

# El distanciamiento social y los problemas de empaquetamiento.

gga, jubilado UNAM. Julio 2020.  
CdMx

November 11, 2020

## Abstract

En sus partes esenciales es un material accesible a profesores de nivel Bachillerato y pretende ser una introducción al Problema matemático de empaquetamiento de esferas.

## Part I

# El distanciamiento social y los problemas de empaquetamiento.

A *Internet*, sin cuya existencia este escrito hubiera sido imposible. Dedicado, sobre todo, a los Profesores de nivel Bachillerato de las escuelas públicas.

## 1 Lo excelso y lo cochambroso.

El *distanciamiento social* también tiene que ver con las matemáticas, aunque les disguste a las ‘senadoras’ Li- ly y Bety-Xóchitl del partido de acción nacional (PAN), las cuales seguramente tienen la visión de que la matemática es pulcra, distinguida, precisa, rigurosa, exacta, verdadera, por ello acusan al vocero gubernamental, cercano a ella, del Covid19 López - Gatell de “mentiroso”; pero si sigues leyendo te darás cuenta que la matemática al acercarla a problemas reales es tan cochambrosa, aproximada, cambiante y mañosa como otras muchas actividades humanas, incluida la política a la manera como ellas la practican.

### 1.1 El distanciamiento social.

·Aquí no se discute la problemática global de la pandemia *Covid19* propiciada por el coronavirus *SarsCov2* , sino sólo a un pequeño aspecto del paulatino intento de re apertura de oficinas, talleres, fábricas, restaurantes y otros centros

de concentración de personas que plantea el problema de cómo planificar y efectuar de manera segura el regreso a la *nueva normalidad*, mientras se mantiene a las personas mínimo a 1.5 m. de distancia unas de otras (*distanciamiento social*). En particular, éste tipo de problemas se reducen a una pregunta que los matemáticos han venido estudiando durante siglos. Desde la antigüedad aparecen empaquetamientos de círculos y esferas <sup>1</sup>:

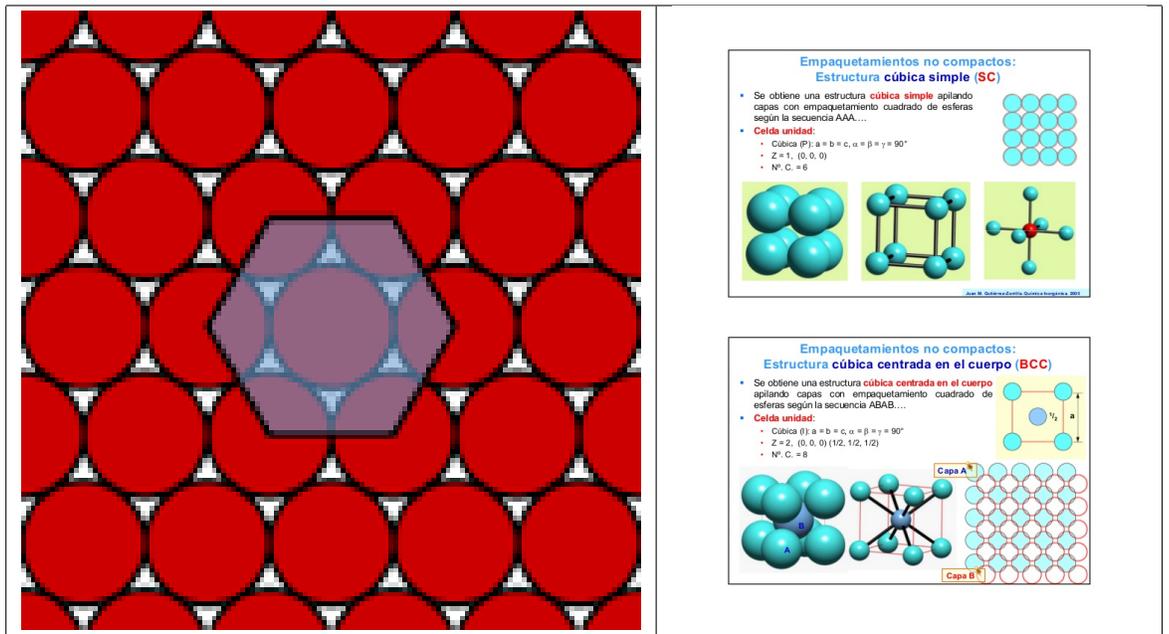


Fig.1,1A,. Empaquetamientos de esferas y círculos.

## 1.2 Distanciamiento social en un avión. Empaquetamiento de información.

·El empaquetamiento de esferas puede parecer un tema que sólo a un matemático loco le podría *deleitar* e incluso lo podría considerar un problema *bello*. ¿Quién más se podría entusiasmar por encontrar la forma más eficiente de

<sup>1</sup>Se considera que un *empaquetamiento de esferas* concierne a la disposición de esferas de idéntico tamaño relleno un determinado espacio, normalmente el espacio (euclideo) es el tridimensional ( $\mathbb{R}^3$ ). Por extensión se generaliza al bidimensiones ( $\mathbb{R}^2$ ), donde las esferas ahora son círculos, y a espacios  $n$ -dimensionales ( $\mathbb{R}^n$ ), donde las esferas son hipersferas. En el caso particular de dos dimensiones ( $\mathbb{R}^2$ ) también se puede plantear el empaquetamiento de círculos dentro de un espacio particular: otro círculo.

disponer círculos en el piso de un avión <sup>2</sup> o esferas en el espacio<sup>3</sup>?. Pero en efecto, a- hora mismo, en este momento, es mucha la gente en todo el mundo pensando en problemas de este tipo:



Fig.2, 2A y 2B. Relevancia del problema del avión. Posibilidades de las burbujas sociales.

### 1.3 Tránsito a la nueva normalidad.

·Determinar cómo reabrir edificios y espacios públicos de manera segura bajo dis- tanciamiento social es en parte un *problema geométrico*: si cada persona debe perma necer a un mínimo de 1.5 m. de distancia de todos los demás, entonces la pregunta de cuántas personas pueden sentarse en un salón de clases (un máximo de 15 alum- nos por clase a nivel de la primaria y de 20 por aula en el resto del sistema educativo no universitario por salón, como lo pretenden algunos sindicatos)



Fig.3 y 3A. El cálculo geométrico permite el no infringir la sana distancia en salones de clase, restaurantes, etc..

<sup>2</sup>Si no fuera por la emergencia sanitaria los únicos que podrían estar pensando en esos empaquetamientos serían los matemáticos. Pero ahora mismo muchísima gente en el mundo está pensando como garantizar que los aviones no seán un vector significativo para la propagación de la *covid-19*. Cuando ya se sabe de experimentos anteriores que 1 sólo infectado de por ejemplo influenza en un viaje largo de más de 8 hrs. puede terminar por infectar a la mayoría de los pasajeros, por el tipo de circulación del aire en una aeronave (vale decir que los aviones modernos de última generación ya no tienen el problema de recircular el mismo aire, ya que lo renuevan cada 2-3 minutos).

<sup>3</sup>El experimento entre países con pocos casos de contagios como *Australia* y *Nueva Zelanda* están planeando una "*burbuja para los viajes*", o corredor seguro, que permitirá el flujo de personas entre los dos países vecinos en medio de la pandemia mundial por coronavirus. Igual ocurre con la estrategia de extender la *burbuja social*, una vez erradicada la tasa de contagio por coronavirus, permitiendo incorporar a más personas al núcleo familiar que deben mantener esta relación de forma exclusiva, dado que al querer restablecer la nueva normalidad muchos sufren el impacto de la soledad y la ausencia de contacto físico. Por eso la estrategia autoriza a la población a ampliar su círculo de contactos.

·Cómo empaquetar círculos no superpuestos en una oficina o en un Café-Internet:

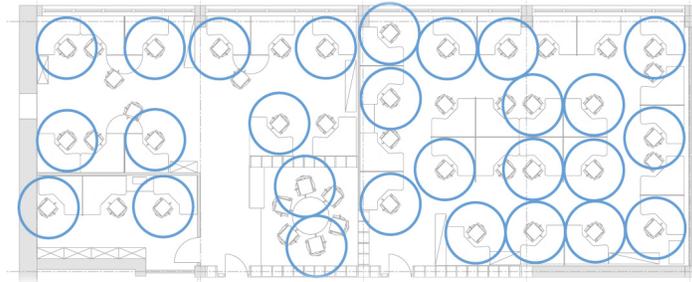


Fig. 4. Esquema de S. Velasco en oficina o Cafe Internet. En este caso de un total de 47 computadoras podrán usarse sólo 27.

·Por supuesto, que hay muchos más y de mayor importancia problemas a enfrentar en la *Covid19* que solo este problema de geometría. Pero el empaquetamiento de círculos y esferas juegan un cierto papel en el retorno a la *nueva normalidad*. Ud. mis mo puede plantearse ahora que regresa a su empleo cómo se vería su lugar de trabajo. Inténtelo!

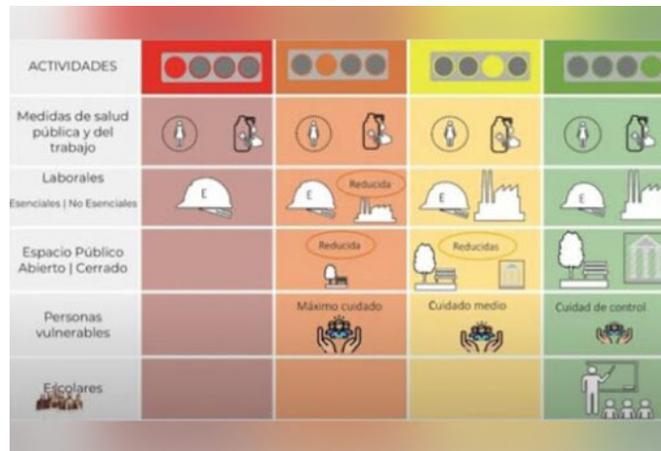


Fig.5. Semaforo de trnsito a la nueva normalidad.

#### 1.4 Envío de mensajes del espacio profundo.

En otro ámbito, al igual que en *espacios de mensajes abstractos en la Teoría de Información*. El envío de mensajes del espacio profundo a La Tierra ha

requerido del empaquetamiento de esferas de información:



Fig.5A. Una fotografía a color de Saturno y sus lunas, tomada el 3 de noviembre de 1980 por la nave espacial Voyager 1, y transmitida a Tierra utilizando un código binario de 24 bits.

Fig.5B. Una fotografía a color de La Tierra, el puntito azul tenue, tomada por la nave espacial Voyager 1, desde cerca de Saturno y transmitida a La Tierra utilizando el mismo código binario de 24 bits.

## 1.5 Estructuras Cristalinas.

En química se usan diferentes empaquetamientos de átomos en el modelaje de estructuras de *cristales* :

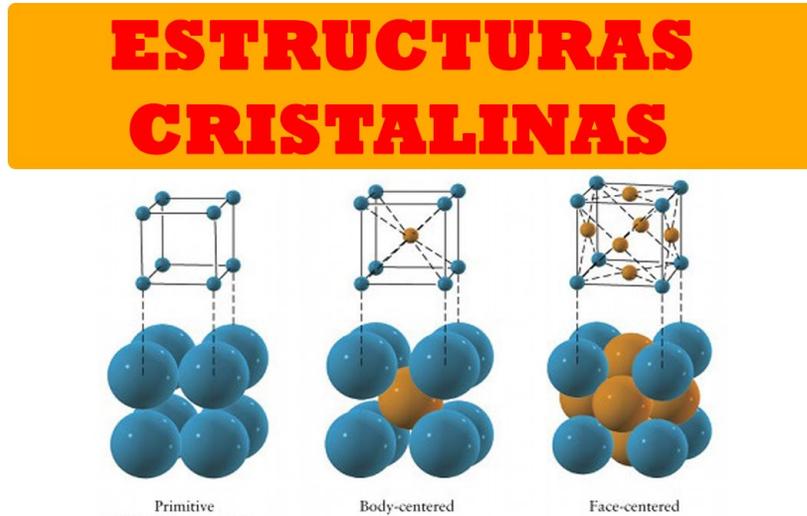
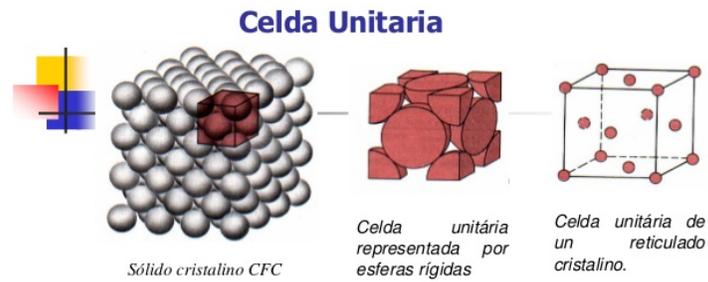


Fig.6. Empaquetamientos Cúbico primitivo. Cúbica centrada con nico tipo de tomo. Cúbica centrada en las caras.

Los tipos de cristales cúbicos: La forma *cúbica* se presenta en cristales, desde su forma más sencilla, la *cúbica simple o primitiva*, donde una capa se ubica encima de la otra, de manera tal que las esferas de una capa cubren totalmente las esferas de la capa inferior. Cada esfera acomodada en una celda cúbica simple, está en contacto con 6 esferas más (número de coordinación = 6). Éste número de coordinación se define como el número de átomos (o iones) que rodean a un átomo (o ión) en una red cristalina. Su valor es una medida de que tan compactas están empaquetadas las esferas. Entre mayor sea, más juntas estarán las esferas. La distribución *cúbica centrada en el cuerpo*, se distingue de un cubo simple en que la 2-da. capa de esferas se acomoda en los huecos (intersticios) de la 1-ra. capa y la 3-ra. lo hace en los huecos de la 2-da. Cada esfera, en este tipo de ordenamiento tiene un número de coordinación de 8 (cada esfera está en contacto con otras 8 esferas). Por último la distribución *cúbica centrada en las caras*, hay esferas en el centro de cada una de las seis caras, además de las ocho esferas de los vértices.

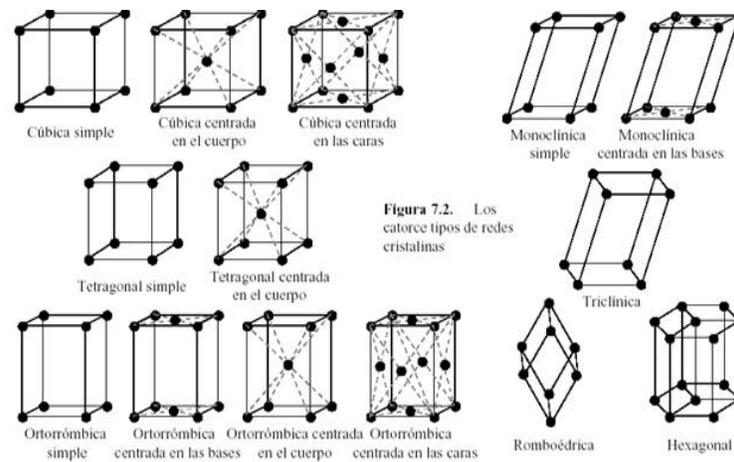
Como la *celda unitaria* de un sólido cristalino, está en contacto con otras celdas unitarias, la mayoría de los átomos se comparten entre las celdas. Por ejemplo, en la *cúbica simple*, cada átomo del vértice se comparte entre ocho celdas unitarias. Por ende, dentro de una celda cúbica, hay un equivalente a un esfera completa. En la *cúbica centrada en el cuerpo*, hay un equivalente a

dos esferas completas (una en el centro y la otra por los vértices) y en la *cúbica centrada en las caras*, hay un equivalente a cuatro esferas completas (tres de los seis átomos centrados en las caras y una de las ocho esferas de los vértices). ¡Cuestión de imaginarlas!

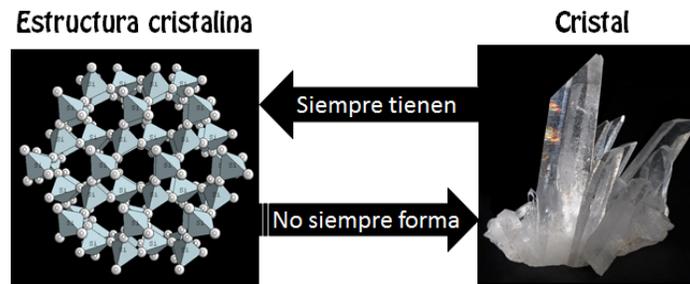


El concepto de celda unitaria es usado para representar la simetría de una determinada estructura cristalina.

Cualquier punto de la celda unitaria que sea trasladado de un múltiplo entero de **parámetros de red** ocupará una posición equivalente en otra celda unitaria.



Además tómesese en cuenta que:



### 1.6 El sonido simple.

·En el problema de sonido simple que ha ocupado a algunos de los mejores matemáticos de la historia, y todavía se está llevando a cabo una investigación emocionante, particularmente en dimensiones más altas a 1, 2 y 3.

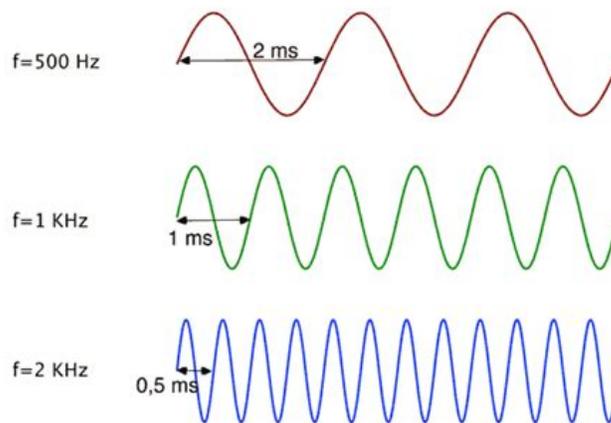


Fig. 7. Gráficas de sonidos simples.

### 1.7 El brinco a 8 y 24 dimensiones.

Muy ilustrativo, lo más reciente de los matemáticos al demostrar (*Mariana Vyasovska et al*) la manera de empaquetar esferas en el espacio de dimensión

8 y 24, ya que en 4 dimensiones no pudieron<sup>4</sup>.

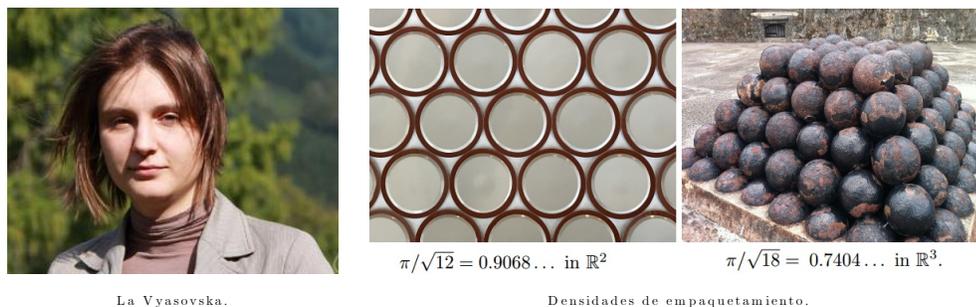


Fig.8. La ucraniana Vyasovska y empaquetamientos de esferas en dimensión 8 y 24.

## 1.8 Comunicaciones.

Una técnica esencial para optimizar los códigos de corrección de errores utilizados en *teléfonos celulares* o para la comunicación con *sondas espaciales* está basada en encapsular la información en esferas de 8 y 24 bits de información en espacios de 8 y 24 dimensiones respectivamente (la gran motivación). Por ello echemos un vistazo a algunas de las sorprendentes pequeñas y grandes complicaciones que surgen ya, al intentar empaquetar en el plano ( $\mathbb{R}^2$ ) y en el espacio ( $\mathbb{R}^3$ ) con las formas más simples: círculos y esferas [?].

<sup>4</sup>La matemática ucraniana Marina Vyazovska anunció el Día Pi, marzo 14 de 2016, La solución al empaquetamiento de esferas en 8 dimensiones. La red de raíces del grupo de *Lie* excepcional *E8* resulta ser el empaquetamiento más denso. Su demostración es tan elegante y fácil de entender que en pocos días inspiró la solución al problema en 24 dimensiones. Ahora resultando que la red de *Leech* es la óptima.

Por desgracia su método de demostración no se puede generalizar a un número arbitrario de dimensiones. Aún así, sus ideas podrían inspirar la solución en particular para la dimensión 4. Este problema, en apariencia tan sencillo, solo está resuelto en dimensiones 1, 2, 3, 8 y 24.

Su delicioso artículo “*The sphere packing problem in dimension 8*” en [arXiv:1603.04246](https://arxiv.org/abs/1603.04246) [math.NT]. Su generalización aparece en conjunto con otros autores “*The sphere packing problem in dimension 24*”, está en [arXiv:1603.06518](https://arxiv.org/abs/1603.06518) [math.NT]. Una explicación para legos de las ideas clave de estas demostraciones nos la presenta *Henry Cohn*, “*A conceptual breakthrough in sphere packing*” *Notices of the AMS* 64: 102-115 (Feb 2017), doi: 10.1090/noti1474, [arXiv:1611.01685](https://arxiv.org/abs/1611.01685) [math.MG].

La solución al problema del empaquetamiento de esferas en  $\mathbb{R}^n$  consiste en determinar la fracción de todo el espacio que puede ser cubierta por  $n$ -esferas idénticas con interiores disjuntos. Esta fracción se denomina *densidad de empaquetamiento* y su valor es el obvio en 1, 2 y 3 dimensiones. En dimensión 1 ( $\mathbb{R}^1$ ) el resultado es el trivial e igual a la unidad. En 2 dimensiones ( $\mathbb{R}^2$ ) el resultado es bien conocido, el empaquetamiento de monedas con densidad  $\pi/\sqrt{12} = 0.9068$  (su deducción más adelante); fue probado por *Thue* en 1890, aunque la demostración rigurosa fue de *Fejes Tóth* en 1940. En 3 dimensiones ( $\mathbb{R}^3$ ) el resultado también coincide con el esperado, el empaquetamiento de naranjas con densidad  $\pi/\sqrt{18} = 0.7404$  (deducción más adelante). Su demostración fue obtenida usando computadoras por *Hales* en 1998 (publicada en 2005) y verificada usando lógica formal más tarde por ??? en 2012.

Si su trabajo consiste en empaquetar naranjas en cajas o sentar a sus alumnos de manera segura bajo distanciamiento social, hay que tomar en cuenta el tamaño y la forma de su contenedor finito, dado que es una componente crucial del problema. Aunque para la mayoría de los matemáticos, la teoría del empaquetamiento de esferas y círculos lo conciben como el llenado de todo el plano o de todo el espacio. En 2 dimensiones, esto significa cubrir el plano con círculos del mismo tamaño que no se traslapen:



Fig.9, 9A, 9B. Formas de empaquetamiento de naranjas. Disposición de alumnos en el salón de clase. Tamaño y forma del contenedor.

La *solución óptima*, no se conocía para el problema de empaquetamiento de esferas en más de 3 dimensiones, hasta la aparición del trabajo de la Vyazovska, quien intento empaquetar esferas en 4 dimensiones, pero al toparse con enormes dificultades y con la motivación de los problemas de comunicación, donde el arranque son problemas de empaquetamiento de esferas para la dimensión 8 y 24, que aún se ignora (vale decir que sólo los casos 1, 2, 3, 8 y 24 coincide con su valor óptimo). Como puede apreciarse en la gráfica siguiente la *solución óptima* decrece exponencialmente con la dimensión. Mediante *programación lineal* basada en análisis armónico se pueden obtener cotas superiores a la *densidad*, como probaron *Cohn* y *Elki* en 2003<sup>5</sup>, y permiten obtener la curva que muestra la figura como cota superior de la densidad. Esta cota coincide con el valor exacto en dimensiones 8 y 24, un punto clave en la demostración de la

<sup>5</sup>Cohn y Elkies conjeturaron la existencia de funciones mágicas asociadas al problema de empaquetamiento óptimo. Estas funciones cumplen la igualdad entre la densidad óptima y la cota obtenida por optimización lineal. La gráfica muestra la función para dimensión 8 que construyó la Vyazovska usando “formas modulares”. Cada red del empaquetamiento tiene asociada una ‘función Theta’ dada por  $\Theta_{\Lambda}(z) = \sum_{x \in \Lambda} e^{\pi i |x|^2 z}$ . Esta función analítica cumple para  $\Lambda = E_8$ , que  $\Theta_{E_8}(-\frac{1}{z}) = z^4 \Theta_{E_8}(z)$  y que  $\Theta_{E_8}(z+1) = \Theta_{E_8}(z)$ . Y en 24 dimensiones, para la red de Leech  $\Lambda_{24}$  se cumplen identidades similares.

Gracias a estas propiedades es posible construir las funciones mágicas de *Cohn* y *Elkies*. Y con ellas la prueba de que dichos empaquetamientos son óptimos.

No se sabe si estos resultados para 8 y 24 dimensiones pueden ayudar en la futura demostración en 4 dimensiones. Pero no parece un camino fácil. Por supuesto, para otras dimensiones todo apunta a que el camino a seguir será muy diferente.

Se recomienda el artículo de *Cohn* en Notices of the AMS que resume muy bien la idea de la demostración de la *Vyazovska*. Por supuesto, los matemáticos más intrépidos disfrutarán leyendo el artículo original de la *Vyazovska*. Sirva esta entrada para motivar a su lectura.

Vyazovska. Sin embargo, se separa mucho para otras di- mensiones:

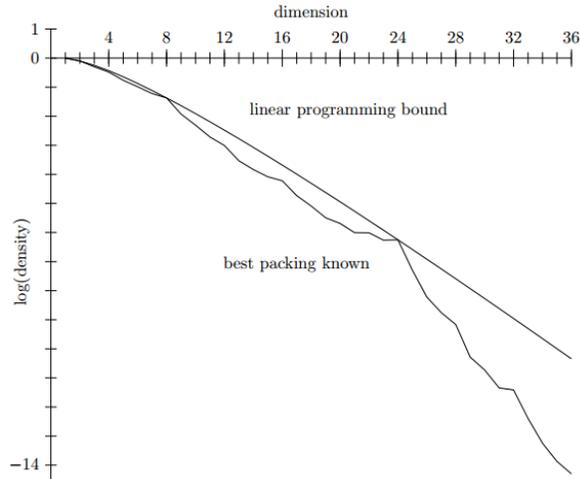


Fig.10. La densidad óptima es mayor de  $2^{-n}$  y menor de  $2^{(-0.599+o(1))n}$  (Kabatanskii y Levenshtein,1978) Como se observa la solución óptima decrece exponencialmente con la dimensión.

Una última idea asociada al empaquetamiento de esferas es la proporción del es- pacio llenado por esferas o la llamada *densidad de empaquetamiento*.

## 2 Empaquetamiento de círculos.

### 2.1 Empaquetamiento de círculos en el piso de un avión.

He aquí un ejemplo clásico de como empaquetar círculos en un avión:

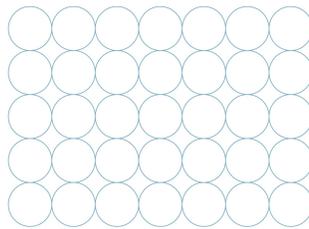


Fig.11 y 11A. El empaquetamiento de círculos en un avión, en mucho recuerda la vista de fondo de una caja de botellas de refresco.

Puedes imaginar este patrón repitiéndose en todas las direcciones, como un *mo- saico* infinito (como una *teselación* del plano) del piso de un avión. Los pequeños es- pacios entre los círculos (intersticios) significan que el avión no

está completamente cubierto, pero eso es de esperar con los empaquetamientos circulares. En cambio, si se está interesado en conocer qué porcentaje del avión está cubierto por los círculos <sup>6</sup>. Esto se conoce como la “*densidad de empaquetamiento*” de tal disposición de los círculos. En particular a la disposición anterior se le llama *empaquetamiento cuadrado* de los círculos y para ello hay una justificación: se puede imaginar los centros de los círculos como vértices de cuadrados. Y los cuadrados mismos tejen una teselación (un mosaico) del plano:

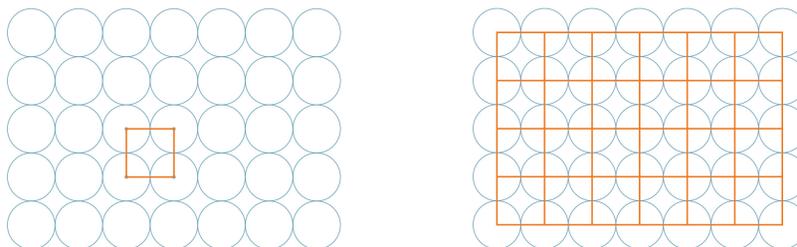


Fig.12. En éste equipamiento los centros de 4 círculos contiguos forman cuadrados. Fig.12A. Y éstos se generalizan en todas las direcciones hasta formar una teselación (o mosaico) del plano.

La *simetría* de esta teselación (mosaico) cuadrada facilita el análisis del mismo. Dado que estos cuadrados cubren todo el plano de manera regular, entonces el *porcentaje* del plano cubierto por los círculos es el mismo *porcentaje* de los cuadrados correspondientes, sin importar que tan grandes o pequeños sean, cubiertos por círculos (¡este es el argumento central del razonamiento!). Así que echémosle un vistazo más de cerca a sólo uno de esos cuadrados:

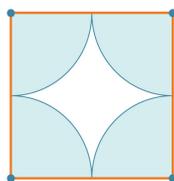


Fig.13. Un sólo cuadrado facilita el análisis del porcentaje de círculos en dicho cuadrado.

Supóngase que cada círculo tiene radio  $r$ . Eso significa que el cuadrado tiene una longitud lateral de  $2r$ . Cada uno de los cuatro vértices del cuadrado está cubierto por un cuarto de círculo, luego en todo el cuadrado está contenido un círculo completo, por lo cual el porcentaje de cada cuadrado cubierto por

<sup>6</sup> Es típico de los empaquetamientos el proponerse encontrar en él las esferas (los círculos) que logran llenar la mayor proporción posible de su espacio. A esta proporción del espacio (del plano) llenado por las esferas (por los círculos) se le llama *densidad del empaquetamiento*.

círculos está dado por solo la razón del:  $\frac{\text{ÁreaDeUnCírculoCompletoDeRadio}r}{\text{ÁreaDeUnCuadradoDeLado}2r}$ , esto en símbolos matemáticos es:

$$\frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$$

Es así, que cada cuadrado tiene aproximadamente 78.54% cubierto por círculos, por lo que, según el argumento mencionado del mosaico, todo el plano está cubierto aproximadamente por el 78.54% de círculos. Esta será la densidad del *empaquetamiento cuadrado*. (Hay que darse cuenta cómo todo lo que depende del radio  $r$ , o sea  $r^2$  se cancela (bajo la hipótesis de que  $r \neq 0$ ) y por ello  $r$  ya no aparece en la respuesta obtenida: esto tiene sentido porque no importa cuán grande o pequeño sea el círculo, el cuadrado seguirá conteniendo cuatro cuartos de círculo, sin importar el tamaño de su radio  $r$ ).

Ahora, si alguna vez has intentado apilar latas de refresco en los costados de esta disposición, solo verás cómo se deslizan y también se deslizan en los huecos, por eso sabes que hay otra forma de empaquetamiento de círculos en un avión, a saber:

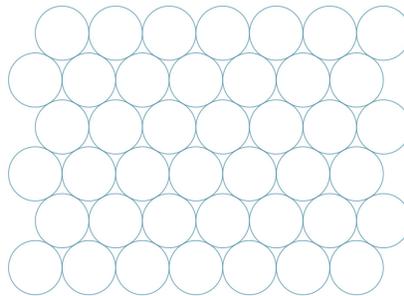


Fig.14. Este nuevo empaquetamiento no los dispone apareados por columnas, sino cada renglón se dispone en los intersticios de la fila anterior.

Al tomar un enfoque similar al del empaquetamiento cuadrado, se puede imaginar y representar a los centros de los círculos en esta disposición como *vértices de hexágonos regulares* incluido un círculo adicional en el centro del hexágono. Llamamos a esto un *empaquetamiento (embalaje) hexagonal*. Este arreglo parece llenar los vacíos de manera más eficiente que el empaquetamiento cuadrado. Para verificarlo, se pueden comparar sus *densidades de empaquetamiento*. Al igual que en el caso de los cuadrados, los hexágonos recubren el plano, por lo cual se puede determinar la *densidad de empaquetamiento* de

éste nuevo arreglo con el análisis de un solo hexágono

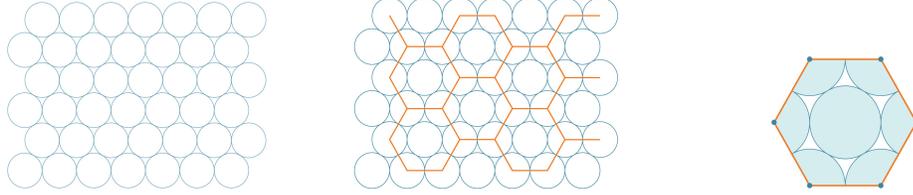


Fig.15. En este nuevo empaquetamiento cada renglón se dispone en los intersticios de la fila anterior. Fig.15A. Y al fijarse en los centros de cada círculo se forman hexágonos, que pueden extenderse en todas las direcciones forman dose una teselación (mosaico) de hexágonos. Fig.15B. De nuevo se puede fijar la atención en uno sólo de ellos.

Y otra vez ¿Cuánto de este hexágono está cubierto por círculos? Como el ángulo interior de un hexágono regular es de  $120^\circ$ , y se puede observar que hay un tercio de un círculo en cada uno de los seis vértices del hexágono. Eso suma dos círculos con plenos, y agregando el círculo que está en medio, hace en total tres círculos completos. Entonces cada hexágono está cubierto por tres círculos completos. Si cada círculo tiene radio  $r$ , es un área total de  $3\pi r^2$ .

¿Cómo se compara eso con el área del hexágono? El área de un hexágono, cuya longitud por lado es  $s$ , realmente visto con otros lentes, es el área de la suma de seis triángulos equiláteros de longitud lateral  $s$ , y cada triángulo tendrá un área  $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{s \cdot h}{2}$ .  $s^2 = h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2$   $h = \sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{s \cdot \sqrt{3}}{2}$ . Entonces el hexágono tiene por área  $6 \times \frac{s^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3s^2 \sqrt{3}}{2}$ . Y por otro lado, la longitud lateral del hexágono que interesaba analizar en este mismo empaquetamiento (embalaje) es  $2r$ , luego su área será:

$$\frac{s^2 3\sqrt{3}}{2} = \frac{(2r)^2 3\sqrt{3}}{2} = \frac{4r^2 3\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}r^2$$

Así que ahora se puede calcular el porcentaje del área del hexágono que está cubierto por círculos (dividiendo el  $\frac{\text{ÁreaDeTresCírculos}}{\text{ÁreaDelHexágono}}$ ), esto es en símbolos:

$$\frac{3\pi r^2}{6\sqrt{3}r^2} = \frac{3\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0.9069$$

Cada hexágono está cubierto en un 90.69% por círculos, lo que hace que este empaquetamiento sea mucho más eficiente que la disposición cuadrada. (Obsérvese cómo el radio del círculo volvió a simplificarse, como era de esperarse). De hecho, ningún otro arreglo resulta ser más eficiente.

Probar esto no fue fácil: matemáticos famosos como *Joseph Louis Lagrange* y *Carl Friedrich Gauss* comenzaron éste trabajo a fines del siglo XVIII y principios del XIX, pero el problema no se resolvió por completo hasta la década de 1940, cuando todos los arreglos posibles, tanto regulares como irregulares

fueron tratados rigurosamente. Por qué tomó tanto tiempo manejar el problema en 2 dimensiones, donde las cosas son relativamente más fáciles de visualizar, es una seria advertencia de lo que vendría en dimensiones más altas.

### 3 Empaquetamiento de esferas.

·Empaquetar esferas en 3 dimensiones es un problema mucho más complicado, aunque comparte algunas características con el caso bidimensional. Por ejemplo, los empaquetamientos bidimensionales que fueron descritos están construidos a partir de una sola capa. En el *empaquetamiento cuadrado*, se coloca cada nueva capa directamente encima de la anterior:

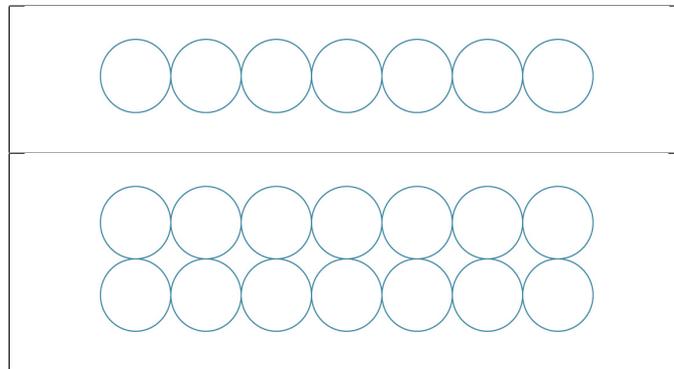


Fig.16 y 16A. El empaquetamiento cuadrado se forma agregando a cada capa una nueva capa exactamente encima de la anterior.

Mientras que en el *empaquetamiento hexagonal*, cada nueva capa se pone en los espacios intersticiales de la anterior:

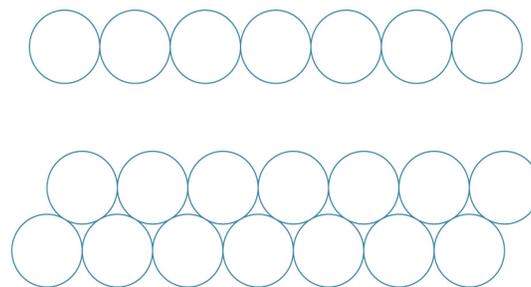


Fig.17 y 17A. El empaquetamiento hexagonal se forma agregando a cada capa una nueva capa exactamente en los espacios intersticiales de la anterior.

Por ello es que se obtienen diferentes empaquetamientos dependiendo de cómo se ubiquen las copias en cada capa.



Fig.20. La 2da. capa al colocarla sobre los espacios intersticiales de la 1ra. capa, no cuadran con exactitud, dejando brechas en las dos capas que se alinean, creando pequeños canales a través del empaquetamiento.

Al colocar una tercera capa, se tiene dos opciones. Una es alinear los huecos y mantener abiertos los canales. Aquí abajo hay una vista lateral de tal disposición. Para mantener abiertos los canales, colóquense las esferas de la tercera capa directamente encima de las esferas en la primera, como se muestra también abajo. Esta disposición de esferas se llama “*empaquetamiento hexagonal cerrado*” (EHC), y se puede ver los pasillos abiertos cuando se mira hacia abajo a través del empaquetamiento:

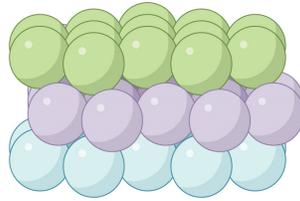


Fig.21. Al colocar la 3ra. capa, la 1-ra. opción, es alinear los huecos y mantener abiertos los canales.

La otra opción para la tercera capa es cerrar los pasillos. Colocando las esferas en la tercera capa directamente encima de los espacios intersticiales de la primera. A esta opción se le conoce como el arreglo “*cúbico centrado en las caras*” (CCC) o “*cúbico cerrado*”. Ya que mirando de arriba hacia abajo no se puede ver nada a través del empaquetamiento:

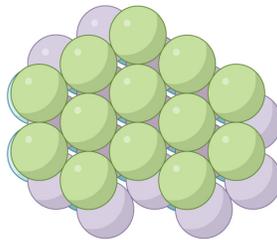


Fig.22. Al colocar la 3ra. capa, la 2-da. opción, es cerrar los pasillos. Esto es colocar las esferas en la tercera capa directamente encima de los espacios intersticiales de la primera.

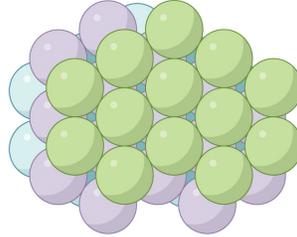


Fig.23. La otra vista de la segunda opción.

Los 2 arreglos de las opciones son similares, pero a su vez son fundamentalmente diferentes. Aparecen en química, donde describen los arreglos de los átomos en diferentes materiales. (Por ejemplo, los metales como la *plata* y el *oro* tienen la estructura CCC, mientras que los metales como el *zinc* y el *titanio* son de estructura EHC) Y al continuar con cualquiera de los patrones, se puede empaquetar el espacio con esferas: en una disposición EHC, cada capa tiene esferas en exactamente la misma posición, mientras que en la CCC cada 3-er. capa tiene esferas en la misma posición. En realidad, se pueden crear infinitos empaquetamientos diferentes al mezclar los patrones, ¡pero lo más notable de los patrones EHC y CCC es que ambos producen empaquetamientos óptimos! No solo tienen la misma densidad de empaquetamiento que es  $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.7405$ , sino estos son los empaquetamientos de esferas más densos posibles en el espacio tridimensional.

*Johannes Kepler*, el famoso matemático y astrónomo, conjeturó esto en 1611, pero fue hasta 1998 que el matemático *Thomas Hales* proporcionó una prueba completa.

El espacio extra para moverse en 3 dimensiones brinda más formas de empaquetamiento de esferas de manera eficiente. Y el embalaje se vuelve aún más complicado a medida que agregamos dimensiones: hay más espacio para más posibilidades, y también es más difícil de visualizar. No solo eso, ¡las esferas se hacen más pequeñas en dimensiones más altas! Esto en efecto, puede visualizarse:

Considérese de nuevo, para fijar ideas, un círculo inscrito en un cuadrado unitario. El círculo se toma de radio  $r = \frac{1}{2}$ , entonces la razón  $\frac{\text{DelÁreaDelCírculo}}{\text{AlÁreaDelCuadrado}}$  es:

$$\frac{\pi r^2}{s^2} \Big|_{r=1/2, s=1} = \frac{\pi(\frac{1}{2})^2}{1^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$$

que coincide con la densidad del empaquetamiento cuadrado en 2 dimensiones.



Fig.24. Comparación del área del círculo al área del cuadrado en el plano respecto del; Fig.24A. Volumen de la esfera al volumen del cubo en 3 dimensiones.

Ahora considérese el volumen de una esfera inscrita en un cubo unitario. De nuevo tómesese la esfera de radio  $r = \frac{1}{2}$ , entonces la relación del volumen de la esfera a la del cubo, dada por  $\frac{\text{VolumenDeLaEsferaUnitaria}}{\text{AlVolumenDelCuboUnitario}}$  es:

$$\left. \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{s^3} \right|_{r=1/2, s=1} = \frac{\frac{4}{3}\pi(\frac{1}{2})^3}{1^3} = \frac{4}{3} \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{6} \approx 0.5236$$

·Obsérvese que la parte del cubo ocupado por la esfera inscrita en 3 dimensiones es menor que la parte del cuadrado ocupado por el círculo inscrito en 2 dimensiones. Este patrón continúa: a medida que aumenta la dimensión, esta relación disminuye. Es decir, las esferas  $n$ - dimensionales ocupan cada vez menos espacio  $n$ - dimensio- nal a medida que  $n$  se hace más grande.

Esto último se puede demostrar usando Cálculo, pero también se puede entender solo pensando en las esquinas del  $n$ -cubo (hipercubo). En cada dimensión se puede inscribir una esfera  $n$ - dimensional dentro de un cubo  $n$ - dimensional. La esfera toca las caras del cubo pero no alcanza las esquinas, por lo que alrededor de cada esqui- na hay una región que está dentro del cubo pero fuera de la esfera. Pero una caja  $n$ - dimensional tiene  $2n$ - ortoesquinas, lo que significa que a medida que  $n$  aumenta, el número de regiones descubiertas por la esfera crece exponencialmente. No solo eso, sino que la distancia entre las esquinas y la esfera también crece. Esto significa que a la larga el espacio dentro del cubo  $n$ - dimensional pero fuera de la esfera  $n$ - dimen sional empequeñece el espacio que ocupa la esfera.

### 3.1 Cómo usar una esfera para hablar con Marte:

China acaba de lanzar en julio de 2020 su primera sonda a Marte, Tianwen-1. Se- gún los científicos la nave tardará unos siete meses en llegar a su destino. De- spués de posecionarse en Marte, la sonda explorará la superficie y la estructura interna del planeta rojo mediante su equipo de radar a bordo. Un radar capaz de perforar el sue- lo, examinar el suelo y el hielo marcianos, y recopilar datos sobre la estructura debajo de la superficie del planeta a profundidades de entre 10 y 100 metros. Y por fin enviar los datos a la Tierra, pero,..., para no hacerles el cuento tan largo: El problema de la corrección de errores en canales de comunicacón ruidosos como este es exactamen- te el problema del empaquetamiento

de esferas. Las necesidades competitivas se trajeron en un problema geométrico en el que los bits de los mensajes enviados deberían corresponder a las coordenadas espaciales, con cada palabra de código el punto central de una esfera en un espacio de 24 dimensiones. Si las esferas se superponen las palabras de código asociadas ya no serían reconocibles de forma unívoca. Para optimizar la cantidad de datos que podrían transmitirse y luego corregirse, la pregunta fue: ¿Cuán densamente podrían empaquetarse las esferas en un espacio de 24 dimensiones?

Por otro lado, en China también hay “reality shows”, se anunció el lanzamiento de una campaña global de nombres para el ‘rover’ que viaja a bordo de Tianwen 1.

Los problemas de empaquetamiento de esferas subyacen en casi todas las comunicaciones digitales y su almacenamiento, desde teléfonos celulares hasta CD e Internet. Pero los códigos óptimos para estas formas de transmisión corresponden al paquete más denso de esferas en dimensiones más allá de las tres de la experiencia cotidiana, y los problemas de dimensiones superiores han resultado formidables (diría Trump). Aún más difíciles de resolver son los empaquetamientos más densos de esferas de diferentes tamaños o formas más afiladas, problemas de dos y tres dimensiones relevantes para la Ciencia de Materiales y la Fabricación Industrial. Los matemáticos han lidiado con problemas de empaquetamiento durante siglos, atraídos por su dificultad tanto como por sus aplicaciones en el mundo real, pero cada caso ha provocado su propio tipo especial de dolor de cabeza. Es ridículo, pero niquiera se sabe la mejor manera de empaquetar pentágonos en un avión.

Ya desde el lanzamiento de la nave espacial gemela del *Voyager*, los ingenieros de la NASA se enfrentaron a una pregunta difícil: cuando las sondas lleguen a Júpiter y Saturno, ¿cómo se transmitirían fotos a color a la Tierra usando aproximadamente la energía de la potencia de un foco? Era una tarea que requería una parsimonia extrema: cada imagen tendría que convertirse en una serie de secuencias binarias de 24 bits, llamadas “palabras de código” y enviarse al espacio a través de ondas de radio que significaban cada 1 ó 0 por la posición de su Pico y Valle. Pero se sabe que la transmisión de datos es ruidosa. A medida que las palabras de código viajaban hacia la Tierra, los ingenieros sabían que algunos 1 se distorsionarían en 0 y otros 0 en 1. Al reconstruir las fotos icónicas del *Voyager*, tendrían que poder corregir el código.

Las sondas *Voyager* necesitarían usar palabras de código cuyas secuencias fueran lo suficientemente distintas como para ser reconocibles incluso con algunos bits corruptos. Pero el uso de palabras de código menos distintas proporcionaría más posibilidades dentro del límite de 24 bits, lo que permitiría una transmisión de datos más rápida. Estas necesidades competitivas se tradujeron en un problema de geometría en el que los bits correspondían a coordenadas espaciales, con cada palabra de código el punto central de una esfera en un espacio de 24 dimensiones. Si las esferas se superponen, las palabras de código asociadas ya no serían reconocibles de forma exclusiva. Para optimizar la cantidad de datos que podrían transmitirse y luego corregirse, la pregunta fue: ¿Cuán densamente podrían empaquetarse las esferas en un espacio de 24 dimen-

siones?



Fig.25. *Frank Vallentin*, profesor de matemáticas aplicadas y ciencias de la computación en la Universidad de Colonia en Alemania.

·Si la idea intuitiva planteada con el razonamiento de las esquinas en  $n$ -dimensiones sobre la reducción del tamaño de las esferas no fuera lo suficientemente *extraña*, los matemáticos que empaquetan esferas notaron algo aún más sorprendente en las dimensiones 8 y 24. Las esferas en esas dimensiones se redujeron la cantidad justa para poder llenar los ‘lugares’ dejados con nuevas esferas, produciendo ‘*empaquetamientos ultradensos*’ de esos espacios de dimensiones superiores. Se conjeturó que estos arreglos especiales eran *óptimos*, pero los matemáticos no lo sabían con certeza hasta 2016, cuando *Marina Vyazovska* lo demostró para el empaquetamiento de dimensión 8. Y una semana más tarde, la *Vyazovska* y sus cuates que la rodeaban extendieron su método al caso en 24 dimensiones. El trabajo de la *Vyazovska* significa que ahora se conocen ya las formas más eficientes de empaquetamiento de esferas en las dimensiones 1, 2, 3, 8 y 24.

Pero, no se decepcionen, todavía hay muchísimo trabajo por hacer en las otras dimensiones. Así que compren sus *naranjas* (¡ahora que empiezan a bajar de precio!) y sus latas de refrescos (antes de que el dipolio de sus fabricantes en México la *Coca-Pepsi-Cola et al* las retiren del mercado porque López-Gatell los quiere obligar a decir, en un hecho sin precedente en México (¡imagínense!), en un hexágono al frente que sus productos contienen azúcar en demasia) y comienza a experimentar. Quizás seas tú quien ayude a llenar todos los huecos aún existentes. ¡Ánimo!, si cunde el pánico compárate no con las senadoras del Pan Lily y Gaby-Xochitl, sino con la *Vyazovska*, que también es mujer, ¡eso reconforta!

### 3.2 Más aún.

Ahora, una nueva técnica computacional ha permitido avances en varios casos importantes que se habían resistido durante décadas. Los matemáticos *Frank Vallentin* (Alemania) y *Christine Bachoc* (Francia) desarrollaron la herramienta, llamada “*límites de programación semidefinidos*” (2008) basándose en un documento anterior de *Alexander Schrijver* de (Países Bajos). Esta técnica proporciona estimaciones aproximadas del embalaje más denso de objetos mediante la identificación de un límite superior que puede reducirse gradualmente hacia la solución exacta a medida que el cálculo del límite se vuelve cada vez más detallado. Esta herramienta está produciendo nuevos conocimientos sobre

la geometría subyacente de los problemas de empaquetamientos al ayudar a abordar si la *simetría* es la característica central de los empaquetamientos más densos.

*Vallentin* y sus colegas utilizaron recientemente la programación semidefinida para bajar el techo en el paquete más denso de pentágonos en dos dimensiones espaciales y el de las esferas en cuatro, cinco, seis, siete y nueve dimensiones. Se considera que éste fue un gran avance al dejar ir más allá de las técnicas analíticas que se tenían anteriormente (*Cohn*), quien descubrió los mejores límites en esas dimensiones.

Los avances incrementales logrados hasta el momento tienen pocas aplicaciones prácticas, pero los investigadores dicen que podrían presagiar grandes saltos. En este momento, se trata de desarrollar más el método en sí (*Vallentin*).

### 3.3 Naranjas en una caja.

Los problemas de embalaje son algunos de los más antiguos en geometría. Siglos de esfuerzo han demostrado que, aunque estos problemas son fáciles de entender y de hasta de adivinar su solución, pero son muy resistentes (imposibles) de resolver rigurosamente utilizando las leyes matemáticas.

*Johannes Kepler* conjeturó en 1611 que la disposición más densa de las esferas en tres dimensiones es la forma en que las naranjas se apilan en una caja, conocida como empaquetamiento cúbico centrado en la caras. Este arreglo, que ocupa un poco más del 74 por ciento del espacio, es obviamente correcto, pero con un número infinito de arreglos de esfera posibles, el problema lleva el poder de la lógica matemática al límite: solo en 1998 el matemático *Thomas Hales* demostró rigurosamente la *conjetura de Kepler*, y su prueba involucraba 50,000 líneas de código de computadora.

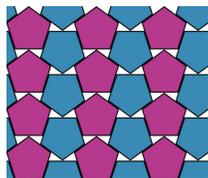
La *programación semidefinida* mejora una técnica llamada *programación lineal*, que ha sido el método de descubrimiento del límite superior elegido durante décadas. Con la *programación lineal*, los investigadores enumeran las restricciones sobre las posibles correlaciones entre pares de objetos, como la regla de que dos esferas no pueden tener menos del doble de su radio de separación. Luego, un algoritmo busca la densidad más alta que satisfaga la lista de restricciones, produciendo un límite superior al descartar un rango de densidades. En la *programación semidefinida*, la lista también puede incluir restricciones en tripletes, cuatrillizos o colecciones más grandes de objetos, proporcionando una descripción más rica de la geometría, lo que produce mejores límites.

"La gran compensación es entre la complejidad de los límites y qué tan cerca estamos que se hagan realidad" (*Cohn*).

La nueva herramienta ya ha permitido a los investigadores mejorar la optimización de códigos binarios similares a los utilizados por la nave espacial *Voyager*. En un par de documentos publicados en mayo de 2012 y noviembre de 2013 en *Transacciones IEEE* sobre teoría de la información, dos grupos han mejorado los límites de los códigos que varían en longitud de 18 a 28 bits.

Pero aparte de la comunicación en el espacio profundo, los códigos de esas longitudes tienen solo unas pocas aplicaciones. La transmisión digital más moderna implica paquetes de datos mucho más grandes, y la eficiencia de la transmisión corresponde al empaquetamiento de esferas en cientos o miles de dimensiones espaciales. En esos casos, los empaquetamientos más densos conocidos, conjeturados en 2006 por los profesores de la Universidad de Princeton *Salvatore Torquato* y *Frank Stillinger*, son escasos, con esferas que ocupan solo unas pocas milésimas de porcentaje de espacio. "No hay pruebas en dimensiones superiores de cuál es el embalaje más denso" (*Torquato*) "Existe la posibilidad de que a medida que aumente la dimensionalidad del espacio, que de hecho el desorden termine superando el orden y que el empaquetamiento más denso sea un *arreglo aleatorio*".

Sin embargo, los arreglos desordenados son difíciles de definir matemáticamente y usar como códigos de corrección de errores. Los investigadores se han esforzado por encontrar una red de esferas densa y simétrica en grandes dimensiones desde que el matemático estadounidense Claude Shannon reveló la relevancia del problema para la transmisión de datos en su clásico artículo de 1948 que fundó la teoría de la información. Los límites de *programación semi-definida* podría ser un enfoque útil para determinar las densidades del estadio que podrían alcanzarse, dijeron *Vallentin* y otros investigadores.



Cortesía de Toby Hudson.

Fig.26. Una disposición de pentágonos se cree, pero no se ha demostrado, que es la más densa posible.

La herramienta también está ayudando a eliminar problemas de embalaje más generalizados. *Vallentin* y sus colegas aplicaron recientemente su algoritmo para encontrar algunos de los primeros límites superiores en el empaquetamiento más denso de esferas de dos tamaños diferentes, un problema relevante para el estudio de muchos cristales y códigos en los que algunos mensajes son más importantes que otros. También mostraron que los pentágonos no pueden llenar más del 98 por ciento del espacio bidimensional.

Conseguir límites superiores para este tipo de problemas ha sido extraordinariamente desafiante (*Yoav Kallus* - físico de materia condensada de *Princeton*) En 2017 *Kallus* y colaboradores demostraron que los objetos piramidales llamados *tetraedros* no pueden llenar más del 99.99999999999999999999999999999974 por ciento del espacio. Es obvio, no esperar que el embalaje llegue tan alto, es muy difícil obtener un límite superior.

El algoritmo de *Vallentin* lo está perfeccionando con la esperanza de eventualmente reducir el techo de tetraedros más cerca de la *densidad óptima* (Hasta ahora, el arreglo más denso conocido, descubierto en 2010 por *Sharon Glotzer* y sus colegas, ocupa el 85.63 por ciento del espacio). El algoritmo también se aplicaría a una variedad de otras formas. El objetivo final sería: darle a la computadora tu forma y ella regresar te un límite superior ‘razonable’ de cuán denso puedes empaquetarlo (*Vallentin*).

### 3.4 Optimización universal vs. simetría.

Teniendo en cuenta la complejidad de los problemas de empaquetamientos en 2 y 3 dimensiones, ¿cómo pudieron las sondas Voyager transmitir fotos usando palabras de código de 24 dimensiones? Afortunadamente para la NASA, entre los problemas de embalaje que se han resuelto se encuentra el caso especial de las redes de esferas en 24 dimensiones. En la dimensión 24, hay una retícula increíblemente simétrica y densa llamada ‘*retícula Leech*’ (Torquato). Descubierto en la década de 1960 por el matemático británico *John Leech*, este arreglo ajustado de esferas le dio a las sondas Voyager una rica paleta de 4,096 palabras de código para usar en la transmisión de datos. Pero la *red Leech* hace más que representar el empaquetamiento más denso de esferas en 24 dimensiones. Pertenecen a una nueva clase de estructuras geométricas que son los arreglos preferidos de los objetos que interactúan de varias maneras, no solo como esferas que no pueden superponerse. Estas óptimas universales ‘son’ las estructuras más interesantes, más ‘bellas’ e importantes (*Cohn*), quien las estudia en colaboración con *Abhinav Kumar*, profesor de matemáticas en el MIT.

Los *óptimos universales* exhiben ciertas propiedades milagrosas, como una que *Cohn* llama el fenómeno de “*no quedarse atascado*”. Considérese tratar de encontrar el empaquetamiento de círculos más denso en un avión. Se puede comenzar dibujando un círculo en la parte media de una hoja de papel y ajustando tantos círculos adicionales como sea posible. Pronto se descubre que seis círculos forman un hexágono apretado alrededor del séptimo círculo central. No hay ninguna razón para pensar que este patrón debería continuar (si, por ejemplo, se dibujan pentágonos que unan sus centros), podría dibujar solo un anillo de vecinos antes de que aparecieran espacios incómodos), pero resulta que puede seguir agregando círculos según el patrón hexagonal sin tener problemas y todo funciona (*Cohn*).

Esta característica rara de la *red hexagonal bidimensional*, ejemplificada por los planos continuos de los panales de abejas, es compartida por la *red Leech* en 24 dimensiones y una estructura llamada *red E8* en 8 dimensiones. Aunque imposible de visualizar, la construcción de estas redes son, matemáticamente igualmente indoloras “En su lugar todo se bloquea. Pero el patrón continúa de la manera que esperarías: Nunca te quedas atascado” (*Cohn*).

El investigador *Henry Cohn*, ahora estudia una nueva clase de estructuras geométricas llamadas “*óptimas universales*”.

La característica está vinculada a la propiedad de la *optimización universal*. En *Annals of Mathematics* en 2009, *Cohn* y *Kumar* demostraron límites supe-

riores en 8 y 24 dimensiones que se encuentran dentro de una fracción de un porcentaje de las densidades de las redes *E8* y *Leech*, lo que indica que estos son casi seguramente los empaquetamientos de esferas más densos en sus respectivas dimensiones. Pero estas redes también parecen ser las configuraciones óptimas en general, no solo para las esferas sino también para las partículas que ejercen fuerzas entre sí, como dos átomos que se separan entre sí. Para cada fuerza repulsiva razonable entre partículas (Cohn), las partículas se autoensamblarán en una red hexagonal en  $2 - D$ , una red *E8* en  $8 - D$  y una red *Leech* en  $24 - D$ . Estos arreglos no solo son más densos; sino son “universalmente” óptimos.

Quizás por esta razón, las estructuras aparecen ampliamente en las matemáticas y la física. Desde la combinatoria y la teoría de grafos hasta la geometría y la geometría algebraica, etc., aparecen por todas partes (Kumar)

*E8* juega un papel en la teoría de cuerdas, una hipotética "teoría de todo" que dice que el espacio-tiempo es de 10 dimensiones y que partículas como los electrones y los quarks son pequeñas cadenas unidimensionales que oscilan a diferentes frecuencias. En la década de 1980, los teóricos de cuerdas mostraron que una variante, llamada *teoría de cuerdas heteróticas*, se puede formular utilizando las simetrías de dos copias de *E8*. Se puede producir exactamente el mundo real que conocemos, comenzando con la teoría de cuerdas heteróticas *E8* (Burt Ovrut - teórico de cuerdas). Cuando la teoría *E8* se reduce de una manera que hace que el mundo parezca tridimensional, contiene a los *quarks* a los *leptones* y al *Higgs* y todas las otras partículas que se pueden observar.

La *optimización universal* es una idea joven, y los investigadores aún están explorando su significado y consecuencias. Recientemente, Cohn y su ex interino, Jeechul- Woo, utilizaron límites de programación semidefinidos para descubrir nuevos *óptimos universales*, incluidos algunos arreglos, mucho menos simétricos de lo esperado.

La simetría definitivamente juega un papel importante, pero creo que una de las cosas interesantes que Henry Cohn ha demostrado es que hay configuraciones que son *óptimas universales*, pero que no tienen nada de esta simetría (Kallus)

Los matemáticos han abordado durante mucho tiempo los *problemas de embalaje* bajo el supuesto de que, como sabe cualquier viajero, el *orden* generalmente *supera* el *desorden* cuando se trata de embalaje. El hecho de que la *simetría no sea la historia completa*, no en dimensiones muy altas, donde reina la aleatoriedad, ni en algunos casos de dimensiones inferiores recientemente estudiados, significa que los científicos pueden necesitar algún otro principio para comprender la geometría subyacente del empaquetamiento y su gran extensión la *Optimidad Universal*.

Por el momento, creo que no se tiene un principio unificador fundamental, pero creo que hay todo tipo de cosas interesantes en esa dirección. Se está en búsqueda de un reemplazo del concepto de *simetría* (Kumar).

Por último, regresando al mundo más sencillo, más idealizado y menos cochambroso, algunos ejercicios recomendados de [16]:

## 4 Ejercicios (y un problema).

- Supóngase que se comienza el empaquetamiento del plano de coordenadas como se muestra a continuación, con el círculo inferior izquierdo centrado en el punto  $(0, 0)$  y el círculo inferior derecho centrado en el  $(2, 0)$ :

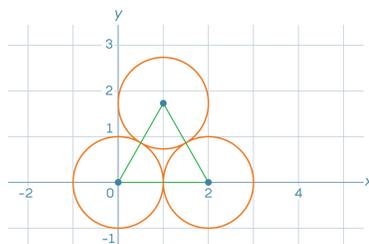


Fig.27. ¿Dónde quedará el centro del tercer círculo (sus coordenadas)?

**Recomendación y solución:** Si no pudiste resolverlo. He aquí la solución. Dado que los centros de los círculos forman un triángulo equilátero con longitud de sus lados igual a 2 (véase la Fig.27), luego la recta  $x = 1$  es una recta de simetría del triángulo equilátero, por lo cual la 1ra. coordenada del centro del tercer círculo es 1. Para determinar la segunda coordenada del centro del 3er. círculo se puede aprovechar el que la recta de simetría  $x = 1$  del triángulo equilátero, divide a dicho triángulo equilátero en dos triángulos rectángulos, para cada uno de los cuales su hipotenusa es de longitud 2, mientras que sus catetos son uno la mitad de la base del triángulo equilátero, o sea 1, y el otro la altura  $h$  de ambos triángulos rectángulos, luego Pitágoras ¿a qué obligaría?<sup>7</sup>, luego la respuesta:  $C_3 = (1, \sqrt{3})$

- En seguida se muestra el inicio de un empaquetamiento de esferas “cúbico simple”. ¿Cuál es la densidad de empaquetamiento de este arreglo?

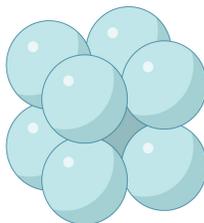


Fig.28. Arreglo inicial propuesto, donde las esferas están dispuestas 4 sobre 4.

**Solución:** Actuar como en el caso del empaquetamiento cuadrado de círculos en el plano, determinando así la densidad del empaquetamiento

<sup>7</sup> $2^2 = 1^2 + h^2$ , de donde  $h = \sqrt{3}$ .

de la disposición propuesta. Obsérvese sólo el cubo que se forma con los centros de las esferas iniciales:

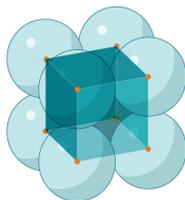


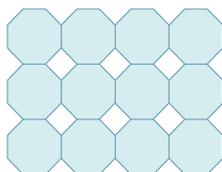
Fig.29. Tomando los centros de las esferas iniciales se forma el cubo.

Ahora en cada una de sus ocho vértices (esquinas del cubo), hay exactamente un octavo ( $\frac{1}{8}$ ) de una esfera que se encuentra dentro del cubo. Entonces, por los 8 vértices en el volumen de cada cubo, se ocuparán exactamente el volumen de una esfera en su interior. Si cada esfera tiene por radio a  $r$ , entonces el cubo tendrá una longitud lateral de  $2r$ . Esto hace que la *densidad* de empaquetamiento será:  $(\frac{\text{VolumenDeLaEsferaDeRadio } r}{\text{VolumenDelCuboDeArista } 2r})$ , esto es:

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{(2r)^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{8r^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0.5236$$

Obsérvese que ésta es la misma relación de la esfera al cubo hallada arriba en el texto.

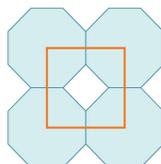
- Ahora aquí se tiene el comienzo de un empaquetamiento de un avión usando octágonos regulares:



¿Cuál es la *densidad* de éste empaquetamiento (embalaje)?

**Solución:** Dado que este es esencialmente un empaquetamiento cuadrado de octágonos, se puede usar el enfoque ya desarrollado anteriormente y fijarse en todos los posibles cuadrados para generalizar la idea, pero realmente fijarse en un solo cuadrado que conecte los centros de cuatro

octágonos vecinos:



Obsérvese que exactamente un octágono completo, queda cortado en 4 partes, dentro del cuadrado. Y como un octágono regular de longitud lateral  $s$  tiene un área de  $(2 + 2\sqrt{2})s^2$  (que se puede encontrar descomponiendo el octágono de varias maneras), y hay un solo cuadrado de longitud lateral  $s$  que aparece. Esto hace que la densidad de empaquetamiento sea

$$\frac{\text{ElÁreaDelOctágono}}{\text{ElÁreaDelOctágonoMásElÁreaDeEseCuadradoÚnicoDeLongitud } s}:$$

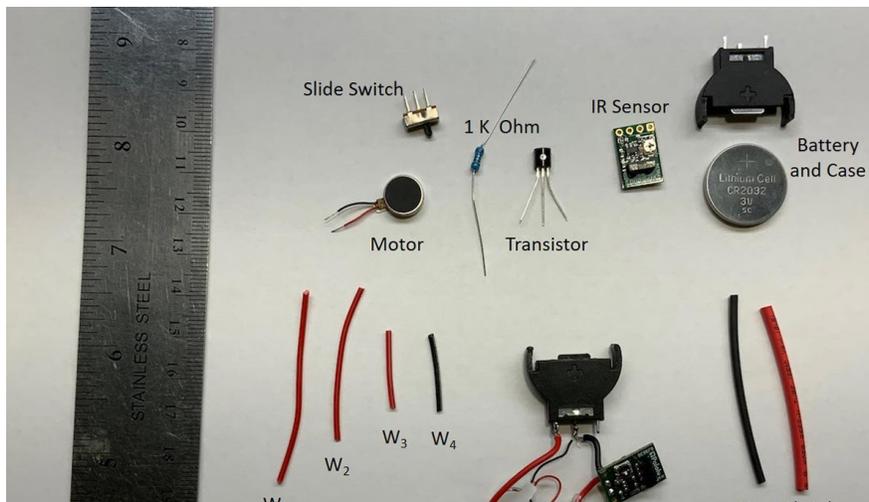
$$\frac{(2 + 2\sqrt{2})s^2}{(2 + 2\sqrt{2})s^2 + s^2} \stackrel{s \neq 0}{=} \frac{(2 + 2\sqrt{2})}{(2 + 2\sqrt{2}) + 1} = \frac{(2 + 2\sqrt{2})}{(3 + 2\sqrt{2})} \approx 0.8284$$

Es interesante hacer notar que éste no es el empaquetamiento más denso posible de octágonos en el plano. ¿Podrías encontrar un empaquetamiento más eficiente?

4. Al menos un problema: El Dr. en Medicina Joselín Hernández Díaz? del *Hospital General de México* (el hospital más grande de la CdMx y posiblemente del país) planteó el siguiente problema: Cómo regular el flujo de personas en los corredores del *Hospital General de México*.

Un intento de solución de este problema está es concebir a los individuos que ingresan al Hospital como puntos (su centro de masa) en 3 dimensiones y moviéndose a lo largo del tiempo  $t$  (su 4ta. dimensión). o mejor aún a cada individuo como un punto en el plano (2 dimensiones) moviéndose a lo largo del tiempo  $t$  (su 3ra. dimensión). Aún así se necesitaría de un distanciómetro integrado al celular de la persona que le indicara que no está infringiendo la distancia mínima a otra persona a 1.5 m. de distancia. Otras posibles soluciones técnicas a este problema consistiría en que las personas usasen *brazaletes* comerciales detectores de no distanciamiento social. La necesidad de mantener el distanciamiento social como una herramienta para evitar el contagio por coronavirus llevó al desarrollo de una pulsera inteligente que garantiza mantener la distancia de seguridad en lugares públicos: pulsera llamada *Wardoo*. O bien de plano del Collar repulsor, de la NASA, que sirve para no tocarse la cara con las manos (a 30 cm), pero que puede adaptarse para que reaccione a 1.5 m de dis-

tancia. He aquí las partes del collar repulsor:



## 5 REFERENCIAS.

- [1] *H. Cohn*, Packing, coding, and ground states, PCMI 2014 lecture notes, 2016. arXiv:1603.05202
- [2] *H. Cohn and N. Elkies*, New upper bounds on sphere packings I, *Ann. of Math.* (2) 157 (2003), no. 2, 689–714. arXiv:math/0110009 MR 1973059 doi:10.4007/annals.2003.157.689
- [3] *H. Cohn and A. Kumar*, Optimality and uniqueness of the Leech lattice among lattices, *Ann. of Math.* (2) 170 (2009), no. 3, 1003–1050. arXiv:math/0403263 MR2600869 doi:10.4007/annals.2009.170.1003
- [4] *H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller, D. Radchenko, and M. Viazovska*, The sphere packing problem in dimension 24, preprint, 2016. arXiv:1603.06518
- [5] *H. Cohn and S. D. Miller*, Some properties of optimal functions for sphere packing in dimensions 8 and 24, preprint, 2016. arXiv:1603.04759
- [6] *J. H. Conway and N. J. A. Sloane*, What are all the best sphere packings in low dimensions? *Discrete Comput. Geom.* 13 (1995), no. 3–4, 383–403. MR 1318784 doi:10.1007/BF02574051
- [7] *Sphere packings, lattices and groups*, third edition, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* 290, Springer, New York, 1999. MR 1662447 doi:10.1007/978-14757-6568-7
- [8] *T. C. Hales*, Can non balls and honey combs, *Notices Amer. Math. Soc.* 47 (2000), no. 4, 440–449. MR 1745624
- [9] *T. C. Hales*, A proof of the Kepler conjecture, *Ann. of Math.* (2) 162 (2005), no. 3, 1065–1185. MR 2179728 doi:10.4007/annals.2005.162.1065
- [10] *T. Hales, M. Adams, G. Bauer, D. T. Dang, J. Harrison, T. L. Hoang, C. Kaliszyk, V. Magron, S. McLaughlin, T. T. Nguyen, T. Q. Nguyen, T.*

Nipkow, , A. H. T. Ta, T. N. Tran, D. T. Trieu, J. Urban, K.K.Vu, and R. Zumkeller, A formal proof of the Kepler conjecture, preprint, 2015. arXiv:1501.02155

[11] Kabatyanskii G. A. and Levenshtein V. I., Bounds for packings on a sphere and in space, Problems Inform, Transmission 14 (1978), no. 1, 1–17. MR 0514023

[12] D. de Laat and F. Vallentin, A semidefinite programming hierarchy for packing problems in discrete geometry, Math. Program.151(2015), no.2, Ser.B, 529–553.arXiv:1311.3789 MR 3348162 doi:10.1007/s10107-014-0843-4

[13] D. de Laat and F. Vallentin, A breakthrough in sphere packing:thesearchformagicfunctions, Nieuw Arch. Wiskd. (5) 17 (2016), no. 3, 184–192. arXiv:1607.02111

## References

[1] A. Venkatesh, A note on sphere packings in high dimension, Int. Math. Res. Not. 2013 (2013), no. 7, 1628–1642. MR 3044452 doi:10.1093/imrn/rns096

[2] M. S. Vyazovska, The sphere packing problem in dimension 8, preprint, 2016. arXiv:1603.04246

[3] Patrick Honner, The Math of Social Distancing Is a Lesson in Geometry, Quanta Magazine, 2020.

[4]

## 6

### Apéndice 1.

## A Cómo se guarda la distancia de seguridad en la playa

¿Con qué figura geométrica marcarías en la arena tu 'territorio' familiar?

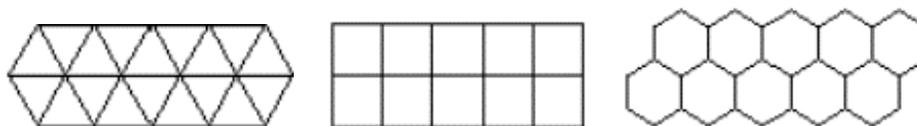
Personas solas o grupos de varias personas guardan las distancias de seguridad en la playa. Al llegar a la playa este año, algo nuevo nos llamó la atención. Algunos bañistas habían trazado una figura geométrica en la arena alrededor de su sombrilla.

A los más pequeños les propuse un hexágono, el polígono que adoptan las abejas, ya que con una mínima cantidad de materiales consiguen un espacio interior máximo. Les animé a utilizar los lados del ya trazado y a dibujar otros seis hexágonos alrededor del primero.

- Alguno se percató, se puede llenar toda la playa con hexágonos.

## A.1 Teselaciones regulares.

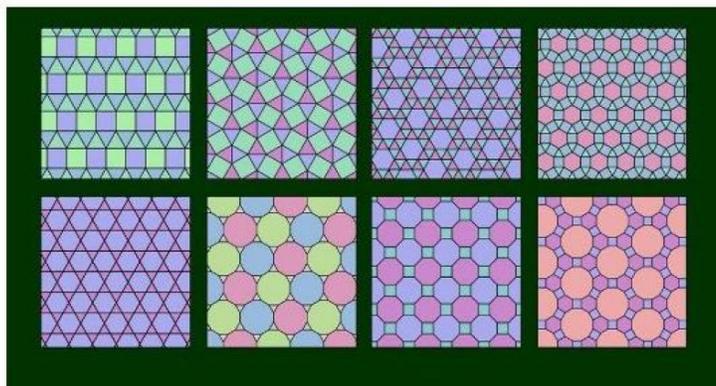
- Si, la verdad, es que se puede. Además solo se puede con tres clases de polígonos regulares: *triángulos*, *cuadrados* y *hexágonos* cubrir toda la playa. Son las llamadas *teselaciones* (o mosaicos) *regulares*.



Las 3 teselaciones regulares.

- Los triángulos podían servir si viniéramos solos a la playa, los cuadrados si venimos en pareja, y los hexágonos si venimos de cuatro en cuatro, como nosotros.

## A.2 Las teselaciones semiregulares:



Las 8 teselaciones semiregulares.

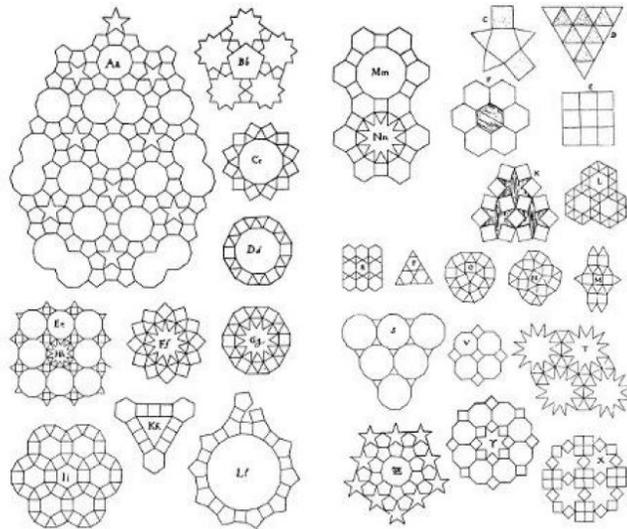
En realidad, a la playa van grupos de una, dos o cuatro personas, o familias numerosas, grupos de amigos o todo un equipo de baloncesto. Para todos ellos, tendríamos que ser capaces de encajar polígonos regulares de diferentes números de lados sin dejar espacio libre. Es lo que se denominan *teselaciones semiregulares* y en realidad solamente hay 8 posibles combinaciones.

Encontrarlas es un bonito ejercicio de geometría y de hacer unas pocas cuentas sencillas. El ángulo entre dos lados de un polígono regular de  $n$  lados es:

$$\frac{n-2}{n}180^\circ$$

Por ejemplo, si consideramos un dodecágono ( $n = 12$ ) el ángulo entre dos de sus lados es  $\frac{12-2}{12}180^\circ = \frac{1800^\circ}{12} = 150^\circ$ . Una primera opción sería juntar un 2do. dodecágono, tendríamos  $300^\circ$  y así hasta llegar a los  $360^\circ$  de una vuelta completa, podremos añadir un triángulo equilátero de ángulo  $60^\circ$ . Como se ve en la segunda opción de la Figura, con un dodecágono de partida involucra un hexágono ( $120^\circ$ ) y un cuadrado ( $90^\circ$ ) ya que  $150^\circ + 120^\circ + 90^\circ = 360^\circ$ .

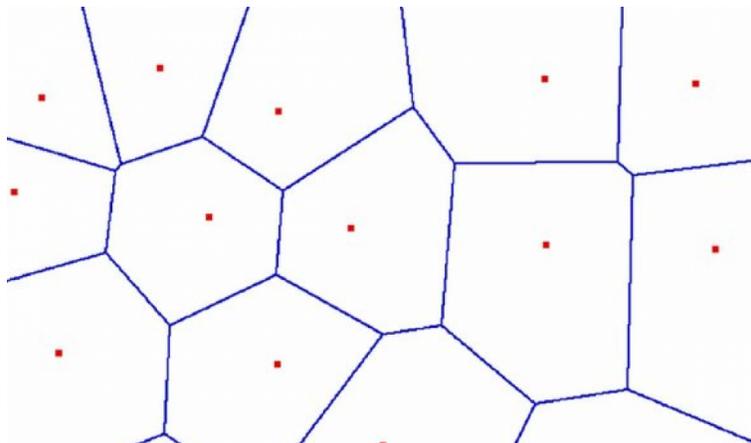
Las 3 teselaciones regulares, las 8 teselaciones semiregulares y otras de gran belleza fueron ya descritas por *Johannes Kepler* (1571-1630) en su libro '*Harmonices Mundi*' (1619) para explicar la armonía del universo a través de términos geométricos.



Teselaciones en 'Harmonices Mundi' (1619) de Johannes Kepler.

- Pero todo ya era visto como poco útil, dado que la gente ya está sentada, cada uno con su sombrilla y todos dudaban mucho que quisieran moverse para ayudar a encajar los polígonos. Habría que pensar en otra partición— alguien sentenció con un gran sentido de la realidad. - Y la hay-.

### A.3 Las celdas de Voronói.



Celdas de Boroni

Con éstas *Celdas de Voronói* se puede descomponer la playa en *polígonos* (no regulares) que contengan la parte de la playa más cercana a cada sombrilla. Estos polígonos se llaman a menudo *celdas de Voronói*, en homenaje al matemático ucraniano *Gueorgui Voronói* (1868-1908) que las introdujo. Actualmente se utilizan en múltiplos áreas de la ciencia, desde la meteorología hasta la física de la materia condensada, incluyendo el tratamiento de tumores. Se aplican en el diseño de texturas en gráficos de películas, videojuegos y anuncios publicitarios o en el estudio del emplazamiento de un nuevo supermercado en función de los ya existentes.

Despreocupándose de la distancia, las rectas y las reglas, ahora se centran en las curvas de las olas, sin saberlo, en otras nuevas matemáticas.