REVISTA DEL SEMINARIO
de
ENSEÑANZA Y TITULACION

AÑO IV NUMERO ESPECIAL 25

ASPECTOS DE ALGEBRA SUPERIOR I, A TRAVÉS DE PROBLEMAS (PRIMERA PARTE)

POR: JULIETA VERDUGO DÍAZ

NOVIEMBRE 1988

ASPECTOS DE ALGEBRA SUPERIOR I, A TRAVES DE PROBLEMAS

JULIETA VERDUGO DIAZ

Profesor por horas del Depto. de matemáticas de la Facultad de Ciencias. UNAM

I N D I C E .

PRÓLOGO

El presente trabajo forma parte de un curso de Algebra Superior que se imparte a lo largo de 2 semestres en la Facultad de Ciencias de la UNAM. (en el apéndice c, se presenta un bosquejo de este curso).

El trabajo es resultado de 4 años de impartir como ayudante de profesor, la materia de Algebra Superior I en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Esta es una materia obligatoria para estudiantes de las carreras de matemáticas, actuaría y física.

En este trabajo, se desarrollan solamente la mitad de los temas del curso.

La forma de impartir el curso, es un tanto desordenada, aparentemente sin estructura hecha de antemano. El orden y la estructura misma, la van dando los alumnos de acuerdo a las necesidades que se crean como consecuencia de los diferentes caminos propuestos por ellos para resolver los problemas. Decimos un tanto desordenada y aparentemente sin estructura, porque aunque existen un orden y una estructura para los temas que se les imparten, son los alumnos quienes le imponen ritmo y orden a la clase a medida que se van involucrando en los problemas. Por ejemplo, nos ha sucedido que después de discutir el segundo o tercer problema del curso, los alumnos tienen una discusión que nos encamina rápidamente a ver el tema de Combinatoria antes del de Inducción y otras veces, la discusión en el grupo es tal que casi inmediatamente después de 3 ó 4 problemas podemos dar la teoría referente al tema de Inducción Matemática. Es más, la mayoría de las veces no podemos dar uno u otro tema sino que tenemos que ir y venir entre estos temas, o incluso entrar a otros temas, diferentes a estos dos, que salen en la discusión propia de un problema.

Para escribir esta experiencia, fué necesario darle alguna estructrura, pero quiero hacer la aclaración que si algún desorden, discontinuidad o brincos no muy claros aparecen en el trabajo, fué casi intencionalmente, porque la dinámica misma del salón de clase es la que va dando la pauta de hacia dónde seguir y en el trabajo escrito es muy difícil poder darle ese dinamismo, ese movimiento constante.

Quiero hacer la aclaración de que escribir el trabajo tratando de no perder la idea de ese "desorden necesario" fué muy difícil. Siempre que lo empezaba a escribir, resultaba un trabajo esquemático que en el mejor de los casos lo que le reflejaba a un maestro que lo tuviera en sus manos era un escrito en donde se daban 4 ó 5 caminos diferentes de resolver un problema, un trabajo esquemático el cual podia consultarse para encontrar otro camino por el cual resolver un problema y nada más. Ninguna de esas versiones esquemáticas me satisfizo y traté de cambiarlas en torno a mostrar que lo importante es la discusión del grupo, la dinámica que le imponen a la clase los alumnos en su discusión, el proceso por medio del cual los alumnos van descubriendo, creando y <u>haciendo</u> matemáticas.

No quisiera que el trabajo sirviera solo para que un maestro (o alumno) lo consultara para encontrar una receta de cómo resolver un problema concreto y que en base a ese camino impartiera (¿aprendiera?) su clase de la manera tradicional, solo dándole a los alumnos "la" forma en que se resuelve tal o cual problema. Puede suceder que por ejemplo en un problema concreto un maestro (o alumno) entienda mejor una forma (o camino) de resolverlo y que le parezca mejor explicarlo así; pero ésto no debe ser limitación para que les permitamos, o ayudemos a los alumnos, buscar otras vías de resolver el mismo problema.

La forma en que impartimos el curso es la siguiente: Por ejemplo, el primer día de clases les pone un problema de contar. No se les da teoría previa, sino se les hace la aclaración de que pueden resolverlo con lo que ellos mismos deseen, con las herramientas que tienen, que busquen alguna respuesta por cualquier camino que ellos quieran. El sentido es que los estudiantes hagan matemáticas desde el primer momento, que busquen una respuesta con los conocimientos que cada uno traiga, no importa el tiempo que inviertan para obtener la respuesta, el valor está en involucrarse y trabajar desde el primer momento, estructurar de cualquier forma el problema para después argumentar, comentar, enriquecer o incluso modificar su respuesta.

Los problemas que se les dan son problemas sencillos, problemas para los cuales cada uno de los alumnos puede tener una respuesta, sea válida o no, ya sea de inmediato o un poco después de pensarla. Y ya sea correcta o no lo sea, los problemas planteados permiten que con las matemáticas que manejan los alumnos, se pueda dar una respuesta.

Una vez que la mayoría de los alumnos ha manifestado tener una respuesta, se les pide que vayan externando cuál es su resultado y que expliquen cuál es el procedimiento que siguieron. Aquí, es donde empiezan realmente los problemas porque a veces los alumnos tienen una respuesta y no saben como llegaron a ella; a veces tienen una respuesta saben como llegaron a ella, pero no pueden explicar cómo lo hicieron; otros más saben como llegaron al resultado, y "explican" como lo hicieron, pero ninguno de sus compañeros entiende el procedimiento, etc. Es en estos momentos cuando se nos hace muy importante hacer que los alumnos participen y socialicen sus experiencias. Tienen que convencerse entre ellos mismos de que lo que hicieron es correcto a través de convencer a los demás de que su procedimiento y forma de abordar el problema son correctos, o bien que los demás los convenzan, a través de hacerle ver, en cualquiera de los momentos, cuál es su error y por consiguiente qué es lo correcto.

CAPITULO I

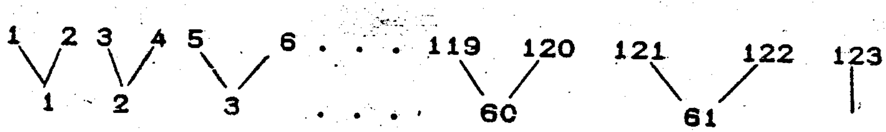
EL PROBLEMA DEL PIN PON.

En un torneo de Pin Pon las partidas se juegan por parejas escogidas al azar. En la primera ronda se forman parejas al azar y los jugadores que pierden van quedando eliminados. Si el número de participantes es impar, uno de los jugadores pasa automáticamente a la siguiente ronda (aquel que al azar no le toca pareja contra quien jugar). Para la siguiente ronda participan todos los ganadores de la primera, junto con el posible impar a quien no le tocó pareja y así sucesivamente hasta que se tiene un solo ganador.

Dado un número fijo de jugadores, ¿cuántas partidas se juegan?

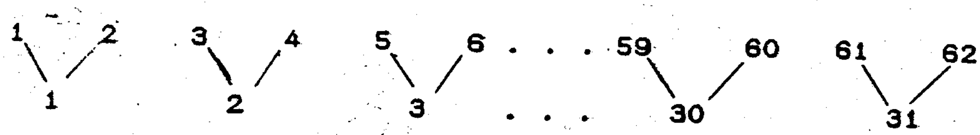
Supongamos, por ejemplo, que se tienen 123 jugadores. Suponiendo que ya se tiene realizado el sorteo para escoger las parejas y se numeran los jugadores de tal manera que el contrincante número uno juega contra el número dos, el tres contra el cuatro y así sucesivamente, para la primera ronda tenemos:

122 jugadores que juegan 61 partidas y 1 jugador que se queda sin jugar y pasa automáticamente a la siguiente ronda.



Ahora numeremos los 62 jugadores que quedan, para la segunda ronda tenemos:

62 jugadores que juegan 31 partidas ;



Los resultados que vamos obteniendo los podemos expresar en la siguiente tabla :

# DE RONDA	# DE JUGADORES	# DE PARTIDAS
1	123	61
2	62(1)	31
3	31	15
4	16	8
5	8	4
6	4	2
7	2	1
TOTAL DE PARTIDAS JUGADAS		122

tabla 1

Como se ve, se necesitan 122 partidas para tener un ganador.

¿ Qué pasaría si a última hora, antes de empezar los juegos se hubiera inscrito un jugador mas ?

Suponiendo ahora que tenemos 124 jugadores inscritos.

¿ Cuántas partidas juegan para tener un solo ganador ?

Podemos hacer una tabla como la anterior, y tenemos:

(1) Obsérvese que en la ronda anterior el número de partidas fué 61 por lo que el número de jugadores involucrados fué 122 y el número de jugadores con pase automático 1 por lo tanto se tienen en total 62 jugadores en la segunda ronda.

# DE RONDA	# DE JUGADORES	# DE PARTIDAS
1	124	62
2	62	31
3	31	15
4	16	8
5	8	4
6	4	2
7	2	1
TOTAL DE PARTIDAS JUGADAS		123

tabla 2

Si ahora tenemos 129 jugadores inscritos, ¿ cuántas partidas se jugarán ? Hagamos otra tabla:

# DE RONDAS	# DE JUGADORES	# DE PARTIDAS
1	129	64
2	65	32
3	33	16
4	17	8
5	9	4
6	5	2
7	3	1
8	2	1
TOTAL DE PARTIDAS JUGADAS		128

TABLA 3

¿ Podríamos dar una regla general para cualquier número de jugadores que se inscribieran al torneo ?

De los tres ejemplos anteriores se observa que la regla puede ser:

CONJETURA. Para N jugadores serán necesarios N-1 partidas para que se tenga un ganador.

¿ Cómo comprobamos esta conjetura ? ó ¿ Cómo la demostramos ? Es decir, ¿ Cómo podemos dar algún argumento general que nos convenza claramente de esta hipótesis ?

Haciendo torneos con poquitos jugadores comprobaríamos la regla enunciada mediante el conteo directo. Pero debemos comprobarla para todos los números N , incluyendo N's muy grandes.

Sabiendo que (como calculamos en el primer ejemplo) el número de partidas con 123 jugadores es 122, podemos determinar el número de partidas con 124 jugadores sin necesidad de volver a contar todo de nuevo, como hicimos anteriormente. Basta notar que cuando llega un nuevo jugador, hace falta una partida mas en el esquema que se tenía antes. Este razonamiento lo podemos hacer en general de la siguiente manera:

Si damos por sabido que teniendo K jugadores el número de partidas es K-1, cuando llega el jugador número K+1 lo que se puede hacer es enfrentarlo, en una partida adicional, al ganador final de los K originales que teníamos antes. Así, el número de partidas jugadas con K+1 jugadores es: K-1 que ya teníamos, mas la partida adicional que agregamos; es decir: (K-1) + 1 = K partidas.

¿ Comprueba esto la hipótesis de la conjetura ? No cambiará el resultado si en vez de enfrentar al nuevo jugador contra el campeón, lo anexáramos a cualquiera de las rondas anteriores ? (se deja al lector pensar y discutir, si es posible, estas preguntas).

Hasta aquí, hemos encontrado que si tenemos N jugadores, el número de de partidas es N-1. Nos ha resultado cierto en muchos casos y varias formas, pero ¿qué significa ésto?, ¿podemos encontrar qué significa esta expresión en el problema mismo?

Resulta muy fácil el resultado de N-1 partidas, entonces ¿será también fácil pensar qué significa ese número?, ¿porqué el 1 en la fórmula?

Tratando de resolver estas preguntas, encontramos que N es el número de jugadores, pero el 1, ¿qué significa? El 1 debe ser el único ganador, ya que en el problema, un uno así de importante es solo El ganador, El campeón. De modo que en efecto, esa fórmula nos dice mucho acerca del problema mismo. N-1 es el número de jugadores inscritos menos el campeón o sea todos los jugadores que perdieron, todos los que no son El campeón.

El mismo problema, podemos razonarlo de un modo diferente, por ejemplo: ¿ se podrá contar el conjunto que nos interesa (partidas) a través del número de elementos de otro conjunto equivalente al conjunto incógnita, pero un tanto más fácil de contar ?

Si los elementos del conjunto que nos interesa (partidas) los ponemos en correspondencia con los elementos de otro conjunto, por ejemplo con el conjunto de los perdedores, observamos que efectivamente existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de partidas que se juegan y el conjunto de los perdedores, pues en cada partida se elimina a un jugador y cada perdedor es eliminado en una sola partida (solo pierde en una partida). Entonces si se tienen N jugadores, para que exista un solo ganador tiene que haber N-1 perdedores, para lo cual se requieren N-1 partidas.

Tenemos así que efectivamente el número de partidas a jugar es el número de jugadores inscritos menos uno; y ¿qué quiere decir esto? Que todos los jugadores son perdedcres menos uno que es el campeón, o sea que: Para N jugadores el número de partidas es igual al número de perdedorees, que es N-1.

En seguida, un ejercicio para el lector que sugerimos para pensar en el mismo sentido en que se ha analizado el problema del Pin Pon.

EJERCICIO. LA TABLILLA DE CHOCOLATE.

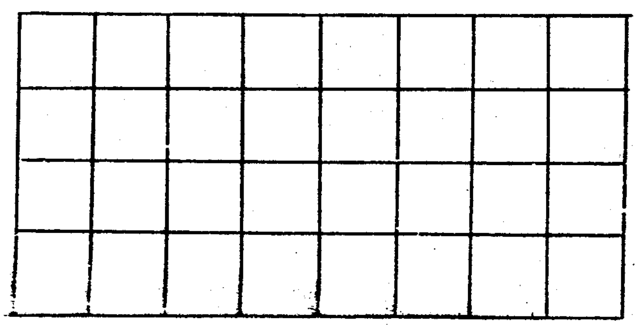
Se tiene una tablilla de chocolate que consta de MxN pequeñas piezas. Se quiere dividir ésta de forma que se tengan las MN piezas separadas. ¿Cuál es el número mínimo de cortes que hay que hacer para obtener todas las piezas sueltas?

CONDICIONES: no se pueden hacer cortes mediante apilar dos o mas hileras de cuadritos y obviamente tampoco se pueden hacer cortes en zig zag.

De nuevo podemos empezar por un ejemplo. Supongamos que la tablilla tiene 8x4 pequeñas piezas. ¿Cuántos cortes se necesitan para tener las 32 pequeñas piezas sueltas?

¿Cuál es la regla general para saber el número de cortes que hay que hacer con cualquier tablilla?

¿Se podrá encontrar un conjunto equivalente que nos ayude a convencernos de nuestra forma de contar?



SEGUNDO PROBLEMA DEL PIN PON

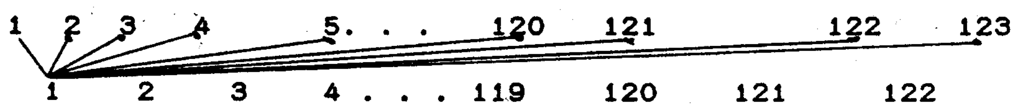
En este torneo de Pin Pon, los jugadores se enfrentarán todos contra todos; es decir cada jugador tiene que jugar contra todos los restantes. Ahora no nos interesa qué pasa hasta que exista un ganador sino lo siguiente:

¿ Cuántas partidas se juegan en total si se tienen sN jugadores inscritos y se han de enfrentar todos contra todos ?

Empecemos nuevamente con un caso particular, por ejemplo, por contar cuántas partidas se juegan si se inscribieron 123 jugadores.

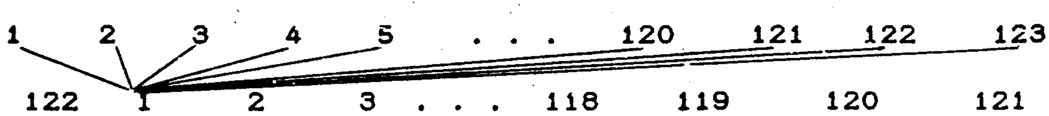
Cada uno de los participantes va a jugar 122 partidas:

Nuevamente numeremos a los participantes del 1 al 123, tenemos así que haciendo un esquema de las partidas del jugador número uno se tiene:



Estas serán las partidas del jugador número uno.

En la misma forma podríamos decir que las partidas del jugador número dos son:



Y Así sucesivamente para cada uno de los 123 jugadores; entonces, las partidas jugadas serían 122 por cada jugador, o sea: 122 x 123 .

Pero ¿contamos bien?

Observando las partidas para los jugadores 1 y 2 vemos que la partida en que se enfrentan ellos aparece contada en las del 1 pero también en las del 2. O sea que contamos doble esta partida. Pero también contamos doble la partida del jugador 1 contra el jugador 3, ya que la contamos cuando enumeramos las del 1 y cuando contamos las del 3; lo mismo cuando contamos la partida del 1 con el 4 y así sucesivamente . Y obsérvese también, que la partida del 2 con el 3 también está contada dos veces, y la del 3 con el 4 y así sucesivamente, por lo que vemos que todo lo hemos contado doble. Entonces el número de partidas que se jugarán es:

$$\frac{122 \times 123}{2} = \frac{15,806}{2} = 7,503$$

Tratemos ahora el caso general. Supongamos que el número de jugadores es N.

Tenemos N jugadores, cada uno va a jugar contra N-1, por lo tanto cada uno va a jugar N-1 partidas. Pero por lo que se observó en el párrafo anterior, cada partida está contada dos veces por lo tanto el número de partidas es:

$$\frac{N(N-1)}{2}$$

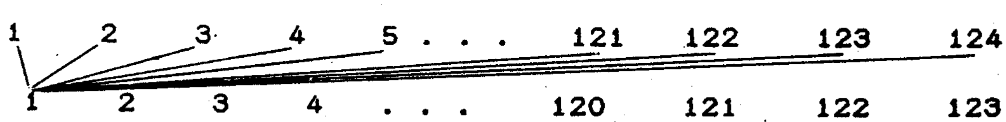
Pero , vamos a verlo de otra manera. Podemos proceder como hicimos con el primer problema del Pin Pon, es decir, partiendo de ver qué sucede si agregamos un jugador mas.

Por ejemplo, si se tenían 123 jugadores, el número de partidas era 7503. ¿Cuántas partidas habrá que agregar si a última hora se incribiera uno mas y tuviéramos 124 jugadores?

Según la regla general que hemos conjeturado (y que debemos comprobar), para 124 jugadores el número de partidas es $\frac{123 \times 124}{2}$.

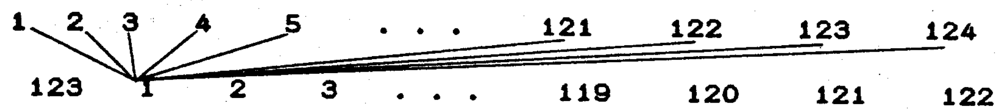
Veamos ahora si llegamos a esta misma conclusión partiendo de que ya sabemos el número de partidas para 123 jugadores:

Para el jugador número uno se tiene:



Las partidas para el jugador 1 son ahora 123.

Para el jugador número dos son:



También 123 partidas.

Y así sucesivamente. Es decir, para cada jugador aumenta en uno el número de partidas jugadas, y como eran 123 jugadores, entonces se tienen 123 partidas más; Nótese que 123 son precisamente los contrincantes del jugador 124 por lo que la regla para contar cuando llega un jugador más es agregar tantas partidas como jugadores se tenían, esto es:

Número de partidascon 123 jugadores más el número de jugadores que había antes es igual al número de partidas c on 124 jugadores. O sea: $\frac{123 \times 122}{2} + 123$

Una simple multiplicación nos permite comprobar que 7626 es lo mismo que $\frac{123 \times 124}{2}$.

Mediante el conteo directo en el caso de un número de participantes pequeño, y ccn los casos que hemos analizado, tenemos la siguiente tabla:

# DE JUGADORES	# DE PATRTIDAS	INCREMENTO EN # DE PARTIDAS
1	0	0
2	1	1
3	3	2
4	6	3
5	10	4
6	15	5
.	.	.
.	.	.
.	.	.
123	7503	?
124	7626	123

tabla 4

Pero, ¿Cómo comprobaremos que para K jugadores las partidas serán $\frac{(K-1)K}{2}$?

Si para K jugadores son $\frac{(K-1)K}{2}$ partidas, cuando llega el jugador número K+1 se jugarán K partidas más, (el número de jugadores que había antes), entonces tenemos:

$$\frac{(K-1)K}{2} + K = \frac{(K-1)K + 2K}{2} = \frac{K^2 - K + 2K}{2} =$$

$$\frac{K^2 + K}{2} = \frac{K(k+1)}{2}$$

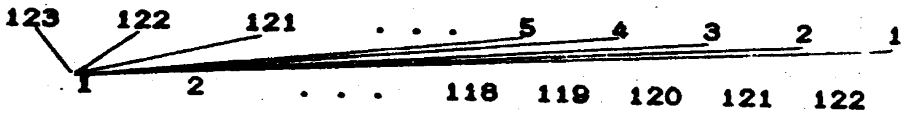
Que es el número de partidas que se juegan cuando hay K+1 jugadores inscritos.

¡ Entonces parece ser que la reglita sí funciona !

Para N jugadores el número de partidas a jugar es $\frac{(N-1)N}{2}$.

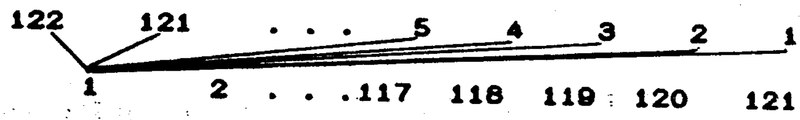
Buscando otro argumento, o bien otra forma de analizar el problema tenemos:

Si son 123 jugadores, el número de partidas para el jugador número uno serán:



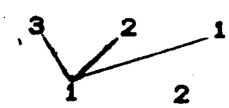
122 partidas para el primer jugador.

Para el segundo:

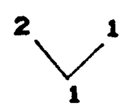


121 partidas para el segundo jugador, porque la partida que juega éste con el número uno ya fué contada en el caso anterior (las partidas del jugador número uno).

Siguiendo de esta manera, tendremos al final para el jugador número N-2:



Solo 2 partidas para el jugador N-2. Y



Una sola partida para el jugador N-1.

Esto es, el primer jugador se enfrentará contra los 122 jugadores restantes, el segundo contra los 121 restantes (ya que la partida que juega contra el primer jugador, ya la contamos al contar los juegos del jugador número uno), el tercer jugador jugará contra 120 y así sucesivamente. El último jugador ya no le quedarán opciones porque sus 122 juegos ya quedaron contados al contar los de sus contrincantes. Por lo que el número de partidas en total son:

$$122 + 121 + 120 + 119 + ... + 4 + 3 + 2 + 1$$

El resultado de esta suma debe dar exactamente el mismo resultado que la fórmula que ya habíamos encontrado por otro razonamiento.

Analicemos esto con números pequeños:

Si el número de jugadores es 3 por ejemplo, el número de partidas es $2 + 1 = 3$. Si el número de jugadores es 4, el número de partidas es $3 + 2 + 1 = 6$. Tomando algunos ejemplos más llegamos a la siguiente tabla:

# DE JUGADORES	# DE PARTIDAS
1	0
2	1
3	2 + 1
4	3 + 2 + 1
5	4 + 3 + 2 + 1
.	. . .
.	. . .
.	. . .
K	(K-1)+(K-2)+. . .+2 +1

tabla 5

En donde el renglón número K es apenas la conjetura que queremos comprobar, es decir, hemos formulado lo que creemos que debe suceder en el renglón número K .

Debemos ahora encontrar cuánto vale esa "sumota" . Tenemos que encontrar que ésta vale exactamente $\frac{(k-1)K}{2}$.

Busquémos cómo efectuarla.

Sumémos de 2 en 2 los sumandos de esta suma de la siguiente manera: el primer sumando lo sumamos con el último, el segundo con el penúltimo y así sucesivamente, o sea:(2)

$$(K-1) + (K-2) + (K-3) + \ . \ . \ . + 3 + 2 + 1$$

$$(K-1) + 1$$

$$(K-2) + 2$$

$$(K-3) + 3$$

$$\vdots$$

Tenemos que sumar:

$$((K-1)+1) + ((K-2)+2) + ((K-3)+3) + \ . \ . \ .$$

¿ Cuál será el último sumando ?

Si la K es impar, K-1 (el primer sumando) es par y se tiene que el último sumando, ya agrupados, es : $\frac{K+1}{2} + \frac{K-1}{2}$ que son exactamente $\frac{k-1}{2}$ sumandos, los cuales son cada uno de ellos iguales a K, por lo que la suma es:

$$\frac{(K-1)}{2} K$$

Si K es par, K-1 (el primer sumando) es impar y no tiene mitad, entonces al agrupar como se ha dicho quedará en el medio un número sin pareja y éste será $\frac{K}{2}$.

(2) En el libro de Colerus Egmont, Breve Historia de las Matemáticas, dice que ésto fué lo que hizo Gauss a los nueve años. En ésto, parece que no hay mucha claridad sobre qué fué exactamente lo que hizo Gauss, ya que por ejemplo en los libros de la colección Sigma, dice algo un tanto distinto (ver Sigma, El mundo de las matemáticas, vol. 1, p. 25).

El último sumando, de los agrupados, es $(\frac{K}{2}+1)+(\frac{K}{2}-1)$

Entonces la suma queda como:

$$\underbrace{(K-1+1)+(K-2+2)+\;.\;\;.\;\;.\;+(\frac{K}{2}+1+\frac{K}{2}-1)+\frac{K}{2}}_{\frac{K}{2}-1\ \text{sumandos}}$$

$$(\frac{K}{2}-1)K+\frac{K}{2}=(\frac{K-2}{2})K+\frac{K}{2}=\frac{K^2-2K+K}{2}=$$

$$\frac{K^2-K}{2}=\frac{K(K-1)}{2}=(\frac{K-1}{2})K$$

Tenemos que en cualquiera de los casos resulta que la suma es $\frac{(K-1)K}{2}$, que ya lo sabíamos ¿ no ?

Sumemos ahora de otra forma:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & (K-1) & + & (K-2) & + & (K-3) & + & .\;.\;.\;. & + & 3 & + & 2 & + & 1 & =S \\
+ & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & .\;.\;.\;. & + & (K-3) & + & (K-2) & + & (K-1) & =S \\
\hline
 & K & + & K & + & K & + & .\;.\;.\;. & + & K & + & K & + & K & =2S
\end{array}$$

¿Cuántas K's tenemos que sumar?

$(K-1)K = 2S$ entonces $S=\frac{(K-1)K}{2}$

Ya tenemos la conclusión de que para K jugadores el número de partidas es $\frac{K(K-1)}{2}$ y lo hicimos con un razonamiento general.

De modo que lo que hemos obtenido es:

La suma de todos los números naturales hasta el K-1 sea cual sea la K, es $\frac{K(K-1)}{2}$.

Y regresando al método de, si llegase a última hora un jugador más, ¿obtendremos la misma conclusión?

Si tenemos un jugador más, la suma será:

$$K + (K-1) + (k-2) + (k-3) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

Y como hemos conjeturado que $1+2+3+\ldots+(K-1) = \frac{(K-1)}{2}$

La suma que buscamos es igual a :

$$K + \frac{(K-1)K}{2} = \frac{2K + K^2 - K}{2} = \frac{K(K+1)}{2}$$

Que es lo mismo que se había afirmado solo que ahora hasta el natural número $K+1$. Por lo tanto nuestra hipótesis debe ser correcta.

Pero todavía podemos encontrar otra manera de resolver el problema de contar las partidas.

Si formamos un cuadrado de lado igual al número de jugadores inscritos y contamos, de la manera obvia, cuantas son las partidas que se efectúan, tenemos:

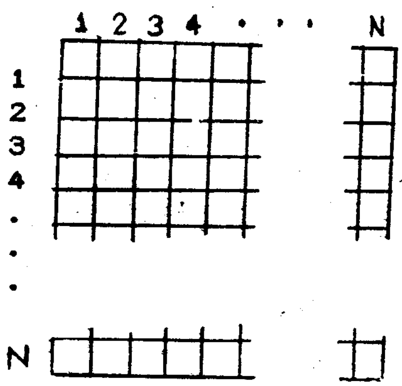


figura 1

Los cuadritos de la diagonal, es claro que no debemos contarlos ya que un jugador no se enfrenta a sí mismo. Tendremos que quitar también los cuadritos que se encuentran arriba de la diagonal (o abajo) porque, para nuestro problema, significan lo mismo: es decir, la partida en la que se enfrentan el 1 con el 2 está otra vez representada en el enfrentamiento del 2 con el 1. Por lo que contando cuántos cuadritos nos quedan, sabremos cuál es el número de partidas que se jugarán.

El número de cuadritos en todo el cuadrado es N^2 menos los que estan en la diagonal que son N. Y de los restantes tomamos solo la mitad, entonces la cantidad buscada es:

$$\frac{N^2 - N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$$

Hemos llegado entonces otra vez a la misma conclusión.

En la misma configuración anterior, podemos considerar que los cuadritos que sí nos sirven son los que quedan como se ilustra en la siguiente figura:

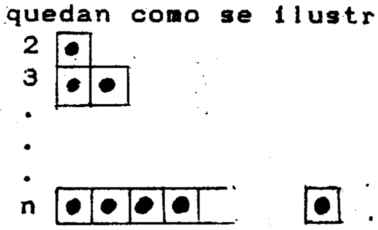
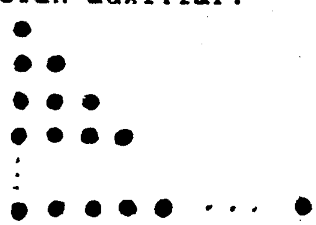


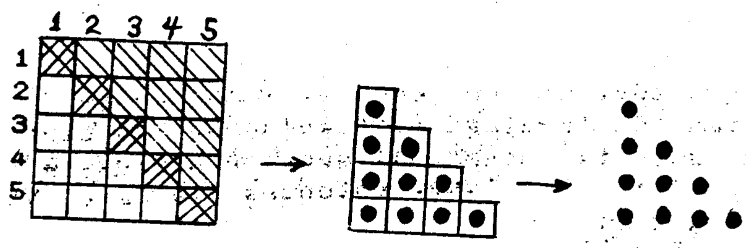
figura 2

En donde si quitamos la configuracion "cuadritos" y dejamos solo los puntitos; contar cuadritos equivale a contar puntitos en la configuración correspondiente. Queremos contar cuantos puntitos hay en un triángulo que tiene como base N puntitos y como altura también N puntitos.

Para contarlos vamos a ayudarnos de una construcción auxiliar:



Coloquemos sólo la configuración triangular con puntitos. Vamos a hacer el caso particular de 5 jugadores.



Coloquemos la configuración triangular y encima de ella, una configuración igual pero invertida, como se muestra en la siguiente figura:

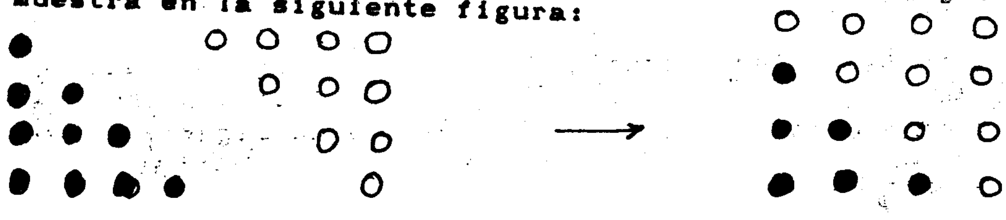


figura 3

En la configuración rectangular que obtenemos, se tienen 4 puntitos en la base y 5 en la altura, pero las 2 configuraciones triangulares tienen el mismo número de puntitos, dividiendo entre dos tenemos el número de puntos de la configuración que nos interesaba.

De donde, si lo generalizamos, es decir, pensamos en algo equivalente para cuando tenemos N jugadores, lo que tendremos es:

N-1 puntos en la base por N de altura, entre 2 porque son dos configuraciones iguales y solo queremos una; por lo que tenemos:

$$\frac{(N-1)N}{2}$$ ¡ otra vez la misma fórmula !

Otra forma en que los alumnos vieron el problema es la siguiente:

Suponiendo que una secretaria nos ayuda a escribir las tarjetas de "participaciones", o sea las tarjetas en donde se escriben los 2 nombres de los contrincantes en una partida, vamos a contar cuántos nombres escribe la secretaria.

Por cada partida, la secretaria debe hacer una tarjeta, entonces el número de partidas es el número de tarjetas que haga la secretaria. En cada tarjeta estan escritos 2 nombres (los contrincantes de una partida). El número total de nombres que ha escrito la secretaría es $n(n-1)$ ya que cada jugador debe enfrentarse a $n-1$ jugadores. Entonces el número de tarjetas es $\frac{n(n-1)}{2}$ ya que en cada tarjeta se han escrito 2 nombres.

Y así tenemos de nuevo que el número de partidas es $\frac{n(n-1)}{2}$.

Aunque todas las formas en que hemos analizado el problema se les han ocurrido de una u otra forma a los alumnos mismos, queremos resaltar aquí la siguiente y última manera de verlo porque solo una vez ha salido en clase y además nos parece importante resaltarla por su originalidad.

En la misma configuración del cuadrado con N cuadritos por lado de la figura 1, contemos a los "vivos" (o sea los que sí nos sirven para nuestra cuenta). Calculemos el área que ocupan, sabemos que el área del cuadrado es $N \times N = N^2$ y a ésta le estamos quitando el área a partir de la diagonal hacia arriba, entonces el área del triángulo que queda es: N de la base por N de la altura entre dos, o sea: $\frac{N \times N}{2} = \frac{N^2}{2}$

Pero estamos quitando de mas, esto es, la mitad del área de los cuadritos de la diagonal no debemos considerarla. Quitando el área de los triangulitos que quedan inmediatamente abajo de la diagonal, resulta: El número de estos triangulitos es N y cada uno tiene por área $\frac{1}{2}$, entonces el área que buscamos es:

$$\frac{N^2}{2} - N\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{N^2}{2} - \frac{N}{2} = \frac{(N-1)N}{2}$$

Una vez más la fórmula para contar cuantas partidas se juegan si los jugadores han de jugar todos contra todos.

Como un resúmen de lo que hemos hecho, vamos a formular una tabla tratando de concentrar los distintos caminos para resolver el problema del Pin Pon, cuando se enfrentan todos contra todos.

Número de jugadores	Número de partidas	$\frac{(N-1)N}{2}$	$1+2+\ldots+(N)$					T_{n-1}
2	1	$\frac{(1)2}{2}$	1				1	1
3	3	$\frac{(2)3}{2}$	1+2				3	3
4	6	$\frac{(3)4}{2}$	1+2+3				6	6
5	10	$\frac{(4)5}{2}$	1+2+3+4				10	10
6	15	$\frac{(5)6}{2}$	1+2+3+4+5				15	15
...	...	...	...	...	...	...	...	...
K	$\frac{(K-1)K}{2}$	$\frac{(K-1)K}{2}$	$\frac{(K-1)K}{2}$	$\frac{(K-1)K}{2}$	$\frac{(K-1)K}{2}$	$\frac{(K-1)K}{2}$	$\frac{(K-1)K}{2}$	$\frac{(K-1)K}{2}$

TABLA 6

Los Números Triangulares.

Fijémonos en la quinta columna de la tabla 6. A los números obtenidos en esta columna, 1,3,6,10,15,..., desde los tiempos de los griegos(3) se les llaman los números triangulares, precisamente porque los podemos representar como una configuración de este tipo.

A los números triangulares los vamos a denotar como T_N

O sea :

$T_1 = 1$
$T_2 = 3$
$T_3 = 6$
.
.
.

Y volviendo a la tabla 6 podemos dar una fórmula general para encontrar el N-ésimo número triangular de la siguiente manera:

$$T_N = \frac{N(N+1)}{2}$$

Entonces a la tabla 6 le podemos agregar una columna más que sería:

# DE JUGADORES	# DE PARTIDAS	. . .	T_{N-1}
1	0		
2	1		T_1
3	3		T_2
4	6		T_3
5	10		T_4
6	15		T_5
.	.		.
.	.		.
.	.		.
K	$\frac{(K-1)K}{2}$		T_{K-1}

tabla 7

(3) Ver números figurados de los griegos, en el libro History of Mathematics de D. E. Smith.

Para concluir con el segundo problema del Pin Pon, queremos hacer notar la importancia de buscar muchas vías para resolver un problema. Nótese que se han encontrado, para un solo problema, al menos 7 formas de resolverlo, 7 caminos que nos llevan al mismo resultado y cada uno de ellos presenta un interés particular. Hemos obtenido además algunos resultados que no esperábamos, como por ejemplo, hemos encontrado cuanto vale la suma de los primeros n números naturales, que es un problema muy importante y que se usa mucho; hemos visto que buscando las interpretaciones geométricas de este problema, hemos conocido a los números triangulares, que también son muy importantes y que trabajaremos mucho en el presente trabajo; hemos recordado la fórmula para el área de un triángulo, etc. Otro resultado más que hemos encontrado es que el producto de dos números naturales consecutivos (n(n+1) para cualquier n en los naturales) es divisible por 2, y aunque no hemos hecho la demostración formal de esta proposición, hemos usado mucho esto como una verdad (para demostrarlo, basta con observar que el producto de 2 consecutivos tiene que ser par ya que necesariamente uno de los 2 números es par).

Y así podríamos seguir numerando una serie de resultados que van obteniéndose en el trayecto de ir dándole respuesta a un problema y sobre todo si se trata de resolverlo por muchos caminos diferentes.

Por todas estas observaciones, insistimos en la importancia que, dado un problema cualquiera, se le trate de resolver por muchos caminos diferentes. Y es así como tenemos mas elementos para enseñarles a los alumnos a hacer matemáticas.

UN PROBLEMA DE TERNAS

Recordemos, que en el segundo problema del Pin Pon calculamos el número de partidas que se jugarían cuando los jugadores se enfrentaban todos contra todos. Observemos que para contar las partidas, hicimos uso de la equivalencia que existe entre las partidas y las parejas de jugadores que han de jugar, esto es, para cada partida, existe una pareja de jugadores y para cada pareja de jugadores, existe una única partida. De modo que si eran N jugadores los que se iban a enfrentar, el número de partidas era igual al número de parejas de un conjunto con N jugadores o lo que es lo mismo, el número de partidas es el número de parejas de un conjunto con N elementos. Si el problema se nos hubiera planteado como: encontrar las parejas de un conjunto que tiene N elementos, entonces notemos que hubiésemos hecho exactamente el mismo análisis y así habríamos llegado a la conclusión de que el número de parejas de un conjunto con N elementos es $\frac{N(N-1)}{2}$.

Si ahora, por alguna razón quisiéramos contar el número de ternas de un conjunto con N elementos ¿ cómo procederíamos ?

Como antes, empecemos por hacer una tabla con números pequeños para la N.

Si se tienen 1 ó 2 elementos, el número de ternas posible es cero porque no podemos formar ninguna terna.

Si N es igual a 3, la única terna posible es la formada por el conjunto mismo.

Si N es 4, contemos el número de ternas posibles: Sea {a, b, c, d} el conjunto dado; las ternas son:

abc acd bcd
abd

En total 4 ternas.

Si el conjunto es de 5 elementos, como por ejemplo el conjunto {a, b, c, d, e} tenemos las siguientes ternas:

abc	acd	ade	bcd	bde	cde
abd	ace		bce		
abe					

Total 10 ternas.

Para un conjunto de 6 elementos, por ejemplo el conjunto {a, b, c, d, e, f} se tiene:

abc	acd	ade	aef	bcd	bde	bef	cde	cef	def
abd	ace	adf		bce	bdf		cdf		
abe	acf			bcf					
abf									

Total 20 ternas.

Tenemos entonces hasta ahora la siguiente tabla:

# DE ELEMENTOS	# DE TERNAS	
1	0	
2	0	
3	1	
4	4	+3
5	10	+6
6	20	+10

tabla 8

¿Cuántas ternas serán si tenemos un conjunto con 7 elementos?

Para no ponernos a contar todo nuevamente vamos a tratar de encontrar una regla general en el incremento entre un renglón y otro de la tabla anterior. O bien, en los esquemas que hemos hecho, para ir contando las ternas, podemos analizar en qué se modifica uno con respecto al siguiente.

Hagamos ahora una nueva tabla en donde pongamos una columna más para los incrementos:

# DE ELEMENTOS	# DE TERNAS	INCREMENTO
1	0	0
2	0	0
3	1	1
4	4	3
5	10	6
6	20	10

tabla 9

En la tercera columna encontramos nuevamente a los números triangulares. Nuestra hipótesis es entonces que el incremento entre un renglón y otro es un número triangular, o sea nuestra tabla podemos escribirla como:

# DE ELEMENTOS	# DE TERNAS	INCREMENTO	TRIANGULAR
1	0	0	-
2	0	0	-
3	1	1	T_1
4	4	3	T_2
5	10	6	T_3
6	20	10	T_4

tabla 10

Podemos conjeturar que para el renglón número K de la tabla 10 el incremento que debe corresponder es T_{K-2}. ¡Pero tenemos que dar una fórmula para el número de ternas en el caso de tener K elementos!

Tenemos ahora dos problemas; uno, hacer ver que la conjetura del incremento es cierta para cualquier renglón de la tabla; y dos, encontrar una formulación para saber cuántas ternas se tienen cuando el conjunto tiene K elementos.

Dejémos la tabla por un momento y regresemos al problema concreto de las ternas para tratar de obtener más información.

Fijémonos como numerábamos las ternas para un conjunto de 4 elementos por ejemplo.

En la primera columna tenemos las ternas que tienen a los elementos "a" y "b" como dos de sus tres elementos, en la segunda columna están los que tienen a "a" y a "c" como dos de sus elementos, pero que son diferentes a los de la columna anterior, y en la tercera columna estan las que tienen a "b" y a "c" como dos de sus elementos y que no están en las 2 columnas anteriores.

Si el conjunto tiene 5 elementos tenemos algo semejante.

Haciendo un esquema de lo que se hace en general tenemos:

Vamos a llamarle a_i a cada elemento del conjunto y lo vamos a colocar en orden en cuanto a los subíndices. O sea

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ . \ . \ . \ , a_{K-1}, a_K$ son los elementos de un conjunto con K elementos.

En la primera columna tomamos todas las ternas que tienen a a_1 y a a_2 como dos de sus tres elementos y les agregamos como tercero, a cualquiera de los K-2 elementos restantes, es decir, la primera columna tiene K-2 ternas distintas. En la segunda columna colocamos las ternas que tengan a a_1 y a_3 como dos de sus elementos, pero aquí ya no aparecerá la terna $a_1a_2a_3$ porque ya está contada en la primera columna, así es que en la segunda columna tenemos K-3 ternas distintas mas. En la tercera columna tenemos a las ternas que empiezan con a_1a_4 y como tercer elemento cualquiera de los elementos que están colocados adelante de a_4, es decir, no aparecen ni a_2 ni a_3 como tercer elemento porque esas ternas ya estaban contadas. Entonces en la tercera columna tenemos K-4 ternas más. Siguiendo así, llegamos hasta la columna K-2 en donde están las ternas que tienen como primeros elementos a a_1 y a_{K-1} y como tercer elemento todos los restantes hacia adelante, por lo que la columna K-2 tiene una sola terna que es la $a_1a_{K-1}a_K$.

Haciendo un esquema para que se entienda mejor lo que hemos hecho tenemos:

COLUMNA 1	COLUMNA 2	COLUMNA 3	...COLUMNA K-3	COLUMNA K-2
$a_1a_2a_3$	$a_1a_3a_4$	$a_1a_4a_5$	... $a_1a_{K-2}a_{K-1}$	$a_1a_{K-1}a_K$
$a_1a_2a_4$	$a_1a_3a_5$	$a_1a_4a_6$	... $a_1a_{K-2}a_K$	
$a_1a_2a_5$	$a_1a_3a_6$	$a_1a_4a_7$	...	
$a_1a_2a_6$	$a_1a_3a_7$	. . .		
$a_1a_2a_7$	. . .	. . .		
. . .	. . .	. . .		
. . .	. . .	. . .		
. . .	. . .	$a_1a_4a_{K-1}$		
. . .	$a_1a_3a_{K-1}$	$a_1a_4a_K$		
$a_1a_2a_{K-1}$	$a_1a_3a_K$			
$a_1a_2a_K$				
K-2	K-3			

k-2

k-(2+1)

k-(k-2+1) = 1

tabla 11

Hasta aquí tenemos que el número de ternas que tienen al elemento a_1 son:

$(K-2) + (K-3) + (K-4) + \ldots + (K-(K-2)) + (K-(K-1))$

La primera columna tiene $(K-2)$ renglones, la segunda $(K-3)$ renglones, y la última (la número $K-2$) tiene solo un renglón, entonces el número de ternas que tienen a a_1 como uno de sus elementos es:

$(K-2)+(K-3)+(K-4)+\ldots+(K-(K-1))$.

Siguiendo un esquema equivalente para a_2, tenemos:

COLUMNA 1	COLUMNA 2	COLUMNA 3	...	COLUMNA K-4	COLUMNA K-3
$a_2 a_3 a_4$	$a_2 a_4 a_5$	$a_2 a_5 a_6$	...	$a_2 a_{K-2} a_{K-1}$	$a_2 a_{K-1} a_K$
$a_2 a_3 a_5$	$a_2 a_4 a_6$	$a_2 a_5 a_7$	...	$a_2 a_{K-2} a_K$	
$a_2 a_3 a_6$	$a_2 a_4 a_7$	. . .			
$a_2 a_3 a_7$	. . .	. . .			
. . .	. . .	. . .			
. . .	. . .	$a_2 a_5 a_{K-1}$			
. . .	$a_2 a_4 a_{K-1}$	$a_2 a_5 a_K$			
$a_2 a_3 a_{K-1}$	$a_2 a_4 a_K$				
$a_2 a_3 a_K$					

tabla 12

La primera columna tiene $K-3$ renglones, la segunda $K-4$ renglones, y la última tiene solo un renglón; el número de ternas, distintas a las ya contadas, que tienen al elemento a_2 como uno de sus elementos son:

$(k-3) + (K-4) + (K-5) + \ldots + (K-(K-2)) + (K-(K-1))$

Siguiendo así, tenemos que las ternas que tienen a a_3 como uno de sus elementos, y que no hubiésemos contado ya, son:

$(K-4) + (K-5) + \ldots + (K-(K-2)) + (K-(K-1))$. Y así sucesivamente hasta llegar a contar todas las ternas que tienen a a_{K-2} y que no hubiésemos contado antes, que son:

Solamente una, o sea, la terna $a_{K-2} a_{K-1} a_K$.

Vemos que con este procedimiento no nos falta ninguna terna, ni tampoco hemos contado de más alguna de ellas, por lo tanto para saber el total de ternas de un conjunto con K elementos solo nos falta sumar todos los pasos que hemos hecho hasta aquí, es decir, el total de ternas es:

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
 & (k-2) & + & (K-3) & + & (K-4) & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
 & & & (K-3) & + & (K-4) & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
 & & & & & (K-4) & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
+ & & & & & & & \vdots & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 3 & + & 2 & + & 1 \\
 & & & & & & & & & & & 2 & + & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$(K-2) + 2(K-3) + 3(K-4) + \cdots + (K-4)3 + (K-3)2 + (k-2)1$$

Ahora para calcularla vamos a sumar renglón por renglón, es decir, el primer renglón es la suma desde el número uno hasta el número (k-2), y esto ya lo sabemos hacer. ¡ Es el triangular número (K-2) ! Que ya sabemos que es $(K-2)(K-1)/2$. El segundo renglón es el triangular número(K-3), que es $(K-3)(K-2)/2$. Y así sucesivamente hasta el último renglón que es el primer triangular, o sea, 1.

De donde esa "sumota" es lo mismo que:

$$(K-2)(K-1)/2 + (K-3)(K-2)/2 + (K-4)(K-3)/2 + \ldots + 3 + 1$$

Entonces, nuestro problema de contar cuantas ternas no ordenadas tiene un conjunto con K elementos se ha transformado a sumar los números triangulares, o lo que es lo mismo, a sumar:

$$T_{K-2} + T_{K-3} + T_{K-4} + \cdots + T_3 + T_3 + T_2 + T_1$$

Observemos además, que esto ya lo habíamos visto antes, cuando analizamos la tabla de incrementos, ya que habíamos dicho que el incremento entre un paso y el siguiente era un número triangular.

Entonces hemos encontrado ya un argumento para hacer válida nuestra conjetura de que en el renglón número K de la tabla 10, el incremento debe ser T_{K-2}. (dejamos al lector demostrar porqué)

Pero aún no encontramos una fórmula para saber cuántas ternas se tienen cuando el conjunto tiene K elementos, sin tener que calcular todos los casos anteriores.

Busquemos otra manera de encontrar la fórmula que queremos, es decir, busquemos una fórmula que nos proporcione el resultado del renglón 1000 por ejemplo, sin tener que calcular los 999 anteriores.

Empecemos por contar las ternas de un conjunto con 4 elementos, sea por ejemplo {a, b, c, d} el conjunto, contemos las ternas que tienen al elemento d, para ésto tomamos el conjunto (a, b, c) formado por tres de los elementos del de 4; formemos las parejas de este último conjunto: ab, ac, bc; tenemos (3)(2)/2 = 3 parejas, como ya sabemos. A estas parejas les agregamos el elemento d del conjunto original y obtenemos así las ternas: abd, acd y bcd. Teniendo entonces (3)(2)/2 = 3 ternas del conjunto de cuatro elementos, estas son todas las ternas que tienen al elemento d como uno de sus tres elementos. Si hacemos lo mismo con otro elemento por ejemplo con c, se tiene:

ab, ad, bd son las 3 parejas del conjunto{a, b, d} y agregando el elemento c tenemos: abc, adc y bdc que son las ternas que tienen al elemento c como uno de sus miembros.

Siguiendo así con cada uno de los 4 elementos del conjunto original tenemos: }a,b,d}

<u>abd</u>	abc	acb	bca	{a,c,d{
acd	adc	<u>adb</u>	<u>bda</u>	{b,c,d}
bcd	bdc	cdb	cda	

Son 12 ternas en total, pero tenemos que cada una se repite 3 veces ya que es lo mismo tomar abd que adb ó bda, de todos modos se trata de la misma terna,(en el esquema anterior están subrayadas como ejemplo tres de ellas). De donde el número de ternas de un conjunto con 4 elementos es 12 / 3 = 4 .

Si hacemos lo mismo con un conjunto de 5 elementos se tiene:

Sea {a, b, c, d, e} el conjunto con 5 elementos, quitamos uno y tenemos {a, b, c, d} , formamos las parejas de este último y luego les adjuntamos el quinto elemento e, teniendo así todas las ternas que tienen al elemento e, haciendo lo mismo con cada uno de los 5 elementos se tiene:

TERNAS QUE TIENEN A e	TERNAS QUE TIENEN A d	TERNAS QUE TIENEN A c	TERNAS QUE TIENEN A b	TERNAS QUE TIENEN A a
abe	abd	abc	acb	bca
ace	acd	adc	adb	bda
ade	aed	aec	aeb	bea
bce	bcd	bdc	cdb	cda
bde	bed	bec	ceb	cea
cde	bad	bac	deb	dea

tabla 13

Tenemos en total 30 ternas, donde cada una se vuelve a repetir 3 veces, (vease tabla 13). Entonces para un conjunto de 5 elementos, las ternas son ((4)(3)/2)(5)/3 = (30)/3 = 10

En general tenemos:

Para un conjunto con K elementos, contemos todas las ternas que contienen a un elemento dado, hacemos una lista de las parejas que podemos hacer con los K-1 elementos restantes, que ya sabemos que son (K-2)(K-1)/2 parejas. A estas parejas les adjuntamos el elemento que habíamos quitado y tenemos así (K-2)(K-1)/2 ternas del conjunto original, en donde siempre aparece un mismo elemento. Hacemos lo mismo con otro de los elementos del conjunto, y así para cada uno de los K elementos de él, entonces lo que tenemos son K(K-1)(K-2)/2 ternas, pero cada una de éstas se repite tres veces, por lo que ya se ha mencionado, así es que el número de ternas de un conjunto con K elementos son: K(K-1)(K-2)/6 .

¡ Ya tenemos una fórmula que nos proporciona el número de ternas que podemos formar con un conjunto de K elementos!

Vamos a comprobar de otra manera que la fórmula es cierta.

Primero debemos comprobar si en la tabla 10 la fórmula dada también concuerda renglón por renglón:

si K = 1 se tiene (1)(0)(-1)/6 = 0
si K = 2 (2)(1)(0)/6 = 0
si K = 3 (3)(2)(1)/6 = 1

Comprobando directamente para 4, 5 y 6 vemos que en verdad la fórmula es cierta en todos estos casos. Pero tenemos que comprobar si en general esa fórmula nos sirve para cualquier renglón de la tabla. Ya sabemos que el incremento de un renglón a otro es un número triangular, es más, sabemos que el incremento del renglón K-1 al renglón K es T_{K-2} y sabemos cuánto vale ese triangular, entonces veamos si la fórmula también tiene ese incremento en el renglón K.

En el renglón K la fórmula es (K)(K-1)(K-2)/6 y en el renglón K-1 es (K-1)(K-2)(K-3)/6 , veamos cuánto vale su diferencia.

$$
\begin{aligned}
&(K)(K-1)(K-2)/6 - (K-1)(K-2)(K-3)/6 = \\
&[\,(K^2-K)(K-2) - (K^2-3K+2)(K-3)\,]/6 = \\
&[\,(K^3-3K^2+2K) - (K^3-6K^2+11K-6)\,]/6 = \\
&(3K^2-9K+6)/6 = (\,K^2 - 3K + 2\,)/\,6 = \\
&[\,(K-2)(K-1)\,]\,/6 = T_{K-2}
\end{aligned}
$$

Con lo que hemos comprobado que la fórmula (K)(K-1)(K-2)/6 nos proporciona siempre el número de ternas que podemos formar de un conjunto con K elementos, sea cual sea la K que tomemos.

Teníamos pendiente también, encontrar la suma de los números triangulares, entonces con este resultado ya podemos decir cuánto vale ésta. Pero si quisiéramos encontrarla por otro camino, podemos hacerlo en seguida, veamos:

Queremos encontrar:

$T_1 + T_2 + T_3 + \ .\ .\ .\ + T_{N-1} + T_N$ que es lo mismo que:

$$1 + 3 + 6 + \ .\ .\ .\ + (N-1)(N)/2 + (N)(N+1)/2 =$$

$$1 + (1+2) + (1+2+3) + \ .\ .\ .\ + (1 + 2 + 3 + \dots + (N-1)) + (1 + 2 + 3 + \dots + N) =$$

$$
\begin{array}{lllllllll}
 & 1 & & & & & & & \\
 & 1 + & 2 & & & & & & \\
 & 1 + & 2 & + & 3 & & & & \\
 & 1 + & 2 & + & 3 & + & 4 & & \\
 & . & . & . & & & & & \\
+ & . & . & . & & & & & \\
 & . & . & . & & & & & \\
 & 1 + & 2 & + & 3 & + & .\ .\ . & + (N-1) & + N \\
\hline
 & N + & (N-1)2 & + & (N-2)3 & + & .\ .\ . & + 2(N-1) & + N
\end{array}
$$

Lo cual ya habíamos planteado antes, y que ahora sí vamos a analizar. Primero veamos qué sucede con números pequeños, por ejemplo si N=5 tenemos:

$$
\begin{array}{rl}
1 + 3 + 6 + 10 + 15 = & 1 \\
& 1 + 2 \\
+ & 1 + 2 + 3 \\
& 1 + 2 + 3 + 4 \\
& \underline{1 + 2 + 3 + 4 + 5} \\
& 5x1+4x2+3x3+2x4+1x5
\end{array}
$$

Si completamos la suma como:

$$
\begin{array}{rl}
& 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\
& 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\
+ & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\
& 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\
& \underline{1 + 2 + 3 + 4 + 5}
\end{array}
$$

Tenemos:

1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 5(1) + 4(2) + 3(3) + 2(4) + 1(5) = [5(1)+ 5(2)+ 5(3)+ 5(4)+ 5(5)]-[1(2)+ 2(3)+ 3(4)+ 4(5)]= 5(1 + 2 + 3 + 4 + 5) - 2(1 + 3 + 6 + 10)

Por tanto

1 + 3 + 6 +10 +15=5(1 + 2 + 3 + 4 + 5)-2(1 + 3 + 6 + 10)

Donde del lado derecho de la igualdad lo único que sabemos es sumar los números naturales, pero tenemos también que sumar los números triangulares en el segundo sumando. ¡otra vez el mismo problema! Sigamos buscando como hacerlo.

(1 +3 +6 +10 +15)+2(1 + 3 + 6 + 10)=5(1 + 2 + 3 + 4 + 5)

(1 +3 +6 +10 +15)+2(1 +3 +6+10+15)= 5(1+2+3+4+5) + 2(15)

3(1 + 3 + 6 + 10 + 15) = 5(1 + 2 + 3 + 4 + 5)+ 2(1+2+3+4+5)

3(1 + 3 + 6 + 10 + 15) = 7(1 + 2 + 3 + 4 + 5)

1 + 3 + 6 + 10 + 15 = [7(1+2+3+4+5)]/3 = $[(5+2)(T_5)]/3$

Que ya sabemos calcular y que es: (7)(15)/3 = 35

Y es cierto que 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35

Debemos ahora verificar si este procedimiento es válido para cualquier N.

$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{N-1} + T_N =$

$$
\begin{array}{rccccccccccc}
 & 1 \\
 & 1 & + & 2 \\
 & 1 & + & 2 & + & 3 \\
+ & \vdots \\
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (N-1) \\
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (N-1) & + & N \\
 & (N)1 & + & (N-1)2 & + & (N-2)3 & + & \cdots & + & 2(N-1) & + & (1)N
\end{array}
$$

Completando como antes:

$$
\begin{array}{rccccccccccc}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (N-1) & + & N \\
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (N-1) & + & N \\
+ & \vdots \\
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (N-1) & + & N \\
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (N-1) & + & N \\
\hline
 & N(1) & + & N(2) & + & N(3) & + & \cdots & + & N(N-1) & + & N(N)
\end{array}
$$

Tenemos en total: $N(1+2+3+. . .+(N-1)+N)$ y debemos quitarle lo que agregamos, o sea, debemos quitar:
$1(2) + 2(3) + 3(4) + . . . + (N-1)N$ entonces:
$T_1 + T_2 + T_3 + . . . + T_{N-1} + T_N =$
$N(1+2+3+. . .+N) - [(1)(2)+(2)(3)+. . .+(N-1)(N)] =$
como en $(1)(2)+(2)(3)+...+(N-1)(N)$ cada uno de los sumandos es par, sacamos como factor común al 2 y tenemos:
$N(1+2+3+. . .+N) - 2[1+3+. . .+[(N-1)N]/2] =$
como ya sabemos que el producto de dos números consecutivos divididos entre 2 es un número triangular, tenemos:
$N(1+2+3+. . .+N) - 2(T_1 + T_2 + . . . + T_{N-1}) =$
Por lo tanto
$(T_1+T_2+. . .+T_N) + 2(T_1+T_2+. . .+T_{N-1}) = N(1+2+. . .+N)$
$(T_1+T_2+. . .+T_{N-1}+T_N) + 2(T_1+T_2+. . .+T_{N-1}) = NT_N$
sumando a ambos lados $2T_N$ tenemos:
$(T_1+T_2+. . .+T_{N-1}+T_N) + 2(T_1+T_2+. . .+T_{N-1}+T_N) = NT_N+2T_N$
$3(T_1+T_2+. . .+T_{N-1}+T_N) = (N+2)T_N$

$(T_1 + T_2 + . . . + T_{N-1} + T_N) = [(N+2)T_N]/3$
$=(N+2)(N+1)(N)/6$

LLegamos así a la fórmula que ya habíamos obtenido por otro procedimiento y que ya habíamos visto que era válida para cualquier número N ó para cualquier renglón de la tabla.

Otra forma más de encontrar el número de ternas de un conjunto con K elementos

Como antes, empezaremos analizando casos con K's pequeñas; por ejemplo si K=4 tenemos:

Sea X={a, b, c, d} un conjunto de cuatro elementos. Tomemos el conjunto Y={a, b, c} y formemos todas las parejas del conjunto Y, éstas las combinamos con el elemento d del conjunto X y tenemos así tantas ternas de X como parejas tiene Y. O sea (3)(2)/2 = 3 ternas, pero estas no son todas, todavía falta contar la terna formada por el mismo conjunto Y. Es decir, lo que hemos hecho es:

Formamos las tres parejas de Y: ab, ac y bc; a éstas les agregamos el elemento d, tenemos: abd, acd y bcd; pero no son todas, falta la terna abc. De donde el número de ternas de un conjunto con 4 elementos es 4.

Si tenemos un conjunto con 5 elementos, se tiene:

Sea X={a, b, c, d, e} el conjunto de 5 elementos y sea Y={a, b, c, d} el conjunto auxiliar. Formamos las (4)(3)/2 =6 parejas del conjunto Y : ab, ac,ad, bc,bd y cd : A éstas les agregamos el elemento e del conjunto X, y tenemos así las 6 ternas siguientes: abe, ace, ade, bce, bde y cde. Pero aún faltan las 4 ternas del caso anterior, o sea faltan las ternas: abd, acd, bcd y abc; por lo que las ternas de un conjunto con 5 elementos son:

abe, ace, ade, bce, bde, cde, abd, acd, bcd y abc, que son 10 ternas en total.

Lo que hemos hecho en estos dos ejemplos nos lleva a establecer otra conjetura que es: El número de ternas de un conjunto con K elementos es igual al número de parejas de un conjunto con (K-1) elementos mas el número de ternas que se forman con un conjunto de (K-1) elementos.

Para hacer ver que la conjetura es cierta, analicemos qué fué lo que hicimos.

Si suponemos que ya tenemos contadas las ternas de un conjunto con (K-1) elementos y queremos contar cuántas ternas se forman cuando a ese conjunto de (K-1) elementos se le agrega un elemento mas, lo que hacemos es: Primero que nada hay que observar que las ternas que ya teníamos también tienen que aparecer ahora (que son en particular las ternas del conjunto con K elementos, en donde no aparece el elemento que se anexó a última hora), y además tenemos que contar todas aquellas ternas en donde aparezca ese nuevo elemento, es decir, las ternas que a fuerza tengan en la tercera posición, por ejemplo, a ese último elemento y éstas no son otras mas que el número de parejas que se forman con un conjunto de (K-1) elementos.

Para poder trabajar mejor y mas claramente, vamos a ponerle nombre al número de parejas de un conjunto y algún otro nombre al número de ternas de un conjunto.

Sean $C_K{}^2$ = el número de parejas de un conjunto con K elementos.

Y sea $C_K{}^3$ = el número de ternas de un conjunto con K elementos.

Sabemos ya que $C_K{}^2 = (K)(K-1)/2$ pero , alguna fórmula para $C_K{}^3$ no la sabemos aún, esto es lo que queremos descubrir.

Lo que nuestra conjetura dice, ya teniendo una notación es: $C_K{}^3 = C_{K-1}{}^2 + C_{K-1}{}^3$

Veamos primero si con ejemplos pequeños la conjetura es verdadera:

Si K = 3 $\quad C_3{}^3 = C_2{}^2 + C_2{}^3 = (2)(1)/2 + 0 = 1$

Si K = 4 $\quad C_4{}^3 = C_3{}^2 + C_3{}^3 = (3)(2)/2 + 1 = 4$

Si K = 5 $\quad C_5{}^3 = C_4{}^2 + C_4{}^3 = (4)(3)/2 + 4 = 10$

Y así podemos seguir, y encontraríamos el renglón que quisiésemos, pero tenemos que saber el renglón anterior y para saber el anterior hay que saber el anterior del anterior y así sucesivamente tendríamos que saber todos los renglones anteriores.

De cualquier manera, aunque no podamos calcular cualquier renglón de la tabla sin conocer los anteriores, la conjetura nos dice algo muy claro, que es verdadero y que además podemos ilustrar muy claramente para poder comprender mejor nuestro problema de contar el número de ternas de un conjunto. Veámoslo en general:

Sea $X = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{K-1}, a_K\}$ el conjunto en cuestión. Las ternas de X son todas las ternas en las que no aparece a_K mas todas las ternas en las que sí aparece a_K, y esas son: $C_{K-1}{}^3 + C_{K-1}{}^2$ donde $C_{k-1}{}^3$ son las ternas en donde no aparece a_k y $C_{k-1}{}^2$ son las ternas donde sí aparece a_k en compañía de todas las parejas formadas con los otros elementos distintos de a_k, y a este número ya lo conocemos.

Por este camino no encontramos una formulación general para cualquier renglón de la tabla, pero sí encontramos una relación muy lógica y clara entre un renglón y el siguiente de la tabla.

Ahora, sabiendo el número de parejas de un conjunto con k elementos y que $C_n^3 = C_{k-1}^2 + C_{k-1}^3$ veamos cuánto vale la suma de números triangulares.

Queremos comprobar que en general es cierto que:

$T_1 + T_2 + T_3 + \ . \ . \ . + T_{n-3} + T_{n-2} = C_n^3$ y sabemos calcular cualquier número triangular, en particular sabemos que $T_{n-2} = [(n-2)(n-1)]/2$ y ya sabemos también que es el número de parejas de un conjunto con n-1 elementos, o sea $C_{n-1}^2 = [(n-1)(n-2)]/2$, entonces lo que tenemos es:

$C_n^3 = (T_1 + T_2 + ... + T_{n-3}) + T_{n-3} = C_{n-1}^3 + T_{n-2}$ $\to T_{n-2}$

O sea que debemos demostrar que :

$T_1 + T_2 + ... + T_{n-3} = C_{n-1}^3$ pero por lo que se ha visto en el párrafo anterior, podemos seguir así para atrás en los triangulares y lo que tenemos es:

$T_{n-2} = C_n^3 - C_{n-1}^3$

$T_{n-3} = C_{n-1}^3 - C_{n-2}^3$

$T_{n-4} = C_{n-2}^3 - C_{n-3}^3$

.

.

.

$T_3 = C_5^3 - C_4^3$

$T_2 = C_4^3 - C_3^3$

$T_1 = C_3^3 - C_2^3$

De donde si sumamos tenemos:

$T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_{n-4} + T_{n-3} + T_{n-2} =$

$C_n^3 - C_{n-1}^3 + C_{n-1}^3 - C_{n-2}^3 + C_{n-2}^3 - C_{n-3}^3 + ... + C_4^3 - C_3^3 + C_3^3 - C_2^3 =$

$C_n^3 - C_2^3$

¿Pero qué significa C_2^3?

¡El número de ternas distintas, formadas con un conjunto de 2 elementos es cero!, por lo que:

$T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_{n-2} = C_n^3$

Que por otro lado ya sabíamos que la suma de los triangulares hasta el n-2 es el número de ternas de un conjunto de n elementos.

P R O B L E M A :

Si por alguna razón quisiéramos encontrar la suma: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ . \ . \ . + n^3$ para cualquier número natural n, ¿cómo la encontraríamos?

De nuevo vayamos construyendo una tabla con números pequeños para descubrir algún procedimiento, comportamiento o fórmula general para hacerlo.

Hagamos una tabla con números que podemos ir comprobando :

n	$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ . \ . \ . + n^3$
1	1
2	9
3	36
4	100
5	225

tabla 14

Los números que nos dan, son números que podemos reconocer casi de inmediato; son de nuevo otros de los llamados números figurados, son números cuadrados; es decir son:

1^2, 3^2, 6^2, 10^2, 15^2.

Entonces resulta que $1^3 + 2^3 = 3^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$ $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$, y siguiendo así, observamos que se tiene:

$1^3 = (T_1)^3$

$1^3 + 2^3 = (T_2)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = (T_3)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (T_4)^2$

Y en general tenemos la siguiente conjetura:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ . \ . \ . + n^3 = (T_n)^2$ donde T_n es el n'ésimo número triangular.

¿ Cómo vamos a demostrarlo ?

Sabemos que esa fórmula funciona para los 5 primeros casos, pero ¿será siempre cierta?

Veamos cuales son los incrementos renglón por renglón en la tabla anterior y formemos una nueva tabla.

n	$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$	INCREMENTO
1	1	1
2	9	8
3	36	27
4	100	64
5	225	125

tabla 15

Claramente los incrementos son los cubos de los números naturales, es más ya lo sabíamos porque ese era el problema original, el incremento de un renglón a otro es un número al cubo, o sea en el renglón K de la tabla el incremento es K^3. Para comprobar que la fórmula es cierta en general, tenemos, no solo que comprobar que es cierta para los 5 primeros casos, sino que también se comporta igual en cualquiera de los renglones de la tabla, esto es, que el incremento en el renglón K, también en la fórmula es K^3.

Hagamos ahora una tabla de $(T_n)^2$ como sigue:

n	$(T_n)^2$	INCREMENTO
1	1	1-0 = 1
2	9	9-1 = 8
3	36	36-9 = 27
4	100	100-36 = 64
5	225	225-100=125

tabla 16

Y en general tenemos:

$$(T_K)^2 - (T_{K-1})^2 = [(K)(K+1)/2]^2 - [(K-1)(K)/2]^2 =$$
$$[(K(K+1)/2) + ((K-1)K/2)][(K(K+1)/2) - (K-1)K/2] =$$
$$[K(K+1+K-1)/2][K(K+1-K+1)/2] = K^2(2K)(2)/4 = K^3$$

Por lo que si en los 5 primeros renglones las tablas son iguales y el incremento entre los renglones de ellas siempre es el mismo, se tiene que hemos demostrado que:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (T_n)^2$ para toda n en los números naturales.

De modo que si dos listas empiezan igual y renglón por renglón se incrementan igual, entonces las dos son iguales siempre.

Volvamos al problema de encontrar la suma de números triangulares, o lo que es lo mismo, contemos cuántas ternas hay en un conjunto.

Primero contemos el número de ternas ordenadas que tiene un conjunto con n elementos: esto es, para formar una terna, podemos pensar en un casillero que tiene 3 casillas, por ejemplo, |1a.|2a.|3a.| y que tenemos que acomodar un elemento del conjunto en cada una de las casillas; para colocar un elemento (de los n del conjunto) en la primera casilla tenemos n posibilidades de hacerlo, una vez escogido uno de los n para la primera casilla, tenemos (n-1) posibilidades para escoger el elemento que ocupará la segunda casilla, y para escoger el elemento que ocupará la tercera casilla ya solo tenemos (n-2) posibilidades de escoger uno. Esto sucede para cada uno de los n elementos del conjunto, y sea cual sea el primer elemento que se escogió, para escoger el segundo siempre se tendrán (n-1) posibilidades, y de nuevo, sean cuales sean los que se escogieron en la primera y segunda casillas, para escoger el que estará en la tercera se tienen (n-2) posibilidades para cada elección anterior. Esto es, el número de ternas ordenadas de un conjunto con n elementos es n(n-1)(n-2).

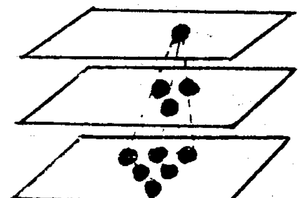
Ahora, lo que queremos en realidad es saber cuántas ternas no ordenadas tiene un conjunto con n elementos. Una vez contadas las ternas ordenadas, veamos cómo contar las no ordenadas: Por cada una de las ternas que ya contamos, se tienen 6 ternas ordenadas que, en realidad, son la misma (hablando de no ordenadas) es decir. Por ejemplo la terna abc es la misma que otras cinco más, cuando queremos contar ternas no ordenadas. O sea abc, bca, cab, bac, acb y cba son la misma terna no ordenada ya que contienen los mismos elementos. Entonces si el número de ternas ordenadas que se pueden contar de un conjunto con n elementos es n(n-1)(n-2), el número de ternas no ordenadas de un conjunto con n elementos es (n)(n-1)(n-2)/6 ; que por otro lado ya lo sabíamos y ya lo habíamos demostrado.

Ahora, veamos una forma geométrica de encontrar el número de ternas de un conjunto con n elementos, basándonos en la idea que trabajaron los griegos en cuanto a la representación geométrica de algunos números a los que llamaban números figurados.

Por ejemplo para sumar 1 + 3 + 6 , que es lo mismo que sumar T_1 + T_2 + T_3 y que geométricamente sería sumar:

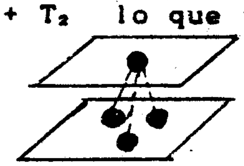
```
                    .                                   .
         .        . .                        .        . .
   .  +  . .  +  . . .     o bien      .  +  . .  +  . . .
```

es decir, lo que queremos encontrar es, cuántos puntitos hay en esta última representación, teniendo así la suma hasta el tercer número triangular. Busquémos entonces si existe alguna manera de colocarlos de tal forma que nos facilite la cuenta. Salgámonos del plano en que están colocados los puntos y formémos con ellos una pirámide colocándolos de la siguiente manera:



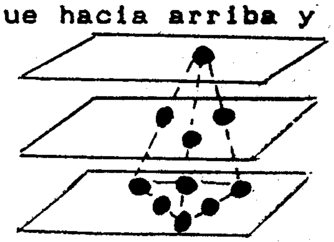
El resultado es una pirámide triangular en donde en cada "piso" o "capa" se tiene un número triangular.

Si queremos sumar T_1 + T_2 lo que tenemos es:



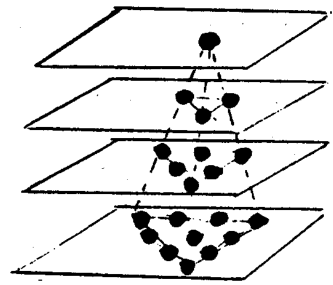
Una pirámide triangular que tiene en la base 3 puntitos y uno en el otro nivel.

Ya vimos que si queremos sumar T_1 + T_2 + T_3 lo que se obtiene es una pirámide triangular con 6 puntos en la base, 3 puntos en el nivel que sigue hacia arriba y un punto más en el último plano, o sea:



Si lo que se quiere es sumar hasta el cuarto número triangular, tenemos:

Una pirámide triangular



Una pirámide triangular con 10 puntos en la base, 6 puntos en el siguiente nivel, 3 puntos en el penúltimo nivel y al final un punto en la "punta"

Podemos entonces, en general, llamarles a éstos, números piramidales, o sea el primer número piramidal será el uno, el segundo será el $4=T_1+T_2$, el tercer número piramidal es $10=T_1+T_2+T_3$, el cuarto es $20=T_1+T_2+T_3+T_4$ y así sucesivamente obtenemos que el enésimo número piramidal es:

$T_1 + T_2 + T_3 + . . . + T_n$

Pero necesitamos saber cuánto vale el enésimo número piramidal, para saber cuánto es la suma de números triangulares, que era nuestro problema realmente.

Si hacemos algo semejante a lo que dicen que hizo Gauss cuando niño, tenemos:

Por ejemplo, si queremos obtener el cuarto número piramidal:

$$\begin{array}{rcccccccccl} & 1 & + & 3 & + & 6 & + & 10 & = & 20 & \quad (1) \\ + & & & & & & & & & & \\ & 10 & + & 6 & + & 3 & + & 1 & = & 20 & \quad (2) \\ \hline & 11 & + & 9 & + & 9 & + & 11 & = & 40 & \end{array}$$

En (1) tenemos la pirámide que hemos venido construyendo y en (2) la misma pirámide pero invertida (con la punta hacia abajo).

Si queremos obtener por ejemplo el quinto número piramidal:

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
 & 1 & + & 3 & + & 6 & + & 10 & + & 15 & = & 35 \\
+ & & & & & & & & & & & \\
 & 15 & + & 10 & + & 6 & + & 3 & + & 1 & = & 35 \\
\hline
 & 16 & + & 13 & + & 12 & + & 13 & + & 16 & = & 70
\end{array}
$$

¡ No nos dan resultados "bonitos" para contar en general !

Recordemos que cuando queríamos calcular a los números triangulares hacíamos algo parecido y formábamos un rectángulo que tenía como base un número natural y de altura el siguiente número natural, y que en total al número de puntitos que tenía el rectángulo era el doble del triangular que buscábamos. Bien, pues tratemos de hacer algo semejante en el sentido de construir una figura geométrica auxiliar en la cual podamos calcular fácilmente el número de puntos que contrenga, y por otro lado que esté compuesta también por los números piramidales que es lo que en realidad buscamos.

Si tuviéramos un prisma triangular podríamos contar cuantos puntos tiene, con solo conocer cuantos tiene de base (un número triangular) y cuantos tiene de altura. Al sumar una pirámide invertida no formamos un prisma, pero podemos analizar qué hicimos para encontrar qué nos faltaría para construir un prisma triangular.

Para facilitar un poco, llamémosle de alguna manera a cada uno de los "puntitos" de cada pirámide y veamos nivel por nivel què es lo que sucede en cada caso.

Sean θ un punto de la pirámide original,
O un punto de la pirámide invertida y
X un punto de los que nos faltarían para tener un prisma.

Por ejemplo, si queremos encontrar el tercer número piramidal tenemos tres niveles que analizar:

En el nivel de la base tenemos:

```
   X
  θ X
 θ θ X     Que sería la base del prisma que buscamos
θ θ θ O
```

En el segundo nivel hacia arriba tendríamos:

```
   X
  X X
 θ X O
θ θ O O
```

para continuar con el prisma triangular

Y por último en el tercer nivel (el de mas arriba) tendríamos:

```
   X
  X O
 X O O
θ O O O
```

Que sería la última capa del prisma que buscámos.

Si queremos encontrar el cuarto piramidal se tiene:

```
    X
   θ X
  θ θ X
 θ θ θ X
θ θ θ θ O
```

Primer nivel (la base)

```
    X
   X X
  θ X X
 θ θ X O
θ θ θ O O
```

Segundo nivel

```
    X
   X X
  X X O
 θ X O O
θ θ O O O
```

Tercer nivel

```
    X
   X O
  X O O
 X O O O
θ O O O O
```

El cuarto y último nivel.

Hagamos un resumen de lo que tenemos con estos 2 ejemplos, ilustrémoslo en las siguientes tablas y veamos qué es lo que podemos conjeturar de nuestras observaciones.

PRISMA DE BASE EL CUARTO TRIANGULAR

	nivel 1	nivel 2	nivel 3	TOTAL
# de θ	6	3	1	10
# de O	1	3	6	10
# de X	3	4	3	10
TOTAL	10	10	10	30

tabla 17

PRISMA DE BASE EL QUINTO TRIANGULAR

	nivel 1	nivel 2	nivel 3	nivel 4	TOTAL
# de θ	10	6	3	1	20
# de O	1	3	6	10	20
# de X	4	6	6	4	20
TOTAL	15	15	15	15	60

tabla 18

Preguntamos al lector, el número de X en cada caso, ¿será también una pirámide triangular?

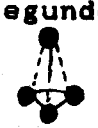
Observamos en estos 2 ejemplos que el número total de puntos que nos faltan son, también la suma de números triangulares por lo que si en general sucediese esto, ya podríamos encontrar cuánto vale el enésimo número piramidal.

Esperamos por el momento que si queremos sumar hasta el quinto número triangular, lo que obtengamos con este procedimiento sea $(T_4)(5)/3$, y en general nuestra hipótesis es que para encontrar el enésimo número piramidal la fórmula es:

$(n)(T_{n+1})/3$

Para demostrarla, empecemos nuevamente por analizar números pequeños para descubrir la regla general en el comportamiento del problema.

Si se quiere encontrar el segundo número piramidal:

1 + 3 = . + .:. =  = 4 puntos

Tenemos que formar un prisma triangular de base igual al tercer número triangular. Entonces en el nivel de la base tenemos:

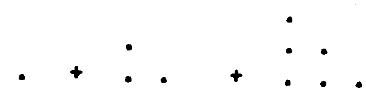
X
θ X
θ θ O

Donde faltaría una hilera de dos puntos. En el segundo nivel se tendría:

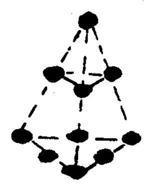
X
X O
θ O O

Faltaría una hilera de 2 puntos, o bien 2 hileras de 1 punto cada una, para tener un prisma triangular de base 6 y altura 2, por lo que el segundo número piramidal es (6)(2)/3 o sea 4.

Si queremos sumar

$1 + 3 + 6 = T_1 + T_2 + T_3 =$ 

o sea contar



Debemos formar un prisma con base en cuarto número triangular.

Así, tenemos en la base:

X
θ X
θ θ X
θ θ θ O

faltaría una hilera de 3 puntos.

En el segundo nivel:

X
X X
θ X O
θ θ O O

faltarían 2 hileras de dos puntos cada una, y por último, En el tercer nivel

```
      X
     X O
    X O O
   8 O O O    faltarían 3
```

hileras de 1 punto cada una.

De donde el prisma tiene en total 30 puntos distribuidos como sigue:

```
    1 + 3 + 6          = 10  en la pirámide original
    6 + 3 + 1          = 10  en la pirámide invertida y
(1)(3)+(2)(2)+(3)(1)   = 10  los puntos que faltarían
                               por nivel.
```

Ahora si se quiere sumar hasta el T_4 tenemos que formar un prisma de base T_5 y altura 4, y de forma análoga al caso anterior tenemos:

```
Primer nivel        X
                   8 X
                  8 8 X
                 8 8 8 X
                8 8 8 8 O  faltaría 1 hilera de 4 puntos.
Segundo nivel       X
                   X X
                  8 X X
                 8 8 X O
                8 8 8 O O faltarían 2 hileras de 3 puntos
Tercer nivel        X
                   X X
                  X X O
                 8 X O O
                8 8 O O O faltarían 3 hileras de 2 puntos

Y cuarto nivel      X
                   X O
                  X O O
                 X O O O
                8 O O O O faltarían 4 hileras de 1 punto.
```

Por lo que el prisma tiene en total 60 puntos formados como sigue:

```
   1   +   3   +   6   +  10   =  20
  10   +   6   +   3   +  10   =  20
(1)(4) + (2)(3) + (3)(2) + (4)(1) = 20
```

En todos estos casos, y en general, es claro que los dos primeros renglones son iguales, además, cada uno de ellos es la suma de números triangulares, entonces lo que en realidad queremos demostrar es que:

$$(1)(n) + (2)(n-1) + (3)(n-2) + \ldots + (n-1)(2) + (n)(1) =$$
$$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{n-1} + T_n = [(n)(n+1)(n+2)]/6$$

¡ Esto ya lo habíamos demostrado antes ! Cuando demostramos que la suma:

$$\begin{array}{lllllll}
 & 1 & & & & & \\
 & 1 & + 2 & & & & \\
 & 1 & + 2 & + 3 & & & \\
+ & \cdots & & & & & \\
 & \cdots & & & & & \\
 & \cdots & & & & & \\
 & 1 & + 2 & + 3 & + \ldots & + (n-1) & \\
 & 1 & + 2 & + 3 & + \ldots & + (n-1) & + n \\
\hline
\end{array}$$

$$(n)1 + (n-1)(2) + (n-2)3 + \ldots + 2(n-1) + (1)n$$

es lo mismo que $\dfrac{(n)(n+1)(n+2)}{6}$

y observemos de nuevo que ésta es precisamente la suma de los números triangulares.

Hagámoslo ahora en general y veamos si podemos demostrarlo de otra forma.

$$\begin{array}{rlllll}
 & T_1 & + T_2 & + T_3 & + \ldots & + T_n \\
+ & T_n & + T_{n-1} & + T_{n-2} & + \ldots & + T_1 \\
 & (1)(n) & + 2(n-1) & + 3(n-2) & + \ldots & + n(1) \\
\hline
\end{array}$$

$$(T_1 + T_n + n) + (T_2 + T_{n-1} + 2(n-1)) + (T_3 + T_{n-2} + 3(n-2)) + \ldots$$
$$+ (T_n + T_1 + n)$$

Sumando los sumandos parciales tenemos:

$$T_1 + T_n + n = (1)(2)/2 + (n)(n+1)/2 + n = [2+n^2+n+2n]/2 =$$
$$[n^2 + 3n + 2]/2 = [(n+1)(n+2)] / 2 = T_{n+1}$$
$$T_2 + T_{n-1} + 2(n-1) = (2)(3)/2 + (n-1)(n)/2 + 2(n-1) =$$
$$[6 + n^2 - n + 4n - 4] / 2 = [n^2 + 3n + 2]/2$$
$$[(n+1)(n+2)] / 2 = T_{n+1}$$

.
.
.

$T_{i+1} + T_{n-i} + (i+1)(n-i) = (i+1)(i+2)/2 + (n-i)(n-i+1)/2 + (i+1)(n-i) =$

$[i^2+3i+2+n^2-2ni+n+i^2-i+2ni-2i^2+2n-2i] / 2 =$

$[n^2 + 3n + 2]/2 = (n+1)(n+2)/2 = T_{n+1}$

.
.
.

$T_n + T_1 + n = \ldots = T_{n+1}$

Por lo tanto

$$\begin{array}{cccccccccccccc} & T_1 & + & T_2 & + & T_3 & + & \ldots & + & T_{n-1} & + & T_n \\ + & T_n & + & T_{n-1} & + & T_{n-2} & + & \ldots & + & T_2 & + & T_1 \\ & 1(n) & + & 2(n-1) & + & 3(n-2) & + & \ldots & + & (n-1)2 & + & (n)1 \\ \hline & T_{n+1} & + & T_{n+1} & + & T_{n+1} & + & \ldots & + & T_{n+1} & + & T_{n+1} \end{array}$$

que es:

$n(T_{n+1}) = [n(n+1)(n+2)] / 2$

Que es el número total de puntos del prisma triangular, entonces despejando:

$2(T_1+T_2+\ldots+T_n) + [1(n)+2(n-1)+\ldots+(n-1)2+(n)1] = [n(n+1)(n+2)] / 2$

De donde

$1(n) + 2(n-1) + \ldots + (n-1)2 + (n)1 =$

$[n(n+1)(n+2)]/2 - 2(T_1 + T_2 + \ldots + T_n) =$

(como ya sabemos cuánto vale la suma de triangulares)

$[n(n+1)(n+2)]/2 - 2[n(n+1)(n+2)/6] =$

$[3n(n+1)(n+2) - 2n(n+1)(n+2)] / 6 =$

$[(n+1)(n+2)(3n-2n)] / 6 = [n(n+1)(n+2)] / 6 =$

$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n$

Por lo tanto es cierto que la suma:

$1(n) + 2(n-1) + 3(n-2) + \ldots + (n-1)2 + (n)1$ es igual a la suma de los números triangulares desde el primero hasta el enésimo, sea cual sea la n.

Así, el enésimo número piramidal es:

$[n(T_{n+1})] / 3 = [n(n+1)(n+2)] / 6$

Que es lo que por otro camino ya habíamos probado.

Hemos visto además que un prisma triangular (de los hemos estado trabajando) se descompone en 3 pirámides de igual volumen cada una. Una pirámide está sobre su base, la segunda (la invertida) está sobre su vértice y la tercera está recargada sobre una arista.

Sugerimos al lector, como ejercicio, hacer un modelo de ésto, ya sea con pelotas de hule espuma, con bolas de unicel, con canicas, o con algún otro material que se le facilite, para observar cómo están colocadas las pirámides.

En esta descomposición se basa la fórmula del volumen de una pirámide: "área de la base por la altura entre 3", al igual que la descomposición del paralelogramo en 2 triángulos nos dá la fórmula del área del triángulo.

Sin embargo en este caso las 3 pirámides, aunque tienen el mismo volumen no son en general congruentes, como puede verse si se hizo el modelo. Esto introduce una complicación adicional que sólo puede resolverse con procedimientos infinitos, como el "Principio de Cavalieri" o los métodos del Cálculo Integral.

¿Pueda el lector construir un prisma triangular donde las 3 pirámides <u>sí</u> sean congruentes?

PROBLEMA.

¿Cuántos subconjuntos tiene un conjunto de n elementos?

Empecemos contando los casos pequeños. Por ejemplo, si el conjunto tiene 1 elemento ¿cuántos subconjuntos tiene? Solo tiene 2 subconjuntos que son el conjunto vacío y el conjunto mismo, o sea ø y {a} son los subconjuntos de {a}.

Si el conjunto tiene 2 elementos, por ejemplo {a,b}, los subconjuntos son: ø, {a}, {b} y {a,b}. Cuatro subconjuntos.

Para un conjunto con 3 elementos, {a,b,c} los subconjuntos son: ø, {a}. {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c} y {a,b,c}. Ocho subconjuntos en total.

Siguiendo así, tenemos que para un conjunto con 4 elementos {a,b,c,d} los subconjuntos son: ø, {a}, {b}, {c}, {d}, {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}, {a,b,c}, {a,b,d}, {b,c,d}, {a,c,d} y {a,b,c,d} que son 16 subconjuntos. Entonces podemos formular una tabla con los casos que hemos contado como sigue:

# DE ELEMENTOS	# DE SUBCONJUNTOS
0 (4)	1
1	2
2	4
3	8
4	16

tabla 19

Entonces, por lo que hemos hecho, vemos que para encontrar los subconjuntos de un conjunto con n elementos necesitamos conocer cuántos subconjuntos de 0 elementos tiene, cuántos subconjuntos con 1 elemento, cuántos con 2 elementos, cuántos con 3 elementos, y así

(4) Hemos agregado también el caso en que el conjunto no tiene elementos, en cuyo caso el número de subconjuntos es 1 ya que el ø siempre es subconjunto de cualquier conjunto.

sucesivamente hasta cuántos subconjuntos con n elementos tiene.

Pero esto en general todavía no lo sabemos; sabemos cuántos subconjuntos de 0 elementos porque solo existe uno (el vacío); sabemos cuántos subconjuntos de un elemento porque es lo mismo que contar el número de elementos del conjunto; sabemos cuántos subconjuntos de 2 elementos tiene porque ya sabemos contar el número de parejas no ordenadas de un conjunto con n elementos (que es lo mismo que el número de subconjuntos con 2 elementos ¿no?) y por último sabemos cuántos subconjuntos de 3 elementos tiene, ya que también sabemos cuántas ternas no ordenadas tiene un conjunto con n elementos; pero a partir de cuatro elementos, no sabemos aún cuantos subconjuntos se forman. Entonces podemos seguir por este camino y averiguar cuantos subconjuntos de k elementos tiene un conjunto con n elementos, para cualquier k en los números naturales (no solo para k=1,2 y 3), o bien podemos intentar otro camino para determinar cuántos subconjuntos tiene un conjunto con n elementos en donde no necesitemos esta información.

El primer camino lo dejaremos pendiente por el momento, lo veremos un poco mas adelante, seguiremos ahora por el segundo, intentaremos ver el problema de otro modo. (el lector puede intentar el primer camino por su propia cuenta, aunque también aquí lo veremos mas adelante)

Para un conjunto con 0 elementos, el número de subconjuntos, ya hemos visto es solo uno. Para un conjunto con 1 elemento, los subconjuntos son: el subconjunto con 0 elementos mas el subconjunto que consta del elemento único del conjunto. O sea, si el conjunto con 1 elemento es {a}, los subconjuntos son ø y el subconjunto {a} que es el conjunto mismo. En total son 2 subconjuntos.

Para un conjunto con 2 elementos, el número de subconjuntos es el número de subconjuntos de un conjunto con 1 elemento (caso anterior) más el número de subconjuntos nuevos que se formen con el conjunto de 2 elementos. Esto es, si el conjunto de 2 elementos es {a,b} el número de subconjuntos es: los 2 subconjuntos de {a}, que son: ∅ y {a}, más los 2 subconjuntos {b} y {a,b} que son los subconjuntos que no eran subconjuntos de {a}, por lo que en total tenemos 4 subconjuntos de {a,b}.

Para el caso en que el conjunto tenga 3 elementos, por ejemplo {a,b,c}, los subconjuntos son todos los del caso anterior más los nuevos subconjuntos formados con el elemento c. O sea ∅, {a}, {b}, {a,b} más {c}, {a,c}, {b,c} y {a,b,c} en total 8 subconjuntos.

Para un conjunto con 4 elementos solo debemos contar los 8 subconjuntos de un conjunto de 3 elementos y agregarle los subconjuntos formados por el nuevo elemento agregado a cada uno de los 8 subconjuntos anteriores, esto es: los subconjuntos de {a,b,c,d} son los subconjuntos de {a,b,c} más cada uno de éstos junto con el elemento d, o sea:

∅, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c} más {d}, {a,d}, {b,d}, {c,d}, {a,b,d}, {a,c,d}, {b,c,d} y {a,b,c,d}

O lo que es lo mismo, solo debemos multiplicar por 2 el caso anterior. Con lo que el número de subconjuntos de un conjunto de 4 elementos es 16.

Así para un conjunto de 5 elementos el número de subconjuntos debe ser 16 x 2 = 32.

En general tenemos entonces que si sabemos el número de subconjuntos de un conjunto con K elementos, podemos saber el número de subconjuntos de un conjunto con K+1 elementos; solamente debemos multiplicar por 2 el caso anterior.

Podemos entonces incrementar la tabla 15 como sigue y ver si podemos encontrar una fórmula general:

# DE ELEMENTOS	#DE SUBCONJUNTOS	INCREMENTO
0	1	-
1	2 = 2(1)	1
2	4 = 2(2)	2
3	8 = 2(4)	4
4	16 = 2(8)	8
5	32 = 2(16)	16
6	64 = 2(32)	32
7	128 = 2(64)	64

tabla 20

¿ Cuál será el número de subconjuntos si el número de elementos es K ?

Si denotamos por S(n) al número de subconjuntos de un conjunto con n elementos, lo que hasta aquí sabemos es:

S(K) = 2 (S(K-1)) con lo que tenemos una fórmula recursiva para encontrar el número de subconjuntos de un conjunto con n elementos. Pero como ésta fórmula es siempre cierta, podemos sustituir encadenadamente y tenemos: S(K) = 2(S(K-1)) = 2 [2(S(K-1))] = 2(2[2(S(K-1))]) = . . .

Y llegaremos así, en algún momento a S(6) que ya conocemos, esto es:

Por ejemplo S(8) es:

S(8) = 2[S(7)] = 2(2[S(6)]) = 2[2(64)] = 2(128) = 256

Veamos entonces cuántas veces se tiene que multiplicar por 2 para llegar a S(K).

Por ejemplo si K = 5 tenemos:

S(5) = 2[S(4)] = 2(2[S(3) = 2[2(2[S(2)])] = 2(2[2(2[S(1)])]) = 2[2(2[2(2[2])])] = 2^5 = 32

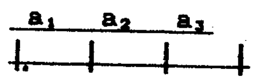
Entonces vemos que en general S(K) es:

S(K) = 2[S(K-1)] = 2(2[S(K-2)]) = . . . = 2^K

Por lo que el número de subconjuntos de un conjunto con K elementos es 2^K .

Otra manera de ver el mismo problema es la siguiente:

Supongamos que tenemos un conjunto de 3 elementos y queremos encontrar el número de subconjuntos que tiene. Sea el conjunto $\{a_1, a_2, a_3\}$ el conjunto en cuestión. Coloquemos en una hilera los elementos del conjunto y debajo de ella una hilera de 3 casillas como sigue:



Para un subconjunto de $\{a_1, a_2, a_3\}$, asignemos un número 1 en la primera casilla si el elemento a_1 es elemento del subconjunto y número 0 si el elmento a_1 no es elemento del subconjunto. Lo mismo para cada una de las 3 casillas. Tenemos así una distribución de ceros y unos para cada uno de los subconjuntos. Hagamos una lista de los subconjuntos y de la hilera de casillas correspondiente para este caso particular.

SUBCONJUNTO	a_1	a_2	a_3
$\emptyset$	0	0	0
$\{a_1\}$	1	0	0
$\{a_2\}$	0	1	0
$\{a_3\}$	0	0	1
$\{a_1, a_2\}$	1	1	0
$\{a_1, a_3\}$	1	0	1
$\{a_2, a_3\}$	0	1	1
$\{a_1, a_2, a_3\}$	1	1	1

De esta manera tenemos una función uno a uno entre los subconjuntos de un conjunto de 3 elementos y la distribución de ceros y unos en un casillero de 3 lugares.

De manera que para un conjunto con 4 elementos tenemos un casillero con 4 lugares y de la misma manera debemos contar cuantas formas distintas hay de llenar los 4 lugares con ceros y unos.

Sea $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ un conjunto de 4 elementos.

SUBCONJUNTO	a_1	a_2	a_3	a_4
$\emptyset$	0	0	0	0
$\{a_1\}$	1	0	0	0
$\{a_2\}$	0	1	0	0
$\{a_3\}$	0	0	1	0
$\{a_4\}$	0	0	0	1
$\{a_1, a_2\}$	1	1	0	0
$\{a_1, a_3\}$	1	0	1	0
$\{a_1, a_4\}$	1	0	0	1
$\{a_2, a_3\}$	0	1	1	0
$\{a_2, a_4\}$	0	1	0	1
$\{a_3, a_4\}$	0	0	1	1
$\{a_1, a_2, a_3\}$	1	1	1	0
$\{a_1, a_2, a_4\}$	1	1	0	1
$\{a_1, a_3, a_4\}$	1	0	1	1
$\{a_2, a_3, a_4\}$	0	1	1	1
$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$	1	1	1	1

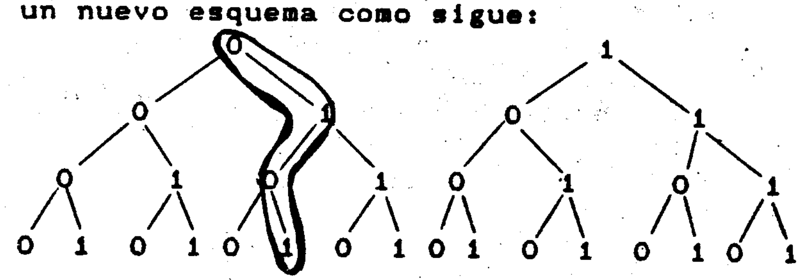
Entonces para contarlos podemos verlo como el número de formas distintas que se tienen de distribuir ceros y unos en un casillero de 4 lugares. Para llenar la primera casilla tenemos 2 oportunidades, ponemos un uno o bien ponemos un cero (el primer elemento está o no está en el subconjunto). Una vez que hayamos llenado la primera casilla, para la segunda casilla tenemos de nuevo 2 oportunidades: ponemos un uno o ponemos un cero; una vez llenos las dos primeras, para llenar la tercera casilla tenemos otra vez 2 posibilidades, poner un uno o poner un cero, y por último, para llenar la cuarta casilla, no importa lo que hayamos hecho en las tres primeras, tenemos otras 2 oportunidades, ponemos un uno o ponemos un cero. Por lo que el número de formas distintas que tenemos de llenar con ceros y unos un casillero de 4 lugares es: 2 para el primero, 2 para el segundo, 2 para el tercero y 2 para el cuarto lugar; por lo tanto son $2x2x2x2 = 2^4 = 16$ formas de hacerlo. Hemos puesto la multiplicación, porque para cada una de las elecciones que hagamos existen todas las otras posibilidades, es decir, si en la primera escogemos cero podemos escoger unos en todas las otras o bien en todas puros ceros o combinados, pero esto mismo podíamos haber hecho si en la primera hubiésemos escogido un uno; y así para cada una de las 4 casillas. Todo esto podemos ilustrarlo en un nuevo esquema como sigue:

1a.CASILLA

2a.CASILLA

3a.CASILLA

4a.CASILLA



esquema 1

También aquí tenemos una representación para cada uno de los subconjuntos del conjunto. Si seguimos el camino marcado en el esquema 1, éste representa al subconjunto:

0 1 0 1 que es el $\{a_2, a_4\}$. De manera que los 16 caminos que representamos en el esquema 1 son todos los subconjuntos que buscábamos. En este esquema se ve un poco mejor por qué multiplicamos cada vez por 2.

Entonces, en general para un conjunto con n elementos, formamos un casillero con n lugares y para cada uno tenemos 2 oportunidades, independientes de las demás, por lo que el número de subconjuntos es $2x2x2x...x2 = 2^n$.

Por lo que hemos llegado de nuevo al resultado que ya teníamos por otro camino.

Observación.

Notemos que el esquema 1 nos da también la información de cuántos subconjuntos tienen al elemento a_1 por ejemplo, y éstos son solo los caminos que empiezan con 1 y éstos son los que estan en la parte derecha del esquema, o sea 8 subconjuntos tienen a a_1 y además sabemos que 8 subconjuntos no lo tienen. De manera semejante podemos contar los subconjuntos que contienen al elemento a_2 y los que no lo tienen. Lo mismo para los demás elementos del conjunto.

Recordemos que está pendiente encontrar el número de subconjuntos de 4 elementos de un conjunto con n elementos, así como el número de subconjuntos de 5 elementos de un conjunto con n elementos, y así sucesivamente el número de subconjuntos de n elementos que tiene un conjunto con n elementos. ¿ Puede el lector dar una respuesta a este problema ? Lo invitamos a pensarlo.

Para ver el camino que dejamos pendiente, se sugiere hacer un análisis semejante al que se hizo con la ternas a partir de las parejas. De nuevo invitamos al lector a hacer este análisis.

En el capítulo de Combinatoria, se da una solución a éste problema por el camino que hemos dejado pendiente.

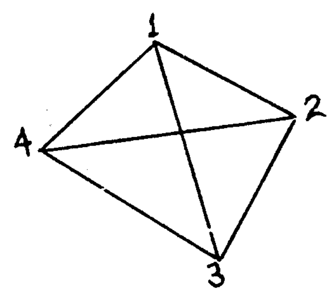
PROBLEMA.

¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo (6) de n lados?

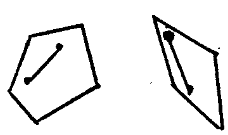
Si el polígono tiene n lados, también tiene n vértices. De cada uno de los vértices salen n-1 líneas para unirse a los demás vértices, de éstas 2 son lados y n-3 son diagonales del polígono. Haciendo esta cuenta para cada uno de los vértices, vemos que estaremos contando doble, porque cada línea está unida a 2 vértices, por lo tanto el número de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$.

Por otro lado, veamos el problema ayudándonos con algunos dibujos de casos particulares de polígonos.

Si el polígono tiene 4 lados por ejemplo, y numeramos sus vértices, tenemos que las diagonales se representan por parejas de vértices como sigue:



(6) Estamos hablando de un polígono convexo. Un polígono es convexo si para cualesquiera 2 puntos en el interior del polígono, el segmento de recta que une a estos 2 puntos está totalmente contenido en el polígono. Ejemplos:

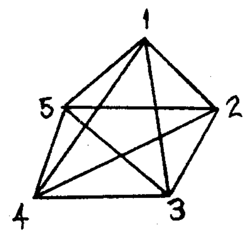


Convexos

No convexos

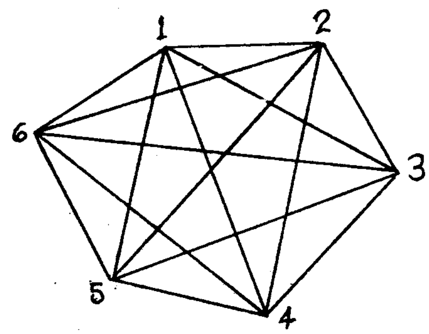
Donde las diagonales son las 2 líneas representadas por $\overline{13}$ y $\overline{24}$; $\overline{13}$ representa la línea que une al vértice 1 con el 3, y $\overline{24}$ la que une al vértice 2 con el 4.

Si el polígono tiene 5 lados, tenemos:



Las diagonales son las 5 líneas representadas por $\overline{13}$, $\overline{24}$, $\overline{35}$, $\overline{14}$ y $\overline{25}$.

Si el polígono tiene 6 lados:



Las diagonales son las líneas $\overline{13}$, $\overline{14}$, $\overline{15}$, $\overline{24}$, $\overline{25}$, $\overline{26}$, $\overline{35}$, $\overline{36}$, y $\overline{46}$.

Veamos que éste es el mismo problema de contar parejas de elementos de un conjunto (en este caso el conjunto de vértices), solo que èstamos descontando aquellas parejas de vértices que describen los lados del polígono, estas son las parejas de vértices consecutivos. En el caso del polígono de 6 lados, del total de parejas de 6 elementos tenemos que descontar las líneas $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$, $\overline{45}$, $\overline{56}$ y $\overline{61}$.

Así es que para el polígono de 6 lados tenemos:

$$\frac{6(5)}{2} - 6 = 15 - 6 = 9 \text{ diagonales.}$$

En general, si $A=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es el conjunto de vértices de un polígono de n lados, formamos las parejas de estos n elementos y a éstas tenemos que quitarles las parejas de vértices consecutivos que son: para cada v_i sus consecutivos son v_{i-1} y v_{i+1}, entonces las parejas de consecutivos que contienen al vértice v_i son $v_{i-1}v_i$ y v_iv_{i+1}, y ésto sucede para cada i, por lo que por cada vértice hay 2 parejas de consecutivos. Notemos además que la pareja v_iv_{i+1} también la estamos contando para ser quitada cuando quitamos las parejas de vértices consecutivos que contienen a v_{i+1}, entonces estamos quitando en realidad el doble de lo que debemos, por lo que al final debemos dividir entre 2 el número de parejas de vértices consecutivos.

El número de parejas que debemos quitar es $2n/2 = n$ y ésto ya lo sabíamos, ya que las parejas de vértices consecutivos son precisamente las que describen los lados del polígono y ya sabemos por el problema mismo que el polígono tiene n lados, entonces en efecto el número de parejas que debemos quitar es n.

Por lo tanto el número de diagonales de un polígono de n lados es: $\dfrac{n(n-1)}{2} - n = \dfrac{n(n-1) - 2n}{2} = \dfrac{n(n-3)}{2}$

Ahora tenemos además un tercer procedimiento para encontrar el número de diagonales de un polígono de n lados.

Si procedemos como antes, haciendo una lista que comience con números pequeños, observamos la siguiente tabla:

# DE LADOS	# DE DIAGONALES
3	0
4	2
5	5
6	9
7	14

tabla 21

Contándolos a pie, para un polígono de 8 lados ya se hace muy difícil, pero podemos observar estos 4 casos para ver si existe alguna relación que podamos demostrar en general.

Si el polígono tiene 4 lados, de cada uno de sus vértices solo sale una diagonal(ya que de las 3 líneas

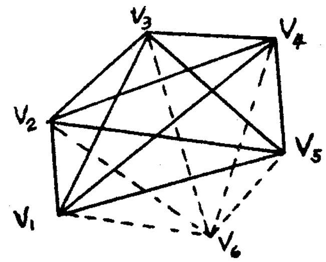


figura 4

Las diagonales del polígono de 5 lados son: v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4, v_2v_5 y v_3v_5 y las del polígono de 6 lados son:
v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_5, v_2v_6, v_3v_6, v_4v_6 y v_1v_5; de donde el incremento son las 3 líneas que salen de sexto vértice que son diagonales, mas la línea que antes era lado en el polígono de 5 lados.

En general tenemos que, dado un polígono de k+1 lados, el incremento en el número de diagonales en total con respecto al número de diagonales de un polígono de k lados es: # de diagonales del polígono con k lados + # de líneas que salen del vértice k+1 que no sean lados + la línea que antes era el k'ésimo lado del polígono de k lados; esto es, el número de líneas que salen del vértice k+1 que no son lados es k-2, más la línea que era lado, tenemos: k-2+1=k-1 que es el incremento en el renglón k+1 de la tabla.

Como hemos hecho con todo detalle el principio de la lista y como conocemos la regla de incremento, podemos ir construyendo uno por uno los renglones hasta llegar al correspondiente a un polígono de k lados.

Sea d(k) el número de diagonales de un polígono de k lados. Sabemos que d(4)=2 y que el incremento es (k-2) en el renglón k. ¿Cuánto vale entonces d(k)?

Nótese que hemos descrito aquí una recurrencia en el número de diagonales de un polígono y en base a ésta es que podemos decir que:

$d(k) = d(k-1) + (k-2)$

Pero

$d(k-1) = d(k-2) + (k-1-2) = d(k-2) + (k-3)$

y

$d(k-2) = d(k-3) + (k-2-2) = d(k-3) + (k-4)$

Y así sucesivamente, tenemos

$d(k) = d(4) + (k-2) + (k-3) + \ldots + [k-(k-4)] + [k-(k-3)]$

$d(k) = d(4) + (k-2) + (k-3) + \ldots + 4 + 3 =$

$d(4) + (1+2) + [3+4+\ldots+(k-3)+(k-2)] - (1+2) =$

$d(4) + [1+2+3+ \ldots +(k-3)+(k-2)] - (1+2) =$

$d(4) + \dfrac{(k-2)(k-1)}{2} - 3 = \dfrac{4+(k-2)(k-1) - 6}{2} =$

$\dfrac{k^2 - 3k + 2 - 2}{2} = \dfrac{k^2 - 3k}{2} = \dfrac{k(k-3)}{2}$

Que es lo que por otro lado ya sabíamos.

Más adelante, en el capítulo I, hablaremos en general del método que hemos usado aquí para encontrar $d(k)$, éste se basa en el principio que dice que si tenemos un número natural k y le restamos 1, el resultado es un número natural menor que k, y si a éste de nuevo le restamos 1, vuelve a resultar un número natural menor y siguiendo así sucesivamente, el algún momento debemos llegar necesariamente al primer natural (o sea al número 1).

PROBLEMA.

En una ciudad donde la distribución de las calles es la que se muestra en la figura 5, se quiere saber cuántos caminos mínimos distintos, se pueden hacer para llegar desde la esquina marcada con * a cada una de las esquinas de la ciudad.

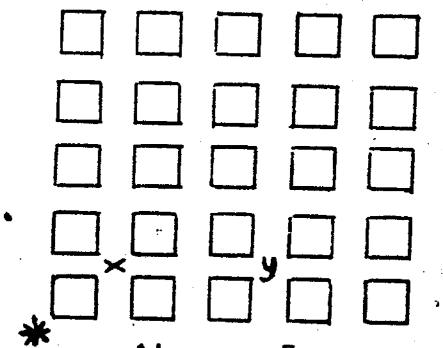
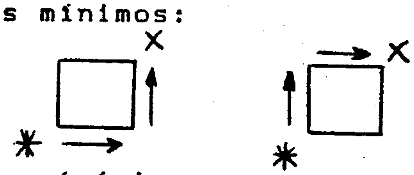


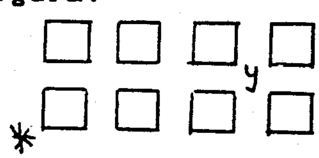
figura 5

Analicemos el problema esquina por esquina. Por ejemplo para llegar a la esquina marcada con X se tienen los siguientes caminos mínimos:

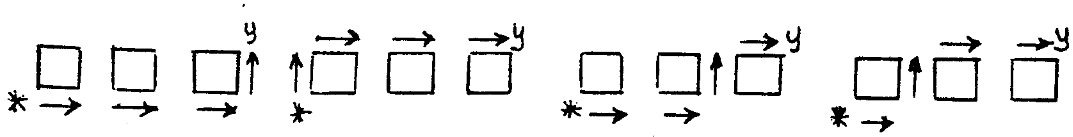


Dos caminos mínimos(mínimos, porque cada uno consta de 2 cuadras y cualquier otro camino que siguiésemos para llegar a X, tendría mayor número de cuadras).

Para otra esquina, por ejemplo la esquina marcada con Y en la siguiente figura:

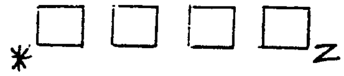


Los caminos son:

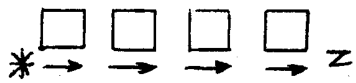


Cuatro caminos mínimos distintos. Cada uno de ellos consta de 4 cuadras y cualquier otro que encontremos tendrá mayor número de cuadras.

Para otra esquina mas, por ejemplo la esquina marcada con Z en el siguiente esquema:

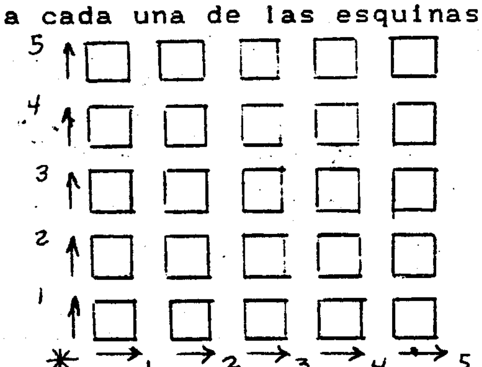


Tenemos

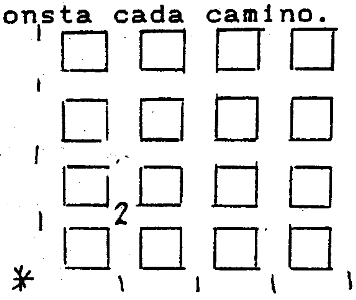


Un solo camino mínimo que consta de 4 cuadras.

Entonces lo que sucede es que en todas las esquinas que estén a las orillas de la ciudad solo habrá un camino mínimo. Ilustramos esto en el siguiente esquema en donde colocamos el número de cuadras que componen el camino mínimo a cada una de las esquinas de las orillas.

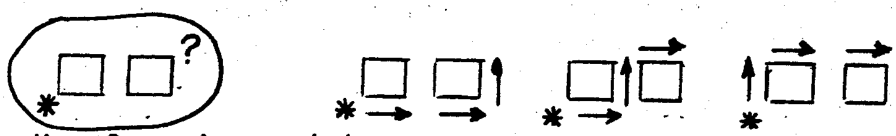


Pero veamos qué sucede en las otras esquinas. Hagamos ahora un esquema en donde coloquemos en cada esquina (de las que hemos analizado) cuántos caminos mínimos hay para llegar a ella, sin considerar de cuántas cuadras consta cada camino.

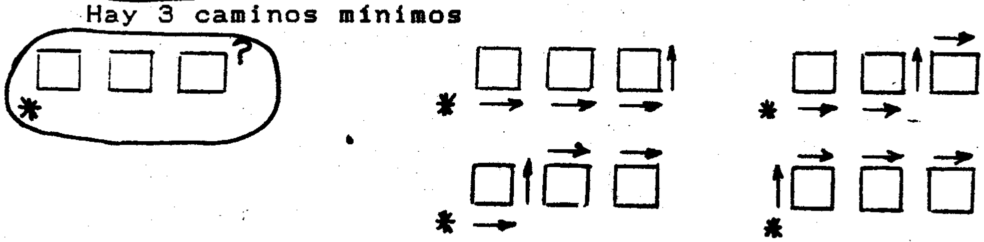


¿ Qué relación tendrán estos números ? ¿Cómo sabremos en general para cualquier esquina cuántos caminos mínimos hay?

Vayámonos en orden, buscando para cada esquina cuántos caminos mínimos hay.

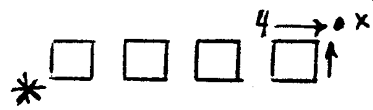


Hay 3 caminos mínimos

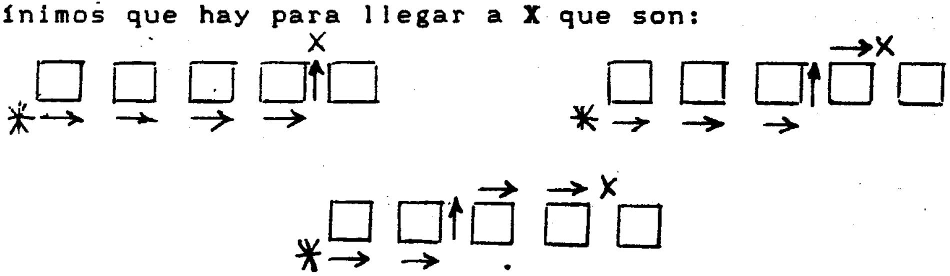


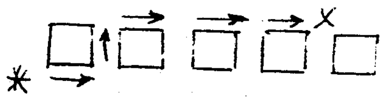
Hay cuatro caminos mínimos.

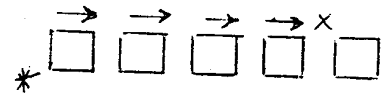
¿Cuántos caminos habrá para esta esquina?



Para llegar a esta esquina, o a cualquier otra, notemos que solo podemos llegar si venimos de una de dos direcciones, es decir, no podemos venir de la esquina de arriba, por ejemplo, porque ya no sería un camino mínimo. Tenemos que venir de la esquina que dice 4 o bien de la esquina de abajo que dice 1. Sólo podemos llegar a **X** con una direccion así → o con una dirección así ↑ . Por lo que tenemos que sumar los 4 caminos anteriores en la dirección ⟶ más el camino anterior a la dirección ↑ . Y así tendremos los 5 caminos mínimos que hay para llegar a **X** que son:

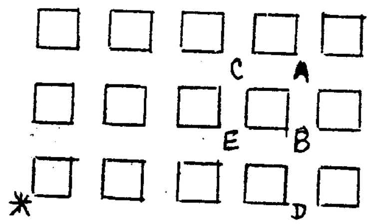






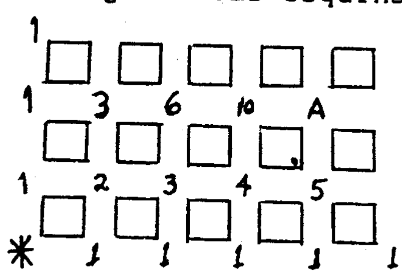
Entonces para llegar a cualquier esquina solo debemos saber cuántos caminos mínimos hay para llegar a las 2 esquinas anteriores a ella (por abajo y por la izquierda de la esquina en cuestión). Así hemos resuelto el problema, solo debemos ir sumando desde la primer esquina hasta la que necesitemos.

Por ejemplo si queremos saber cuántos caminos mínimos hay para llegar a la esquina **A** del siguiente esquema:



Debemos saber cuántos caminos hay para llegar a **B** y a **C** y sumarlos, pero para saber cuántos hay para llegar a **B** debemos saber cuántos hay para llegar a **D** y a **E** y así sucesivamente hasta que lleguemos a alguna que ya conozcamos.

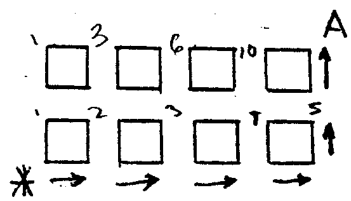
Hagamos un esquema en donde tengamos el número de caminos mínimos para llegar a las esquinas anteriores a **A**:



En donde vemos que para llegar a **A** hay 15 caminos mínimos distintos. Para llegar a **B** hay 5 caminos mínimos distintos, para llegar a **C** hay 10 caminos, para llegar a **D** hay 1 y para llegar a **E** hay 4 caminos.

Para redondear, el número de caminos mínimos para llegar a una esquina es la suma de los caminos para llegar a las dos esquinas anteriores (la de la izquierda y la de abajo de la esquina que se quiere).

Si se nos pregunta ahora ¿de cuántas cuadras consta cada uno de los caminos mínimos para llegar a una esquina?, lo que tendremos que hacer es contar sólo uno de ellos ya que todos los que son mínimos deben contener el mismo número de cuadras. Por ejemplo para llegar a A en el esquema anterior se tienen 15 caminos mínimos distintos y cada uno consta de 6 cuadras ya que el camino



es uno de los 15 mínimos y éste tiene 6 cuadras.

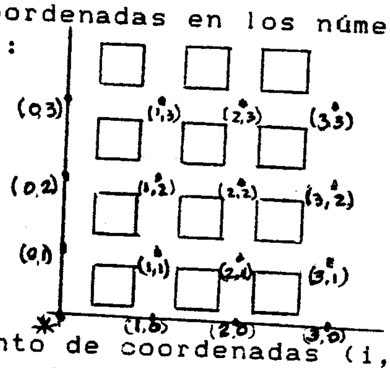
Pero en general ¿cómo sabremos de cuántas cuadras se compone cada camino mínimo dependiendo de la esquina de que se trate?

Sabemos por ejemplos que hemos hecho que cada camino mínimo, además de tener el mismo número de cuadras, también tiene el mismo número de cuadras en una dirección y el mismo número de cuadras en la otra dirección. Esto es, si un camino mínimo consta de 4 flechas hacia la derecha y 2 hacia arriba, todo camino mínimo que llegue a esa esquina (la A en este caso), debe contener también 4 flechas hacia la derecha y 2 hacia arriba.

Entonces podemos decir que contar el número de caminos mínimos para llegar a una esquina es lo mismo qu contar de cuántas formas distintas se pueden colocar tantas flechas hacia la derecha y tantas otras hacia arriba, una vez que sabemos de cuántas cuadras consta un camino mínimo.

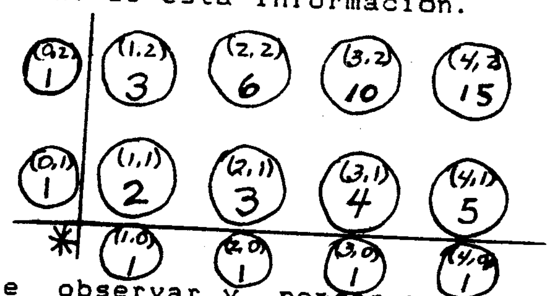
Queremos encontrar una formulación que nos indique cuál es el número de caminos mínimos en cada esquina, sin necesidad de construir todo lo que corresponde a las esquinas anteriores, y además queremos saber de cuántas cuadras se compone un camino mínimo para cada esquina sin necesidad de hacer uno de ellos explícitamente.

Establezcamos un sistema cartesiano con el origen en * y demos a cada esquina las coordenadas correspondientes a puntos con coordenadas en los números enteros no negativos, como sigue:



Queremos saber, dado el punto de coordenadas (i, j) cuántos caminos mínimos hay para llegar a él. Y de cuántas cuadras consta cada uno.

Hagamos un nuevo esquema en dondee coloquemos en una misma esquina, tanto las coordenadas correspondientes como el número de caminos mínimos en los casos que ya hemos calculado, y veamos qué podemos extraer en general de esta información.



Después de observar y pensar un poco lo que hemos estado haciendo, podemos hacer las siguientes observaciones:

1) En todos los puntos que tienen alguna coordenada igual a cero, el número de caminos mínimos es igual a 1.

2) En todas las esquinas cuyas coordenadas tienen un 1, el número de caminos mínimos es la suma de sus coordenadas.

3) En todas las esquinas cuyas coordenadas tienen un 2, el número de caminos mínimos es un número triangular. Es más, si la esquina tiene por coordenadas la (i,2) o la (2,i) el número de caminos mínimos es el número T_{i+1}.

4) En todas las esquinas cuyas coordenadas tienen un 3, el número de caminos mínimos es un número

piramidal. Es más, si la esquina tiene por coordenadas la $(i,3)$ o la $(3,i)$ el número de caminos mínimos es el $(i+1)$'ésimo número piramidal.

Ahora observemos nuevamente el esquema, pero veamoslo en sus diagonales, es decir, busquemos alguna regularidad o regla entre las diagonales. Por ejemplo, en la primera diagonal tenemos los puntos de coordenadas (0,1) y (1,0) y en ambos el número de caminos es 1. En la segunda diagonal tenemos los puntos de coordenadas (0,2), (1,1) y (2,0) y en ellos los caminos mínimos son 1, 2 y 1 respectivamente. En la tercera diagonal tenemos:

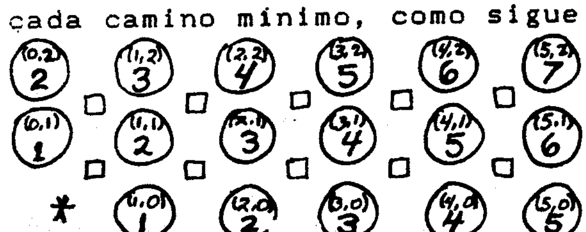
COORDENADAS	CAMINOS
(0,3)	1
(1,2)	3
(2,1)	3
(3,0)	1

Y así sucesivamente tenemos por ejemplo la quinta diagonal como:

COORDENADAS	CAMINOS
(0,5)	1
(1,4)	5
(2,3)	10
(3,2)	10
(4,1)	5
(5,0)	1

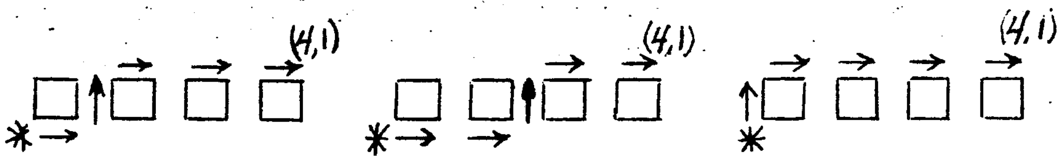
Vemos que existe cierta regularidad, pero ¿cuál es la manera de expresarla?

Hagamos ahora un esquema en donde en cada esquina pongamos tanto sus coordenadas como el número de cuadras que contiene cada camino mínimo, como sigue:



Notemos en el esquema que en cada diagonal se tiene el mismo número de cuadras en cada camino mínimo. Esto es, por ejemplo en la tercera diagonal el número de cuadras para llegar a cada esquina de esa diagonal es el mismo, o sea, en cada una de las 4 esquinas que estan en la tercera diagonal, el número de cuadras de un camino mínimo es 3.

Por ejemplo en la quinta diagonal, el número de caminos mínimos en cada esquina de esa diagonal es siempre 5; entonces en lo que deben cambiar entre si los caminos mínimos a cada esquina es en el número de cuadras hacia la derecha y el número de cuadras hacia arriba. Esto es, si para 2 puntos distintos en la quinta diagonal se tiene que el número de cuadras es el mismo, entonces la composición (en cuanto a orientaciones) de las cuadras debe ser distinta. Fijémonos en 3 de los caminos mínimos que hay para llegar a la esquina de coordenadas (4,1) que está en la quinta diagonal y por lo tanto cada uno de los caminos mínimos ha de tener 5 cuadras en total.



Cada uno tiene 5 cuadras en total pero, además vemos que cada uno tiene 4 cuadras hacia la derecha y una sola cuadra hacia arriba. De donde empezamos a sospechar que el número de cuadras de un camino mínimo está relacionado con las coordenadas de esa esquina, esto es:

Conjetura. Para la esquina (i,j) el número de cuadras que contiene un camino mínimo es $i+j$, donde además i de ellas son hacia la derecha y j son hacia arriba.

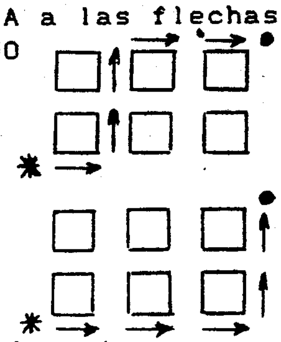
Dejamos como ejercicio para el lector demostrar esta conjetura, ya que en esencia hemos dado la idea de la demostración al hacer el caso de la quinta diagonal con un razonamiento válido en general.

Tenemos ya resuelto uno de nuestros problemas, que era saber de cuántas cuadras consta un camino mínimo para cualquier esquina; pero aún falta saber cuántos caminos mínimos hay en cada esquina, sin hacer todos los casos anteriores.

Hagamos una representación de cada camino mínimo como sigue:

A cada camino le hacemos corresponder un arreglo de flechas, hacia la derecha y hacia arriba, como se muestra en seguida:(llamaremos D a las flechas hacia la derecha y A a las flechas hacia arriba)

CAMINO ARREGLO



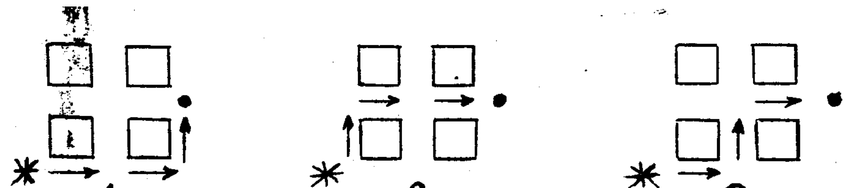
(D, A, A, D, D)

(D, D, D, A, A)

Y así, tenemos que, dado un camino mínimo cualquiera, existe un arreglo de flechas que describe el camino dado; y viceversa, dado un arreglo de flechas, existe un camino mínimo que está representado por este arreglo.

De modo que si sabemos cuántas cuadras tiene un camino mínimo, cuántas son hacia la derecha y cuántas son hacia arriba, solo tenemos que buscar de cuántas maneras podemos acomodar tantas flechas hacia la derecha y tantas otras hacia arriba en un número fijo de lugares, para tener así el número de caminos mínimos que existen para una esquina dada.

Por ejemplo, para la esquina de coordenadas (2,1) hay 3 caminos mínimos y cada uno consta de 3 cuadras en total donde 2 de ellas son hacia la derecha y 1 hacia arriba. Esto es:



1 2 3

Y su representación en los arreglos de flechas es:

(D,D,A) (A,D,D) (D,A,D)

respectivamente.

Que son las 3 formas distintas de colocar 2 flechas hacia la derecha y una hacia arriba en un casillero de 3 lugares.

De modo que la pregunta que tenemos pendiente se transforma ahora a encontrar: ¿de cuántas maneras distintas se pueden colocar i flechas hacia la derecha y j flechas hacia arriba en un casillero con i+j lugares? para la esquina (i,j).

Tenemos los i+j lugares, escojamos i de ellos de cualquier manera, en ellos asignemos flechas hacia la derecha y en el resto (que son j) asignemos las j flechas hacia arriba. Debemos buscar ahora ¿de cuántas formas distintas podemos hacer esta elección?.

De nuevo procederemos tratando de buscar un argumento general, que sea válido en cualquier caso y que nos proporcione suficiente información para demostrar el resultado.

Ya conocemos cuál es el número total de cuadras de un camino mínimo, esto es, si queremos llegar a la esquina (i,j) sabemos que cualquier camino debe constar de i+j cuadras en total y esto, podemos pensarlo como un casillero que tiene i+j lugares, o bien, en un arreglo de i+j coordenadas; entonces solo falta averiguar de cuántas formas podemos llenarlos con exactamente i flechas hacia la derecha y j flechas hacia arriba.

Siguiendo con la representación que habíamos usado, sea (D,A,D,D, . . . ,A) un arreglo con i+j lugares, i de los cuales son D y j son A. Si numeramos los lugares de este arreglo, tenemos:

(1,2,3, ... ,i+j)

(D,A,D, . . . , A)

En donde podemos cambiar un poco la notación y decir que en los lugares 1,3.. . . las flechas son hacia la derecha y en los lugares 2, . . . ,i+j las flechas son hacia arriba.

Entonces para designar los arreglos del párrafo anterior solo debemos decir en qué lugares de los 3 disponibles, hay flechas hacia la derecha y en cuales hay flechas hacia arriba. Esto es, para esos 3 arrglos se tiene:

Para el arreglo 1 tenemos que las flechas hacia la derecha estan en los lugares 1 y 2,y las flechas hacia arriba en el lugar 3. Para el arreglo 2 se tiene que las flechas hacia la derecha estan en los lugares 2 y 3 , y las flechas hacia arriba estan el el lugar 1; y por último para el tercer arreglo tenemos que las flechas hacia la derecha estan en los lugares 1 y 3 y las flechas hacia arriba en el lugar 2.

De modo que si tenemos un arreglo con i+j lugares y decimos en cuales de ellos estan las i flechas hacia la derecha y en cuales estan las j flechas hacia arriba, tenemos bien caracterizado el arreglo. Por lo que solo tenenmos que contar de cuántas maneras distintas podemos escoger i lugares de un arreglo que tiene i+j lugares; o bien de cuántas maneras distintas podemos escoger j lugares de un arreglo que tiene i+j lugares. Notemos que es suficiente con decir en qué lugares deben estar las flechas hacia la derecha y ya con eso quedan determinados los lugares en que deben ir las flechas hacia arriba o viceversa. Entonces debe suceder que el número de formas de escoger i lugares de un casillero con i+j lugares es el mismo que el número de formas de escoger j lugares en un casillero de i+j lugares.

¿Cómo lo comprobamos en general?

Veamos por ejemplo si el casillero tiene 2+1 lugares, debemos encontrar todas las formas de escoger 2 lugares para colocar D . Estos son: 1,2 ; 1,3 y 2,3 que ya las conocíamos y además son el mismo número de las formas de colocar 1 lugar en un casillero de 3 lugares, que son: 3,2 y 1 respectivamente.

Notemos que en este ejemplo lo que estamos buscando son el número de parejas de un conjunto con 3 elementos o sea $C_{2+1}{}^{2}$, que son la misma cantidad que el número de formas que tenemos de escoger un elemento de un conjunto de 3 elementos.

Ahora, si el arreglo tiene 3+1 lugares, debemos encontrar todas las formas de escoger 3 lugares para colocar D, o bien todas las formas de escoger 1 lugar para colocar A. La respuesta a lo primero es: 1,2,3 ; 1,2,4 ; 1,3,4 y 2,3,4 que ya sabíamos porque son las ternas que podemos escoger de un conjunto que tiene 4 elementos ó sea C_{3+1}^{3} . La respuesta a la segunda parte es: 1 ; 2 ; 3 y 4 que es el mismo número 4 que ya habíamos encontrado.

Si el arreglo tuviera 3+2 lugares, debemos encontrar todas las formas de escoger 3 lugares para colocar D o bien las formas de escoger 2 lugares para colocar A y por lo que se ha dicho en los 2 párrafos anteriores es lo mismo que encontrar las ternas y las parejas, o sea: C_{3+2}^{3} ó C_{3+2}^{2} y tenemos entonces que:

$C_{3+2}^{3} = C_{5}^{3} = (5)(4)(3)/6 = 10$ y

$C_{3+2}^{2} = C_{5}^{2} = (5)(4)/2 = 10$.

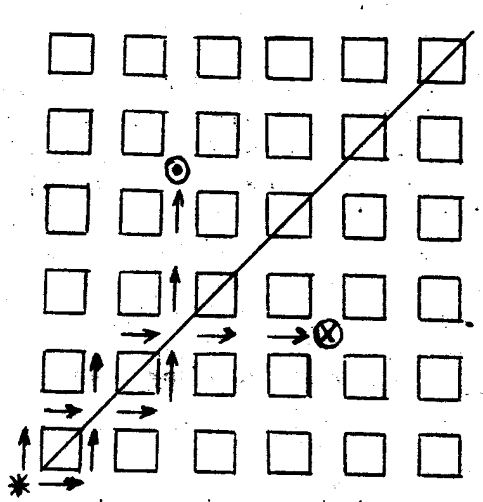
Que comprueba en este caso particular lo que hemos venido argumentando en general.

De modo que, al menos ya podemos calcular cuál es el número de caminos mínimos para todas aquellas esquinas en cuyas coordenadas aparezca un 2 o un 3, esto es: podemos dar el número de caminos mínimos para las esquinas $(i,2)$, $(i,3)$, $(2,j)$ y $(3,j)$ que son C_{i+2}^{2} , C_{i+3}^{3} , C_{2+j}^{2} y C_{3+j}^{3} respectivamente.

Pero esto no resuelve el problema en general ya que todavía nos falta dar respuesta a muchas esquinas cuyas coordenadas no son 2 ó 3.

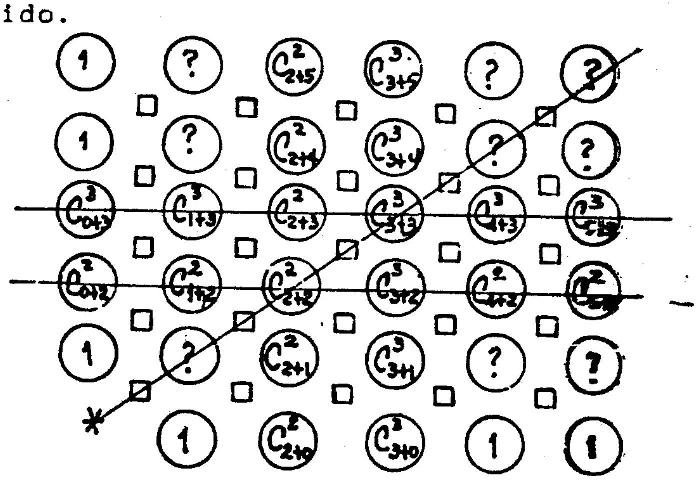
Ahora, avancemos un poco en las observaciones sobre el problema en general.

Notemos que para un camino dado, por ejemplo (D,A,D,A,D,D) existe otro que es simétrico a él, o sea, el camino representado por (A,D,A,D,A,A), y esto, como es claro sucede para cada uno de los caminos, lo que de nuevo nos dice que para llegar a la esquina marcada con ⊕en la figura ⊗ existe el mismo número de caminos mínimos que para llegar a la esquina marcada con en la misma figura, ya que estas esquinas son simétricas.



O sea , el número de caminos mínimos para llegar a la esquina (i,j) es el mismo que el número de caminos mínimos para llegar a la esquina (j,i).

Y volviendo con los casos que ya podemos resolver, hagamos un esquema donde coloquemos el número de caminos mínimos para llegar a cada esquina con los elementos que ya hemos discutido.



esquema con las 2 columnas y 2 renglones que si conocemos.

Donde por la simetría que hemos dicho, vemos que $C_{3+2}^{3} = C_{2+3}^{2}$.

Pero veamos también que todavía nos falta mucho por resolver. En todas las esquinas marcada con ? no podemos dar la respuesta todavía sin recurrir a los casos anteriores. Pero hemos avanzado en el sentido de tener claridad acerca de qué es lo que estamos buscando y, por todo lo que hemos venido obšervano tenemos que en general lo que estamos buscando es el número de subconjuntos con i elementos de un conjunto con i+j elementos. Y de nuevo, notemos que si en vez de escoger los i lugares donde se coloquen las D hubiésemos escogido los j lugares donde se colocaran las A, de todos modos el resultado debe ser lo mismo ya que en total solo hay i+j lugares.

Entonces dejemos claro que nos falta responder a la pregunta en general de ¿cuántos caminos mínimos hay para llegar a la esquina (i,j)? sin construir el esquema de las esquinas anteriores a ella, es decir, sin la manera recursiva que se encontró al principio del análisis de este problema.

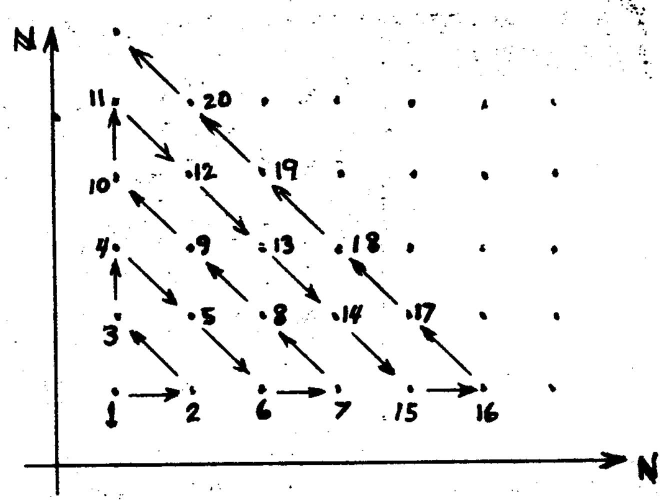
La respuesta en general, la daremos cuanto retomemos este problema en el capítulo de Combinatoria. De cualquier manera, invitamos al lector a avanzar y encontrar esta respuesta por sí mismo, intentando nuevos caminos y formas de analizar el problema.

Algo más sobre los números triangulares.

Una vez que hemos conocido a los números triangulares y que podemos trabajar con ellos, veamos una utilización muy interesante.

Se quiere encontrar una correspondencia uno a uno entre los números naturales y el producto cartesiano de los naturales con ellos mismos.

Una forma de hacerlo es la que ilustramos en el siguiente esquema:



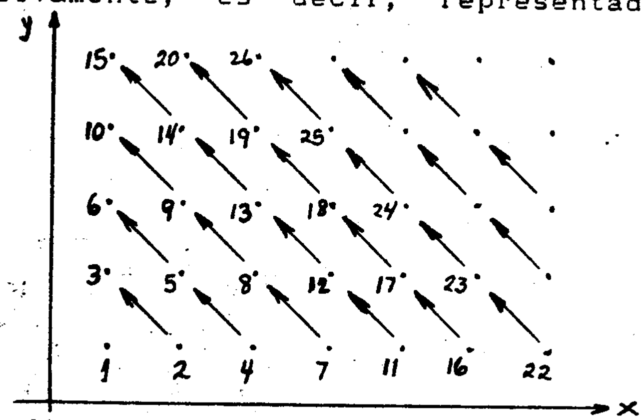
Es claro que de esta manera no nos falta ningún número natural al que no le toque una pareja de naturales y viceversa, a toda pareja de naturales le toca un número natural. Pero con esta forma de establecer la correspondencia no es tan fácil dar una regla general para saber, dada cualquier pareja de naturales cuál es el número natural que le corresponde y al revés.

Veamos entonces otra forma de asignar la correspondencia, en donde sí se puede dar una función explícita para esta biyección.

Sea la correspondencia:

(1,1) - 1
(2,1) - 2
(1,2) - 3
(3,1) - 4
(2,2) - 5
(1,3) - 6
(4,1) - 7
(3,2) - 8
(2,3) - 9

Y así sucesivamente, es decir, representado en esquema tenemos:



O sea, cada diagonal la empezamos a numerar en los puntos de coordenada y=1 seguiremos hacia arriba a la izquierda.

Notemos que en los puntos de coordenada x=1, los números que aparecen son precisamente los números triangulares, entonces solo tenemos que saber en qué diagonal y en qué posición de ésta se encuentra una pareja, para determinar qué número natural le corresponde. Esto es:

Por ejemplo el punto (3,2) se encuentra en la cuarta diagonal (empezando por la primera en el punto (1,1)) y en el segundo lugar de ésta, y vemos que el número natural que le corresponde es el 8 que es precisamente el tercer número triangular mas 2, ó el cuarto número triangular menos 2. O sea:

$8 = T_3 + 2 = 6 + 2$ o bien $8 = T_4 - 2 = 10 - 2$

Hagamos una tabla para observar mayor número de ejemplos, con todos los datos que podamos necesitar, para descubrir cuál es la regla de correspondencia que proponemos.

n	(i,j)	diagonal #	i+j	triangular ≤ n	triangular ≥ n
1	1,1	1	2	1	1
2	2,1	2	3	1	3
3	1,2	2	3	3	3
4	3,1	3	4	3	6
5	2,2	3	4	3	6
6	1,3	3	4	6	6
7	4,1	4	5	6	10
8	3,2	4	5	6	10
9	2,3	4	5	6	10
10	1,4	4	5	10	10
11	5,1	5	6	10	15
12	4,2	5	6	10	15
13	3,3	5	6	10	15
14	2,4	5	6	10	15
15	1,5	5	6	15	15
16	6,1	6	7	15	21

tabla 23

Notemos que las coordenadas de los puntos en cada diagonal siempre suman el número de diagonal que ocupan mas uno. Por ejemplo en la tercera diagonal tenemos los puntos:

$3+1 = 4 \qquad 2+2 = 4 \quad$ y $\quad 1+3 = 4$

Y ésto sucede siempre, por lo que si hablamos de la k'ésima diagonal, sabemos que $i+j = k+1$ para cualquier punto (i,j) en esa diagonal Y la posición de un punto (i,j) en la diagonal k es la coordenada que indica la altura sobre el eje X.

De la observación de la tabla a y del esquema correspondiente a esta biyección, lo que se propone como función para dar la correspondencia uno a uno entre los naturales y el producto cartesiano de ellos es:

$(i,j) \longrightarrow T_{i+j-2} + j$ o bien

$(i,j) \longrightarrow T_{i+j-1} - i + 1$

Comprobándolas en varios ejemplos más, vemos que es mejor la segunda regla y tenemos entonces que para el punto (i,j) el número que le corresponde es :

$T_{i+j-1} - i + 1$.

Por ejemplo, para el punto (2,3) el número natural que le corresponde es:

$T_{2+3-1} - 2 + 1 = T_4 - 1 = (4x5)/2 - 1 = 10 - 1 = 9$

Ahora tenemos que dar la correspondencia al revés, o sea, dado un número natural cualquiera, ¿cuál es la pareja de naturales que le corresponde?

Por ejemplo para el número 17, vemos en la figura que la pareja que le corresponde es la (5,2).

Ahora, dado un número natural n ¿qué punto le corresponde?

Debemos encontrar el menor número triangular que contenga a n, el subíndice del triangular nos indica la diagonal en la que debe estar la pareja que buscamos. Y la diferencia entre el número n y el triangular que encontremos mas uno, será la posición que ocupa en esa diagonal(contando de izquierda a derecha), esto es:

$n \leq T_k$ y $n = T_k - r$ con $0 \leq r$ k

Por lo tanto n está en la diagonal k y r son los lugares que debemos descontar a T_k para tener la posición de n en esa diagonal.

Sabemos que $k = i+j-1$ y $r = i-1$

Entonces, $n \longrightarrow (i,j)$. donde $i = r+1$ y

, $j = k-r-1+1 = k-r$

O sea

$n \longrightarrow (r+1,\ k-r)$

Veamos de nuevo en un ejemplo si nuestra función está correcta y bien definida.

Si n=17 , tenemos que encontrar el triangular mas chico que contenga a 17 o sea, tenemos que encontrar k tal que $T_k \geq 17$, es decir:

$(k)(k+1)/2 \geq 17$

$(k^2 + k)/2 \geq 17$

$k^2 + k \geq 34$

$k_2 + k - 34 \geq 0$

Hay que encontrar el valor mínimo, o sea la igualdad, o lo que es lo mismo, el punto positivo donde la parábola intersecta al eje X.

Por lo que $k = 5.35$ es la solución positiva que buscamos, pero k debe ser entero, es más, debe ser natural, entonces $k=6$ es la que nos debe servir. O sea, T_6 es el menor número triangular que contiene a 17.

$T_6 = (6x7)/2 = 21 \geq 17$

Por lo que $17 = 21 - 4 = T_6 - 4$ quiere decir que 17 está en la sexta diagonal en el segundo lugar, esto es:

$i = 4 + 1 = 5$ y $j = 6 - 4 = 2$

Por lo tanto a 17 le corresponde la pareja (5,2).

Se tiene así, establecida una función biyectiva entre los números naturales y el producto cartesiano de ellos, y cabe mencionar además que está demostrado que esta es la manera más simple de establecer esta biyección; es más, se ha demostrado ya que ésta y la que se establece igual por simetría (en cuanto al sentido en que se toma) son las únicas biyecciones dadas por polinomios.

Comentario: este es un problema relacionado con la demostración que sobre el décimo problema de Hilbert hizo Matiyasevic en 1970 (7).

---

(7) Ver, Hilbert's tenth problem isunsolvable. Martin Davis, Courant Institute of mathematical Science. Publicado en el Mathematical Montly en marzo de 1973.

OTRAS PREGUNTAS RELACIONADAS CON EL PROBLEMA DEL PIN-PON.

Recordemos el problema del Pin-Pon.

En un torneo de Pin-Pon las partidas se juegan por parejas escogidas al azar. En la primera ronda se forman parejas y los jugadores que pierden quedan eliminados para la siguiente ronda. Si el número de participantes es impar, uno de los jugadores pasa automáticamente a la siguiente ronda. Para la siguiente ronda participan todos los ganadores de la primera, además del posible impar a quien no le tocó pareja en la ronda anterior y así sucesivamente hasta que se tiene un solo ganador.

En la primera sección de este trabajo se dió respuesta a la pregunta: dado un número de jugadores inscritos ¿cuántas partidas se efectúan para tener un ganador? Aquí, se pretende dar respuesta a 2 preguntas más, relacionadas con el mismo problema y que en el desarrollo de la primera respuesta aparecían sin que les diésemos mucha importancia, pero que pueden surgir en el salón de clase y debemos ser capaces tanto de palpar la necesidad de abordarlas como de buscar la solución a ellas. Estas preguntas son:

1.- ¿ Cuántas rondas se efectúan ? y

2.- ¿ Cuántos pases automáticos hay ?

Para ir respondiendo a la pregunta 1 empezaremos nuevamente por analizar lo que ocurre cuando el número de participantes (n) es pequeño.

Si el número de jugadores es 2 es claro que existe solo una partida y por tanto una sola ronda.

Si el número de participantes es 3, habrá 2 rondas, a saber, la primera en la que se enfrentan por ejemplo el primero y el segundo jugador en una única partida y pasarán a la segunda ronda el ganador de esta partida y el tercer jugador, que en esta caso pasó sin jugar en la primera. Así en la segunda ronda tendremos también una única partida.

Seguimos contando así las rondas para algunos números de jugadores y llegamos a una tabla como la siguiente:

#de jugadores	#de rondas
1	0
2	1
3	2
4	2
5	3
6	3
7	3
8	3
9	4
10	4
.	.
.	.
.	.

tabla 24

Se entiende, pues, que una ronda es cada vez que se tienen que efectuar un cierto número de partidas para que queden eliminados el mismo número de jugadores. Es lo que hemos oído que llaman rondas eliminatorias.

Es claro que el número de rondas eliminatorias depende del número de jugadores que se inscriban pero, ¿ cuál es esa dependencia ? eso es lo que queremos encontrar aquí.

Debemos buscar argumentos generales para analizar los resultados de la tabla 1 para obtener alguna fórmula o regla que nos diga, por ejemplo, cuántas rondas se jugarán si se tienen 20 jugadores o, en general, ¿cuántas rondas se efectuarán si se tienen n jugadores inscritos ?

Regresando al esquema que analizamos en el capítulo 1, en el problema del Pin-Pon, se tienen por ejemplo 123 jugadores, en la primera ronda se efectúan 61 partidas, en la segunda 31, en la tercera 15, en la cuarta 8, en la quinta 4, en la sexta 2 y en la séptima y última solo uno. Entonces tenemos que si son 123 jugadores serán 7 rondas las que se jueguen.

Veamos cómo era el razonamiento para encontrar las partidas que se jugaban en cada ronda y así sabremos cuantas rondas se jugarán. Este razonamiento era:

A los 123 jugadores los dividimos entre 2, para formar las parejas que jugarán en la primera ronda eliminatoria, el resultado es 61 y sobra 1 jugador; entonces en la primera ronda son 61 partidas. Para la segunda ronda serán los 61 ganadores de la primera mas el jugador que sobraba, tomamos ahora a los 62 jugadores y los dividimos entre 2, obteniéndose 31 partidas y en esta ocasión no sobra nadie. En la tercera ronda tendríamos 31 jugadores que dividiéndo entre 2 se obtienen 15 partidas y sobra 1 jugador y así sucesivamente. El esquema de este razonamiento es el siguiente:

1 -	123/2 = 61	sobra 1
2 -	62/2 = 31	sobra 0
3 -	31/2 = 15	sobra 1
4 -	16/2 = 8	sobra 0
5 -	8/2 = 4	sobra 0
6 -	4/2 = 2	sobra 0
7 -	2/2 = 1	sobra 0

esquema 2

Tenemos entonces una ronda por cada vez que dividimos entre dos, o sea existe una correspondencia entre el número de divisiones entre 2 y el número de rondas.

Así, lo que tenemos que contar es el número de veces que podemos dividir a n (el número de jugadores inscritos) entre 2. Aunque no es exactamente esto ya que a veces sobra un jugador y sumamos un 1 al resultado anterior. Entonces debemos buscar qué es lo que vamos a contar y cómo lo haremos.

Veamos por ejemplo cómo cambia el número de rondas cuando cambiamos el número de jugadores:

Por ejemplo empecemos analizando si tenemos 15 jugadores.

1 -	15/2	= 7	sobra 1
2 -	8/2	= 4	sobra 0
3 -	4/2	= 2	sobra 0
4 -	2/2	= 1	sobra 0

Entonces son 4 rondas.

Para 16 jugadores el esquema es:

1 -	16/2	= 8	sobra 0
2	8/2	= 4	sobra 0
3 -	4/2	= 2	sobra 0
4 -	2/2	= 1	sobra 0

Son también 4 rondas.

Para 17 jugadores:

1 -	17/2	= 8	sobra 1
2 -	9/2	= 4	sobra 1
3 -	5/2	= 2	sobra 1
4 -	3/2	= 1	sobra 1
5 -	2/2	= 1	sobra 0

Ahora ya se tienen 5 rondas.

Si son 18 jugadores:

1 -	18/2	= 9	sobra 0
2 -	9/2	= 4	sobra 1
3 -	5/2	= 2	sobra 1
4 -	3/2	= 1	sobra 1
5 -	2/2	= 1	sobra 0

También son 5 rondas.

Necesitamos saber cuándo cambiarán a ser 6 rondas, y en general cuándo se efectúan los cambios en el número de rondas.

Veamos en la tabla 24 y en lo que hasta ahora hemos hecho.

Existe una sola ronda sólo cuando son 2 jugadores; cuando son 3 ó 4 jugadores se tienen 2 rondas; se juegan 3 rondas para 5, 6, 7, 8 jugadores y parece ser que para 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16 jugadores se tienen 4 rondas. Para 17 y 18 jugadores, ya hemos visto, se tienen 5 rondas. Nos preguntamos ahora ¿ cuál es el número de jugadores en el cual se efectúen 6 rondas ?

Por lo que hemos visto, tendríamos que tener 6 divisiones. Pero ¿ en qué casos sucede esto ?

Veamos otra vez los números en los cuales existe cambio en el número de rondas, en la tabla siguiente en donde además anotaremos el número de veces que se repite cada uno:

	# de jugadores	# de rondas	# de repeticiones
	1	0	0
cambio 1	2	1	$1 = 2^0$
	3	2	
	4	2	$2 = 2^1$
cambio 2	5	3	
	6	3	
	7	3	
	8	3	$4 = 2^2$
cambio 3	9	4	
	10	4	
	11	4	
	12	4	
	13	4	
	14	4	
	15	4	
	16	4	$8 = 2^3$
cambio 4	17	5	
	18	5	
	19	5	
	20	5	
	21	5	
	22	5	
	23	5	
	24	5	
	25	5	
	26	5	
	27	5	
	28	5	
	29	5	
	30	5	
	31	5	
	32	5	$16 = 2^4$
cambio 5	33	6	

tabla 25

Observando esta tabla, vemos que hay una relación entre los cambios y las divisiones entre 2 que hemos estado haciendo.

Vemos que el número de rondas se repite cada vez mas y mas veces, conforme aumenta el número de jugadores. Y además podemos hacer las siguientes observaciones:

1) Los cambios se dan cuando el número de jugadores es una potencia de 2 mas uno.

2) La frecuencia con la que se repite un número de rondas es una potencia de 2.

3) Si N es el número de jugadores y $N = 2^m$ para algún m entonces el número de rondas es m.

4) Si N es el número de jugadores y m es el menor número natural tal que $2^m \geq N$ entonces el número de rondas que se efectúan es m.

Notemos que con esta última observación tenemos resuelta la primera pregunta y en realidad, por el procedimiento que hemos descrito, tenemos la forma de demostrarla. Pero, por lo pronto seguiremos avanzando en el análisis del problema y demostraremos después estas observaciones.

Si nuestro problema fuera contar el número de veces que podemos dividir entre 2 un número dado, ya tendríamos la respuesta, pero en el procedimiento de las divisiones(que hemos seguido para contar los pases), no es exactamente eso lo que se hace, ya que las veces que en la división sobra 1, se lo aumentamos al dividendo de la siguiente división. Entonces observamos que de alguna forma tenemos que saber el número de pases automáticos que hay para poder descubrir cómo influye ésto en el número de rondas que se efectuan.

Recordemos lo que queremos decir con pases automáticos: cuando el número de participantes es impar hay un jugador que debe pasar a la siguiente ronda sin jugar, en este caso decimos que existe un pase automático.

Para 123 jugadores por ejemplo, en la serie de divisiones que hacíamos hay 2 divisiones en las que sobra 1 entonces hay 2 pases automáticos.

Nótese que ya tenemos un algoritmo para dar la respuesta al número de pases automáticos, pero ahora queremos encontrar una fórmula general para cualquier número de jugadores y si es posible, sin hacer todas las divisiones.

Empecemos otra vez por analizar los casos mas pequeños.

Observemos la siguiente tabla:

# DE JUGADORES	# DE PASES
2	0
3	1
4	0
5	2
6	1
7	1
8	0
9	3
10	2
11	2
12	1
13	2
14	1
15	1
16	0
17	4

tabla 26

Tenemos muchos datos y aún no se ve a simple vista si pudiéramos sacar de esta tabla algún resultado general.

Lo que sí vemos es que si n es una potencia de 2, no hay pases; esto ya lo sabíamos de alguna manera ya que al hacer las divisiones entre 2 siempre van a dar un número entero que a su vez es potencia de 2 y además en cada división se tendrá siempre cero como residuo.

Por ejemplo si se tienen 16 jugadores el esquema para el número de rondas es:

1 - 16/2 = 8 sobra 0
2 - 8/2 = 4 sobra 0
3 - 4/2 = 2 sobra 0
4 - 2/2 = 1 sobra 0

O sea 4 rondas y cero pases automáticos.

Para 17 jugadores ya se tienen 5 rondas y 4 pases automáticos. Y para 18 jugadores también son 5 rondas pero 3 pases.

Busquémos pues qué es lo que hemos estado haciendo, buscando a su vez qué es lo que queremos contar.

El único dato que tenemos es el número de jugadores, por el método que hemos seguido podemos ponernos a dividir entre 2 y así ir obteniendo las respuestas.

Ahora analicemos lo que hemos venido haciendo pero en el caso general, esto es, describammos el algoritmo que nos da la respuesta a las dos preguntas en una forma general.

Si N es el número de jugadores, al dividir N entre 2 tenemos:

$$2\overline{\smash{)}N}^{\,q}_{\,r} \qquad \text{donde obviamente} \quad 0 \le r < 2$$

De donde podemos describirlo como:

$N = 2q + r$ donde $0 \le r < 2$ y $q \in \mathbb{N}$

A q se le llama el cociente y a r el residuo de dividir N entre 2.

El procedimiento que hemos seguido al hacer los casos concretos podemos hacerlo también en general con cualquier N como sigue:

Sea N_0 el número de jugadores inscritos.

Ronda 1 $\quad N_0 = 2q_0 + r_0$ con $0 \le r_0 < 2$
Ronda 2 $\quad N_1 = q_0 + r_0 = 2q_1 + r_1$ con $0 \le r_1 < 2$
Ronda 3 $\quad N_2 = q_1 + r_1 = 2q_2 + r_2$ con $0 \le r_2 < 2$

.
.
.

Ronda m $\quad N_{m-1} = q_{m-2} + r_{m-2} = 2q_{m-1} + r_{m-1}$ con $0 \le r_{m-1} < 2$
Ronda m+1 $\quad N_m = q_{m-1} + r_{m-1} = 2q_m + r_m$ con $q_m = 0$ y $r_m = 1$

En realidad sabemos que la m+1 división ya no tiene sentido hacerla ya que siempre tenemos 1/2 =0 y sobra 1.

Por lo que también sabemos que en la m'ésima división siempre se tendrá 2/2 = 1 y sobra 0; ya que es el partido final en donde se obtiene siempre al único ganador del torneo.

De modo que con esta notación, lo que necesitamos saber es: cuántos residuos r_i hay distintos de cero en el procedimiento anterior y cuánto vale la m. Así, el número de r_i's distintos de cero será el número de pases automáticos y el número m será el número de rondas.

Notemos que como las r_i's solo pueden tomar los valores 0 ó 1, es lo mismo contar el número de ellas distintas de cero que sumarlas a todas, ya que de cada sumando que tengamos solo los que valen 1 serán contados para la suma, de modo que la suma debe ser hecha solo hasta i=m-1 ya que r_m significa en esta notación, El ganador (que ya no es un pase automático).

Busquémos primero como sumar las r_i's:

Vamos a considerar solo $N_0 > 1$ ya que si se tiene un único jugador inscrito la cuenta no tiene sentido.

Puntualizando, estamos buscando cuanto vale Σr_{i} con $i=0,1,2,\ldots,m-1$ para poder decir cuántos pases hay.

De las m+1 igualdades que tenemos, no podemos obtener esta suma directamente, entonces vamos a tratar de construir alguna igualdad que nos ayude a despejar a las r_i's en términos de algo conocido por nosotros o, por lo menos , que podamos calcular.

Tenemos:

$$
\begin{aligned}
N_0 &= 2q_0 + r_0 \\
q_0 + r_0 &= 2q_1 + r_1 \\
q_1 + r_1 &= 2q_2 + r_2 \\
&\vdots \\
q_{m-2} + r_{m-2} &= 2q_{m-1} + r_{m-1} \\
q_{m-1} + r_{m-1} &= 2q_m + r_m = 1 \quad \text{ya que } q_m=0 \text{ y } r_m=1
\end{aligned}
$$

De nuevo, como queremos despejar la suma de las r_i's vamos a construir lo que necesitamos, con álgebra solamente.

Como las q_i's no nos interesan, vamos a tratar de desaparecerlas, mediante construir en ambos lados de las igualdades lo mismo para poder cancelarlas.

Multiplicando cada renglón por una potencia de 2 (la que necesitamos en cada caso), al hacer la suma de todas las igualdades va a quedar lo mismo en ambos lados, con respecto a las q_i's.

Veamos: multipliquemos el i'ésimo renglón por 2^i y tenemos:

$$
\begin{aligned}
N_0 &= 2q_0 + r_0\\
2(q_0 + r_0) &= 2(2q_1 + r_1)\\
2^2(q_1 + r_1) &= 2^2(2q_2 + r_2)\\
&\;\;\vdots\\
2^{m-1}(q_{m-2} + r_{m-2}) &= 2^{m-1}(2q_{m-1} + r_{m-1})\\
2^m(q_{m-1} + r_{m-1}) &= 2^m(1)
\end{aligned}
$$

Que es lo mismo que:

$$
\begin{aligned}
N_0 &= 2q_0 + r_0\\
2q_0 + 2r_0 &= 2^2q_1 + 2r_1\\
2^2q_1 + 2^2r_1 &= 2^3q_2 + 2^2r_2\\
&\;\;\vdots\\
2^{m-1}q_{m-2} + 2^{m-1}r_{m-2} &= 2^m q_{m-1} + 2^{m-1}r_{m-1}\\
2^m q_{m-1} + 2^m r_{m-1} &= 2^m
\end{aligned}
$$

De donde sumando las m+1 igualdades tenemos:

$$N_0 + (2q_0 + 2^2q_1 + \ .\ .\ . + 2^{m-1}q_{m-2} + 2^m q_{m-1}) + (2r_0 + 2^2r_1 + \ .\ .\ . + 2^{m-1}r_{m-2} + 2^m r_{m-1}) =$$
$$(2q_0 + 2^2q_1 + ... + 2^{m-1}q_{m-2} + 2^m q_{m-1}) + (r_0 + 2r_1 + ... + 2^{m-1}r_{m-1} + 2^m)$$

Donde ya podemos cancelar las q_i's y tenemos:

$$N_0 + 2(r_0 + 2r_1 + \ ...\ + 2^{m-2}r_{m-2} + 2^{m-1}r_{m-1}) =$$
$$(r_0 + 2r_1 + \ ...\ + 2^{m-2}r_{m-2} + 2^{m-1}r_{m-1}) + 2^m$$

De donde

$$N_0 + (r_0 + 2r_1 + \ ...\ + 2^{m-2}r_{m-2} + 2^{m-1}r_{m-1}) = 2^m$$

Y por tanto

$$N_0 = 2^m - \Sigma(2^i r_i) \quad \text{con } i=0,1,\ldots,m-1$$

Nótese que aún no hemos encontrado lo que se quería, pero hemos encontrado que N_0 (que es el número de jugadores) se puede escribir como una potencia de 2 (que involucra a m, que es el número de rondas) menos un número que ya se "parece" mucho al que estábamos buscando.

Veamos quién es m, ó mas bien, veamos si podemos caracterizar ya a m en términos de N_0 (ya que $N_0 = 2^m - \Sigma 2^i r_i$).

Como $\Sigma(2^i r_i)$ $_{con\ i=0,1,\ldots,m-1}$ es un número mayor o igual a cero, lo que sí sabemos es que m es el máximo de las potencias de 2 a las que puede llegar N_0.

Ahora, por como hemos tomado a m se tiene entonces que 2^m es la potencia inmediata superior a N_0, o sea, $2^{m-1} < N_0 \leq 2^m$. Y como conocemos a N_0, podemos encontrar a m ya que conocemos todas las potencias de 2 y sabemos como encontrarlas (Nótese que ésta es una demostración de la observación 4).

Entonces ya podemos responder a la pregunta de ¿cuántas rondas se juegan dado cualquier número de jugadores?. Por ejemplo, si se tienen 300 jugadores inscritos, el número de rondas que se efectúan es 9 ya que $2^8 = 256 < 300 \leq 512 = 2^9$

Si se tienen 18 jugadores, se efectúan 5 rondas por que
$2^4 < 18 \leq 2^5$.

Sólo nos falta saber qué número es: Σr_i $_{con\ i=1,2,\ldots,m-1}$.

El número $\Sigma(2^i r_i)$ $_{con\ i=0,1,\ldots,m-1}$ es lo mismo que $r_0 + 2r_1 + 2^2 r_2 + \ldots + 2^{m-1} r_{m-1}$ y ésto, es un número escrito en base 2 ya que las r_i's son cero ó uno, multiplicadas por las potencias de 2 y sumadas, esto es, un número en base 2 (8).

De donde, aunque no hemos encontrado exactamente lo que buscábamos,(que es un problema abierto todavía) sí tenemos al menos un procedimiento para encontrar el número de pases automáticos, que solo involucra escribir en base 2 a un número y contar en esa expresión el número de unos que contiene.

La receta es entonces:

Dado N el número de jugadores inscritos, buscamos la potencia de 2 inmediata superior. Sea m ∈ **N** tal que

(8) Ver apéndice a.

$N \leq 2^m$ entonces m es el número de rondas que se efectúan.

Sea $P=2^m-N$, escribimos a P en base 2 y contamos el número de unos en esta expansión y éste será el número de pases automáticos que habrá en el torneo.

Ejemplo.

Si el número de jugadores inscritos es 60, tenemos:

$2^5 < 60 \leq 64 = 2^6$ entonces habrá 6 rondas y

$64 - 60 = 4 = 100_2$ entonces habrá solo 1 pase.

Podemos comprobar la veracidad de lo que hemos hecho, haciendo todo lo que hacíamos antes "a pie" :

1 -	60/2 = 30	sobra 0
2 -	30/2 = 15	sobra 0
3 -	15/2 = 7	sobra 1
4 -	8/2 = 4	sobra 0
5 -	4/2 = 2	sobra 0
6 -	2/2 = 1	sobra 0

Lo que da como resultado 6 rondas y 1 pase automático. Y 30 + 15 + 7 + 4 + 2 + 1 = 59 partidos a jugarse en total.

Debemos hacer la acralación que aunque no se ha encontrado una fórmula que nos diga cuánto vale Σr_i con $i=0,1,\ldots,m-1$, si se ha encontrado un método para contar cuántos r_i's son distintos de cero, que es un tanto más fácil que lo que habíamos hecho "a pie". Sobre todo si consideramos que el algoritmo para escribir un número en base 2 es muy fácil para una computadora y para ella misma también es muy fácil saber cuántos unos contiene ese número en base 2.

Ahora invitamos al lector que intente demostrar de otra forma las observaciones que hacíamos en el proceso de descubrir el número de rondas y el número de pases.

1+ 2+ 4

1 1 1

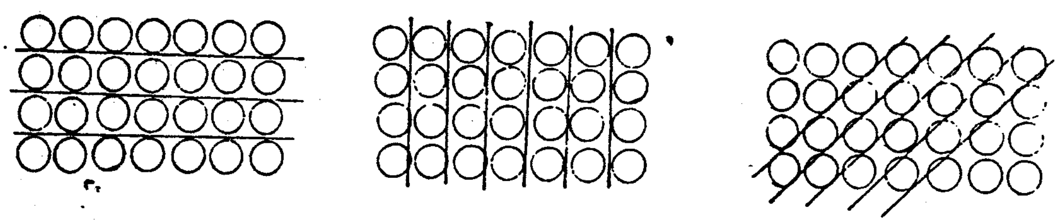
UN PROBLEMA DONDE SE UTILIZAN LOS NUMEROS TRIANGULARES.

Como un ejemplo del uso de los números triangulares en problemas de distintos tipos, transcribimos aquí, un artículo publicado en la revista Mathematics Teacher en abril de 1974 y que fué escrito por George Gullen III.

EL MENOR FACTOR PRIMO DE UN NUMERO NATURAL.

El propósito de este artículo es presentar un programa computacional para encontrar el menor factor primo de un número natural, un programa basado en un análisis de la "anatomía" de un arreglo rectangular. Un estudio de arreglos rectangulares puede ayudar en la búsqueda del menor factor primo n de un número natural N porque es equivalente a tratar de arreglar N objetos en una disposición rectangular de n renglones y m columnas, donde $1 \; n \leq m$, $N=mn$ y donde n es tan pequeño como sea posible.

Examinemos un arreglo rectangular típico. La figura 1 muestra tres formas de considerar un arreglo rectangular de 4 por 7. Podemos pensar que contiene 4 renglones de siete objetos cada uno como en la figura 1a., ó siete columnas de cuatro objetos cada una como en la figura 1b. Una tercera forma de pensarlo es la ilustrada en la figura 1c. Aquí, el arreglo de 4 por 7 mostrado consiste de 2 arreglos triangulares cada uno con T_3 objetos (donde T_3 es el tercer número triangular, $T_3=1+2+3$) y cuatro diagonales con 4 objetos cada una.



(a) (b) (c)

figure 1

En general, un arreglo rectangular de N objetos con n renglones y m columnas donde $1 \quad n \le m$ puede pensarse que consiste de 2 arreglos triangulares cada uno que contiene T_{n-1} objetos y $m-n+1$ diagonales cada una conteniendo n objetos.

La demostración que da el número de objetos N es muy simple si se acepta la fórmula:

$$T_n = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

donde T_n es el enésimo número triangular.

Demostración. El número total de objetos en dos arreglos triangulares T_{n-1} y $m-n+1$ diagonales de n objetos es:

$$2(T_{n-1}) + n(m-n+1) = 2\frac{(n-1)[(n-1)+1]}{2} + mn - n^2 + n =$$

$$n^2 - n + mn - n^2 + n = mn = N$$

El siguiente algoritmo puede usarse para cualquier número de objetos N, donde N 2, en un arreglo rectangular que contiene el menor número posible de renglones mayor que uno si tal arreglo es posible. Si no es posible, el algoritmo mismo lo indicará.

Paso 1 : Coloque dos de los objetos como si estuvieran en esquinas opuestas de un arreglo rectangular. Guarde los otros objetos en una pila por separado. (ver figura 2a.)

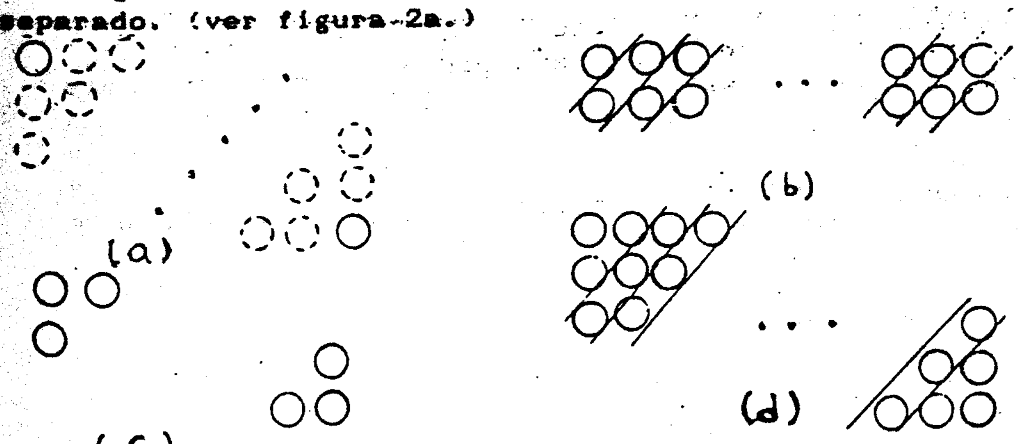


figura 2

Paso 2.1 . Si hay menos que 2 objetos en la pila separada, entonces es imposible hacer un arreglo rectangular con los N objetos.

Paso 2.2 . Si hay al menos 2 objetos en la pila, trate de arreglar todos ellos en diagonales que contengan exactamente 2 objetos cada una.(ver figura 2.b), Si puede efectuarse, entonces se tiene un arreglo rectangular con 2 renglones.

Paso 2.3 . Si no se pudo efectuar el paso 2.2, y no hay suficientes objetos para hacer al menos 2 diagonales completas, entonces es imposible arreglar los N objetos en una forma rectangular.

Paso 2.4 . Si 2 o más diagonales se formaron en el paso 2.2 pero hay un objeto extra en la pila, entonces es imposible hacerla excepto por las 2 diagonales mas cercanas a las esquinas originales y coloque todos los objetos desarreglados en una pila (ver figura 2.c).

Paso 3.1 . Si hay menos de 3 objetos en la pila, entonces es imposible colocar N objetos en un arreglo rectangular.

Paso 3.2 . Si hay al menos tres objetos en la pila, trate de arreglar todos ellos en diagonales que contengan exactamente 3 objetos cada una (ver figura 2.d). Si se puede hacer, entonces se tiene un arreglo rectangular de 3 renglones.

Paso 3.3 . Si no se ha podido y no hay suficientes objetos para hacer 2 diagonales completas, entonces es imposible acomodar N objetos en un arreglo rectangular.

Paso 3.4 . Si se han podido hacer dos o más diagonales pero hay algunos objetos que sobran (no suficientes para hacer una diagonal completa), deshaga todas las diagonales excepto las 2 más cercanas a las esquinas originales y coloque los objetos desarreglados en una pila.

.

.

.

Paso k.1 . Si hay menos de k objetos en una pila, entonces es imposible acomodar N objetos en un arreglo rectangular.

Paso k.2 . Si hay al menos k objetos en la pila, trate de arreglarlos en diagonales que contengan exactamente k objetos cada una. Si se pudo hacer, entonces se tiene un arreglo rectangular con k renglones.

Paso k.3 . Si no se ha podido hacer y no hay suficientes objetos para hacer 2 diagonales completas, entonces es imposible acomodar N objetos en un arreglo rectangular.

Paso k.4 . Si se ha podido efectuar y se han hecho 2 o más diagonales, pero sobran objetos (no suficientes para hacer una diagonal completa), deshaga todas las diagonales excepto las 2 mas cercanas a las esquinas originales y ponga los objetos desarreglados en una pila.

.

.

.

Usando el lenguaje de programas de computadora, observamos que el algoritmo descrito está en la forma de un loop (en forma circular) que terminará en un número finito de pasos para cualquier número natural N. La terminación ocurrirá ya sea porque se formará un arreglo rectangular, o porque se determina por el algortmo mismo que es imposible formar el arreglo rectanguar requerido.

El algoritmo se escribe en una forma tal que lo hace muy fácil de codifioar para que una computadora lo ejecute. El siguiente es un programa de computación que es esencialmente una traducción a BASIC del algoritmo para los arreglos rectangulares.

```
100 REM                  ESTE PROGRAMA ENCUENTRA EL MENOR
110 REM                  FACTOR PRIMO DE CUALQUIER NUMERO
120 REM                     NATURAL MAYOR QUE 2.
130 LET M=1
140 PRINT "ESCRIBA CUALQUIER NUMERO NATURAL"
150 INPUT N
160 LET P2=N
170 LET P=P2-2*M
```

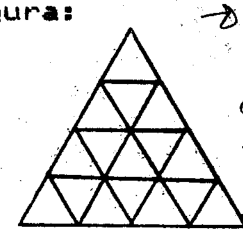
```
180 LET P2=P
190 LET M=M+1
200 IF P<M THEN 250
210 LET P=P-M
220 IF P>0 THEN 210
230 IF P=0 THEN 270
240 IF P2>2*M THEN 170
250 PRINT N;"ES PRIMO"
260 GOTO 280
270 PRINT "EL MENOR FACTOR PRIMO DE";N;"ES";M
280 END
```

EJERCICIOS.

1 .- Resolver el ejercicio de la tablilla de chocolate, que se propone en la página 10 de este trabajo.

2 .- ¿Cuántos cuadrados hay en un cuadrado de n cuadritos por lado? Demostrarlo.

3 .- Dada la siguiente figura:



→ fórmulas y más acerca de números triangulares talvez inducción

a) ¿Cuántos triángulos hay con la misma orientación que el mayor?

b) ¿Cuántos triángulos hay con cualquier orientación?

c) Si el triángulo mayor está dividido en n partes cada lado, ¿cuántos triángulos hay?

4 .- Encontrar la suma de los números naturales impares. Demostrarla. Buscar argumentos geométricos para su demostración. → número cuadrados (inducción)

5 .- Se tiene la siguiente disposición de círculos y cruces:

¿Cómo se pueden cambiar los círculos a los lugares de las cruces y las cruces a los de los círculos? teniendo como reglas las siguientes:

a) Siempre se mueven hacia adelante, no pueden retroceder.

b) Un círculo puede saltar a una cruz o viceversa, pero no pueden saltarse una semejante con otra, no tampoco puede saltar a más de un contrario.

c) Se puede saltar siempre que exista un lugar vacío.

d) Dos elementos no pueden ocupar un mismo espacio.

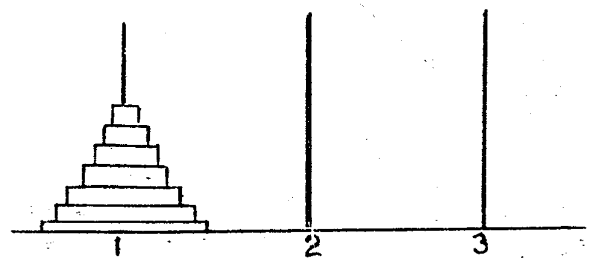
e) Solo existen 7 lugares, 3 círculos y 3 cruces.

i-¿Cuál es el número mínimo de pasos para efectuar el traslado? → fórmula inductiva

ii-Si se tienen n círculos, n cruces y 2n+1 lugares, ¿cuál es el mínimo número de pasos para efectuar el traslado? ¿Existe una fórmula general que describa el problema? Si la respuesta es afirmativa, demostrar esa fórmula.

6 .- Se tiene la llamada "Torre de Hanoi", esto es, una pirámide formada por n anillos de distintos diámetros dispuestos de mayor a menor, con el mayor en la parte inferior sosteniéndo a los demás, como se muestra en la siguiente figura:

Inducción (funciones)



El juego consiste en trasladar los anillos de la estaca número 1 a cualquiera de las otras 2, para lo cual se puede usar la otra como auxiliar, con la única regla consistente en que no se puede poner encima de un anillo uno de dimensión mayor.

¿Cuál es el número mínimo de jugadas que se necesita realizar para trasladar la torre?

a) Si la torre consta de 7 anillos.

b) Si la torre consta de n anillos.

¿Tiene este problema alguna relación con el problema del torneo de Pin Pon, cuando el número de participantes es una potencia de 2?

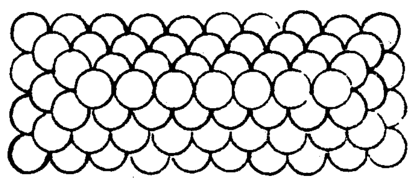
¿Se puede encontrar alguna manera de saber en cuál de las 2 estacas va a terminar la torre, con solo saber el número de discos que tiene?

Dado un número de paso (jugada), ¿se puede saber cuál es el anillo que debe moverse y a dónde ha de hacerlo?

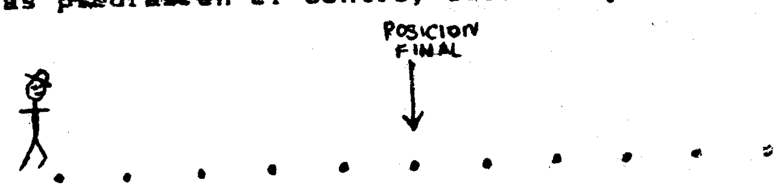
*Nota. Proximamente, se publicará un artículo de Pilar Martínez y Julieta Verdugo, en donde se da respuesta a éstas y más preguntas sobre el juego de la Torre de Hanoi.

7 .- Dado un círculo, ¿en cuántas regiones ajenas puede dividirse cuando se corta por n rectas? Encontrar una fórmula general para tener el máximo número de regiones en que puede dividirse el círculo. Demostrarla. ¿Tiene algo de relación con los números triangulares?

8 .- Se tiene una pila de balas en forma rectangular, formada de la siguiente manera: La base es un rectángulo de m balas por n, siendo m mayor que n; sobre este rectángulo está colocado otro rectángulo que tiene $m-1$ balas por $n-1$; sobre éste último está colocado un tercer rectángulo que tiene $m-2$ balas por $n-2$, y así sucesivamente: la cúspide de la pila está formada por una línea de $m-(n-1)$ balas. ¿Cuál es el número total de balas que contiene la pila?



9 .- Se tiene un número impar de piedras, colocadas a una distancia de 10 metros una de la otra, en línea recta. Un hombre está parado en un extremo de la línea y debe colocar a todas las piedras en el lugar donde se encuentra la de enmedio. El hombre solo puede transportar una piedra a la vez. Si se sabe que el hombre ha caminado 360 metros al terminar de colocar todas las piedras en el centro, ¿cuántas piedras había?



¿Cuántos metros caminó sin cargar piedras y cuántos caminó cargando piedras?

10.- Demostrar que $T_n + T_{n-1} = n^2$

Representarlo geométricamente.