapter Section/Body Tag.