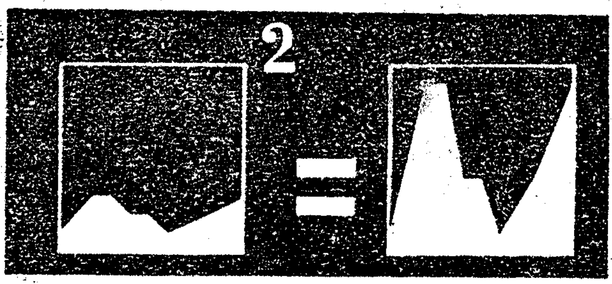
REVISTA DEL SEMINARIO de ENSEÑANZA Y TITULACION

AÑO IV

NÚMERO ESPECIAL 26

ASPECTOS DE ALGEBRA SUPERIOR I, A TRAVÉS DE PROBLEMAS (SEGUNDA PARTE)

POR: JULIETA VERDUGO DIAZ



DICIEMBRE 1988

Mariana

SUSCRIPCION. TODAS LAS PERSONAS QUE DESEEN UNA SUSCRIPCION, DEBERAN MANIFESTARLO POR ESCRITO, ENVIANDO SU NOMBRE Y DIRECCION A:

- MAESTRIA EN EDUCACION EN MATEMATICAS.
  EDIFICIO OFICINAS ADMINISTRATIVAS NO. 2, 1ER. PISO.
  AV. UNIVERSIDAD 3000, CIUDAD UNIVERSITARIA.
- DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS,
  CUBICULO 239 Y 240. FACULTAD DE CIENCIAS, U.N.A.M.,
  CIUDAD UNIVERSITARIA.

DICHA SUSCRIPCION SERA GRATUITA Y ANUAL, MIENTRAS ESTO SEA POSIBLE.
LOS ARTICULOS FIRMADOS NO REPRESENTAN NECESARIAMENTE LA OPINION DEL SEMINARIO.
SI DESEAS LA IMPRESION DE ALGUN MATERIAL, PUEDES SOLICITARLO CON CUALQUIER MIEMBRO DEL SEMINARIO O ENVIANDOLOS A LA DIRECCION ARRIBA ANOTADA, AL IGUAL QUE TODO TIPO DE CORRESPONDENCIA RELACIONADA CON EL SEMINARIO.

ESTE NUMERO DE LA REVISTA FUE IMPRESO EN LOS TALLERES DE IMPRESION DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES, PLANTEL
SE TIRARON EJEMPLARES.

CONTINUACIÓN DEL NÚMERO ESPECIAL 25

ASPECTOS DE ALGEBRA SUPERIOR I, A TRAVES DE PROBLEMAS

JULIETA VERDUGO DIAZ

Profesor por horas del Depto. de matemáticas de la Facultad de Ciencias. UNAM

I N D I C E .

CAPITULO SEGUNDO. INDUCCION MATEMATICA.

CAPITULO TERCERO. COMBINATORIA Y ALGUNAS APLICACIONES.

CAPITULO CUARTO. CONCLUSIONES

C A P I T U L O   II

PROBLEMA.

Encontrar un número triangular cuyo doble sea un número triangular.

Volviendo con el procedimiento que hemos seguido en el capitulo anterior, hagamos primero la lista de los primeros números triangulares:

T_1	1	T_7	28	T_{13}	91	T_{19}	190
T_2	3	T_8	38 36	T_{14}	105	T_{20}	210
T_3	6	T_9	45	T_{15}	120	T_{21}	231
T_4	10	T_{10}	55	T_{16}	136	.	
T_5	15	T_{11}	66	T_{17}	153	.	
T_6	21	T_{12}	78	T_{18}	171	.	

Observando la lista, vemos que el 3 es un número triangular cuyo doble también es un número triangular, es decir: $6 = T_3 = 2(T_2) = 2(3)$.

Así, hemos dado respuesta a la pregunta, pero ahora nos podemos preguntar si existen mas números triangulares que cumplan con la condición, o bien, si queremos encontrar todos los números triangulares cuyo doble sea un triangular,
¿cómo encontraremos la respuesta?

Si seguimos haciendo la lista de números triangulares encontraremos que:

$210 = T_{20} = 2(T_{14}) = 2(105)$

Y entre 3 y 105 no hay otro triangular que cumpla con la proposición.Esto es fácil de comprobar, con solo observar la lista de triangulares. Entonces, ¿cuál será la siguiente pareja de triangulares que cumpla la proposición?

Seguir haciendo la lista de números triangulares resulta un trabajo tedioso y además, no necesariamente resolveríamos el problema, ya que esta lista es infinita. Entonces tratemos de entender qué es lo que estamos buscando en general, tratemos de descubrir qué es lo que cumplen estas parejas de números para poder plantearlo en general y buscar cuáles son todos los números triangulares cuyo doble es un número triangular.

Por ejemplo, ¿cómo sabemos en general si un número es triangular? ó ¿Cómo sabemos en general si el doble de un número triangular es un triangular?

Veamos un caso particular, para n=18, ¿$2(T_{18})$ será un número triangular?

Como ya sabemos calcular cualquier triangular, veamos qué significa esta pregunta:

$$2(T_{18}) = 2\frac{(18)(19)}{2} = (18)(19) = 342$$

La pregunta es pues, ¿existe n en los números naturales tal que $T_n = 342$? lo que quiere decir:

$$342 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$684 = n^2 + n$ y de aquí tenemos:

$n^2 + n - 684 = 0$ cuya solución es:

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{2737}}{2}$$

$n_1 = 25.6582$ y $n_2 = -26.6582$

Claramente ninguna de las 2 soluciones satisface las condiciones del problema ya que ninguna de ellas pertenece a los números naturales.

Veamos ahora otro ejemplo particular, $2(T_{84})$ ¿será un número triangular?

Como ya vimos, el problema es encontrar n en los números naturales tal que $2(T_{84}) = T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, o sea: sea mas grande

$$2(T_{84}) = 2\frac{(84)(85)}{2} = 7140 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

$2(7140) = n^2 + n$

$14280 = n^2 + n$

$n^2 + n - 14280 = 0$

cuyas soluciones son:

$n_1 = 119$ y $n_2 = -120$

Así, n_2 no puede ser solución, ya que no es elemento de los números naturales pero n_1 sí cumple con todo lo que se pedía, y entonces:

$$2(T_{84}) = T_{119} = \frac{(119)(120)}{2} = 7140$$

De manera que 7140 sí es un número triangular, y así, hemos encontrado otra solución al problema; de modo que ya tenemos 3 parejas de triangulares que satisfacen la condición, estas son:

(3,6), (105,210) y (3570,7140), pero ¿cuáles son todas las soluciones?

Hagámoslo en general. Queremos encontrar 2 triangulares T_n y T_m tales que $T_n = 2(T_m)$ que quiere decir:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2m(m+1)}{2} \quad \text{o sea}$$

$n^2 + n = 2m^2 + 2m$ donde n y m sean números naturales

En general, nuestro problema es encontrar n y m en los naturales tales que:

$$n^2 + n - 2m^2 - 2m = 0$$

De donde si completamos cuadrados tenemos:

$$(n^2 + n + \tfrac{1}{4}) - 2(m^2 + m + \tfrac{1}{4}) = -\tfrac{1}{4}$$

$$(4n^2 + 4n + 1) - 2(4m^2 + 4m + 1) = -1$$

$$(2n+1)^2 - 2(2m+1)^2 = -1 \qquad (1)$$

Aparentemente el problema se complica, pero si hacemos un cambio de variables, trataremos de avanzar en la solución y después regresaremos a nuestra ecuación (1).

Sean $x = 2n+1$ y $y = 2m+1$ entonces la ecuación (1) se transforma en: $x^2 - 2y^2 = -1$ (2)

En donde tenemos que encontrar números naturales impares (por el cambio de variables) tales que satisfagan la ecuación (2). Nótese que es lo mismo resolver el problema en la ecuación (2) que hacerlo en la (1) ya que las soluciones de una dan soluciones de la otra y viceversa. Ejercicio para el lector: demostrar que todas las soluciones de (2) son tales que x y y son impares.

Veamos que con las 3 parejas de soluciones de (1) que ya habíamos encontrado, podemos encontrar 3 soluciones a (2).

Sabemos que $T_3 = 2(T_2)$ de modo que n=2 y m=3 son solución a (1) ya que $7^2 - 2(5^2) = 49 - 2(25) = -1$

$$[2(2)+1]^2 - 2[2(3)+1] = 5^2 - 2(7)^2 = -1$$

y entonces x=5 y y=7 son la solución correspondiente a la pareja n=2, m=3.

m=2 , n=3

Equivalentemente tenemos que para $n=20$ y $m=14$ solución a (1), obtenemos $x=41$ y $y=29$ que son solución a (2) y por último si $n=119$ y $m=84$ se obtiene la pareja $x=239$ y $y=169$ solución a (2).

De modo que si obtenemos la solución a (2), con un procedimiento inverso al anterior, obtendremos soluciones a la ecuación (1).

Notemos que $x=1$ y $y=1$ también es una solución a (2), pero no lo es para nuestro problema original ya que nos conduce a:

$1=2n+1$ y $1=2m+1$ de donde $n=0$ y $m=0$ de modo que debe suceder que $T_0 = 2(T_0)$ y aún no hemos definido qué significa T_0 . Pero, nada se altera si definimos al triangular número cero como el cero mismo, o sea $T_0 = 0$ permite que todo lo que se ha hecho sobre triangulares, siga siendo válido y además, que en este caso también sea cierta la igualdad.

¿Cómo vamos a encontrar todas las soluciones a la ecuación (2)?

Un procedimiento muy común en las matemáticas es trabajar en otros conjuntos de números y una vez resuelto el problema en esos conjuntos, regresar al conjunto original y dar allí la respuesta. El problema que venimos analizando, es un caso concreto de ésto, ya que vamos a trasladarnos a otro conjunto para dar respuesta a la ecuación (2) y después regresar a dar respuesta a la ecuación (1).

Las ecuaciones de la forma $x^2 - Ay^2 = 1$ ó $x^2 - Ay^2 = -1$
con A diferente de k^2 para alguna k en los números enteros, son las llamadas ecuaciones de Pell* y existe toda una teoría matemática para encontrar sus soluciones. Nótese que la ecuación (2) es una ecuación de Pell (en el apéndice b de este trabajo damos una forma de encontrar la solución a este caso particular, además de una breve visión de lo que se hace en general para resolver estas ecuaciones y de la teoría que se vincula en este proceso).

Siguiendo el procedimiento para hallar las soluciones a las ecuaciones de Pell, encontramos el siguiente resultado:

Si x y y son solución de (2), entonces $x' = 3x+4y$ y $y' = 3y+2x$ también son solución a (2).

La demostración de esta proposición es fácil de hacer mediante el álgebra directa.

Sabemos que $x^2-2y^2 = -1$ y debemos demostrar que $(x')^2 - 2(y')^2 = -1$.

Demostración:

$(3x+4y)^2 - 2(3y+2x)^2 = 9x^2 +24xy +16y^2 -18y^2 -24xy-8x^2 =$
$x^2 - 2y^2 = -1$ q.e.d.

Y de este resultado podemos llegar a obtener las soluciones a la ecuación (1) mediante la sustitución:

$x=2n+1$ y $y=2m+1$ que nos lleva a :

$x'=3x+4y = 3(2n+1) +4(2m+1) = 6n + 8m + 7$ y

$y'=3y+2x = 3(2m+1) +2(2n+1) = 6m + 4n +5$

Y como x' y y' son impares también, entonces existen n' y m' en los números naturales tales que $x'=2n'+1$ y $y'=2m'+1$ de modo que:

$n' = 3n + 4m + 3$ y $m' = 3m + 2n + 2$ (3)

son las ecuaciones que nos proporcionan todas las soluciones a nuestro problema original, es decir, n' y m' son los subíndices de triangulares que cumplen con la proposición.

De manera que hemos encontrado dos ecuaciones que nos proporcionan una infinidad de soluciones a la ecuación (1) y solo tenemos que conocer una solución particular para ir generando todas las que querramos.

Notemos que por todo el procedimiento que se hizo, en realidad hemos encontrado <u>todas</u> las soluciones a nuestro problema.

Si conocemos la primera solución, podemos ir obteniendo nuevas soluciones con las fórmulas que hemos encontrado en (3). Nòtese tambien que podríamos despejar a n y m en términos de n' y m' y tendríamos entonces un par de fórmulas recursivas que nos llevarían de una solución mayor a una menor cada vez que las aplicáramos.

Comprobemos en un caso particular que las fórmulas de (3) nos proporcionean soluciones a (1).

Sabemos que $n=20$ y $m=14$ son solución a (1) ya que $T_{20} = 2(T_{14})$ entonces debe suceder que $n'=3(20)+4(14)+3$ y $m'=3(14) + 2(20) + 2$ también sea solución de (1).

Y $n'=119$ y $m'=84$ son efectivamente solución.

Es más, ésta es la siguiente pareja de triangulares que satisface la proposición.

Así, hemos encontrado todos los números triangulares tales que su doble también es un número triangular, basta con conocer la primera solución (que ya habíamos encontrado "a pie") y las fórmulas que nos generan a la siguiente, para que tengamos a todas las soluciones.

De manera que el problema está en encontrar la primera solución y una vez encontrada ésta, el problema puede resolverse en general con toda la teoría sobre las ecuaciones de Pell(que como ya dijimos tratamos en el apéndice b).

Pero encontrar en general la solución más pequeña a las ecuaciones de la forma $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ con A un número natural no cuadrado, no siempre es fácil de hacer.

Como un ejemplo de que no es tan fácil encontrar la primera solución, citamos un párrafo del libro Inducción en la Geometría de L.I.Goloviná y I.M.Yaglom:

"Sustituyendo n en la expresión $991n^2 + 1$ por los números enteros sucesivos 1,2,3,..., jamás obtendremos el cuadrado de un número por muchos días o incluso años que dediquemos a ello. Sin embargo, sería erróneo deducir de aquí que ningún número de este tipo es un cuadrado pues, en realidad, entre los números de tipo $991n^2 + 1$ también hay cuadrados; pero es muy grande el valor mínimo de n para el cual es un cuadrado el número $991n^2 + 1$. He aquí este número

$n=12\ 055\ 735\ 790\ 331\ 359\ 447\ 442\ 538\ 767$."

Sabemos solamente que $991n^2 + 1$ igual a un cuadrado es una ecuación como $x^2 - Ay^2 = 1$ porque lo que se tiene es $m^2 - 991n^2 = 1$ entonces lo que se busca es la primera solución distinta de n=0, que ya habíamos dicho que siempre es solución en ecuaciones de este tipo.

Para concluir, remarcamos la afirmación que hemos demostrado en general:

Si n y m cumplen que $T_n = 2(T_m)$ entonces también n' y m' cumplen $T_{n'} = 2(T_{m'})$ donde $n'=3n+4m+3$ y $m'=3m+2n+2$.

PROBLEMA

Considerese el trinomio $x^2 + x + 41$ estudiado por L. Euler.

Se afirma que sustituyendo la x por números naturales, el trinomio siempre es un número primo.

¿Será cierta la afirmación?

Sustituyendo $x=1$ el trinomio resulta igual a 43 que sí es un número primo.

Si $x=2$ entonces $x^2 + x + 41 = 47$ que también es un número primo.

Siguiendo así, podemos formular la siguiente tabla:

VALOR DE x	$x^2 + x + 41$	¿es primo?
1	43	sí
2	47	sí
3	53	sí
4	61	sí
5	71	sí
6	83	sí
7	97	sí
8	113	sí
9	131	sí
10	151	sí

tabla 27

Los números 43, 47, ..., 151 son todos primos.

¿Podemos concluir que este trinomio siempre da un número primo cuando sustituimos x por cualquier número natural?

Antes de concluir, continuemos un poco mas la tabla 27

VALOR DE x	$x^2 + x + 41$	¿es primo?
11	173	si
12	197	si
13	223	si
14	251	si
15	281	si
16	313	si
17	347	si
18	383	si
19	421	si
20	461	si
21	503	si
22	547	si
23	593	si
24	641	si
25	691	si
26	743	si
27	797	si
28	853	si
29	911	si
30	971	si
31	1033	si

tabla 28

Después de analizar tantos casos, parece que ya podemos concluir que al sustituir x por cualquier número natural en $x^2 + x + 41$ nos dará como resultado un número primo.

Pero si quisiéramos seguir entreteniéndonos e incrementar más la tabla 28, comprobaríamos (como antes lo hicieron otros) que la afirmación es cierta solo hasta $x=39$ ya que si $x=40$ el trinomio es:

$$(40)^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 41(41) = (41)^2$$

que es claro que no es un número primo.

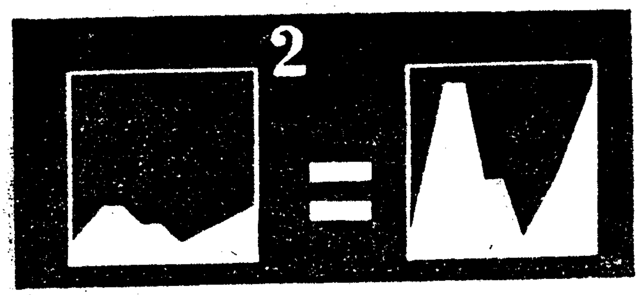
Entonces nos preguntamos ¿podemos asegurar que una proposición hecha por la experiencia de analizar algunos casos particulares en un problema es verdadera?

La experiencia en estos dos últimos problemas y en el problema que citamos del libro de la Inducion en la Geometría de Golovina y Yaglom, y que comentamos en el problema de encontrar un triangular cuyo doble sea un triangular, nos dice que la respuesta es no.

Pero entonces ¿qué es lo que en el capítulo anterior nos permitía demostrar las proposiciones?

De estos ejemplos podemos concluir que una proposición puede ser cierta en muchos casos particulares y ser o no ser verdadera en general. Entonces ¿cómo podemos saber si una proposición es verdadera en general?

Sabemos que es imposible analizar todos los casos, pero lo que hemos hecho en todos los otros problemas es buscar un argumento general, en abstracto y para cualquier número que analicemos para comprobar si la proposición es verdadera o no.



PROBLEMA

Encontrar un número cuadrado cuyo doble sea un número cuadrado.

Lo que de nuevo se antoja hacer, es la lista de números cuadrados para encontrar alguno.

Sea C_i el i'ésimo número cuadrado con i en todos los números naturales. Entonces la lista de los números cuadrados podemos escribirla como:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{18}	C_{19}	C_{20}	C_{21}. . .
169	196	225	256	289	324	361	400	441. . .

Y así podríamos seguir por varios días y no encontraremos uno que cumpla con las condiciones del problema.

Pero ¿ya podríamos concluir que no existe solución a este problema?

Veamos qué es lo que estamos buscando en general.

Buscamos una pareja de números naturales n y m tales que: $n^2 = 2m^2$ o sea que $n^2 - 2m^2 = 0$ (1)

Si tuviésemos un par de naturales que cumpliera con la ecuación (1), ¿cómo encontraríamos una pareja más grande que también sea solución a (1)?

Si m y n son tales que $n^2 = 2m^2$ entonces multiplicando por 2 tenemos:

$2n^2 = 4m^2 = (2m)^2$

Y encontramos así una $n' = 2m$ tal que $(n')^2 = 2n^2$ de modo que las fórmulas que nos proporcionan nuevas soluciones son:

$n' = 2m$ y $m' = n$ donde n y m satisfacen (1) y sucede que $n' > n$ y $m' > m$.

De esta forma, hemos encontrado una infinidad de soluciones a (1), partiendo de encontrar una particular, ya que así podemos seguirnos infinitamente.

Pero, ¡no hemos encontrado una particular todavía ! ¿cómo encontraremos una?, ¿podremos encontrar una pareja

Si el conjunto tiene dos elementos, sea $\{1,2\}$, no hay ningún número natural cuyo doble de su cuadrado sea un cuadrado, porque $2(1)^2=2$ y 2, aunque está en $\{1,2\}$, no es un cuadrado y $2(2)^2=8$ y 8 no es elemento de $\{1,2\}$ además de que no es un cuadrado. Como éstas son todas las posibilidades para $\{1,2\}$ entonces no existe ningún elemento cuyo doble de su cuadrado sea un cuadrado en $\{1,2\}$.

Si el conjunto tiene 3 elementos, $\{1,2,3\}$ tenemos:

$2(1)^2= 2$; 2 no es cuadrado aunque si es elemento de $\{1,2,3\}$

$2(2)^2= 8$; 8 no es cuádrado ni es elemento de $\{1,2,3\}$

$2(3)^2=18$; 18 no es cuadrado ni es elemento de $\{1,2,3\}$

Así podríamos seguir haciendo una lista para cada conjunto, siguiéndo de uno en uno; y como en todos los problemas que hemos visto antes, analicemos qué sucede cuando, teniendo analizado un caso particular, incrementamos en uno el conjunto analizado; como cambia el análisis previo, al tener un elemento más.

Por ejemplo si el conjunto es $\{1,2,\ldots,k\}$ y en este conjunto ya se ha demostrado que no hay hay ningún número natural cuyo doble sea un cuadrado, veamos qué sucede si el conjunto es ahora $\{1,2,\ldots,k,k+1\}$.

En $\{1,2,\ldots,k,k+1\}$ tampoco hay un número natural cuyo doble de su cuadrado sea un cuadrado, porque si hubiera, podríamos encontrar otro mas chico que cumpliera con la propiedad(por lo que se ha demostrado ya anteriormente), y eso condiría la hipótesis de que en $\{1,2,\ldots,k\}$ no había ningún número cuyo doble de su cuadrado sea cuadrado. El único sospechoso es el $k+1$, entonces veamos qué sucedería con $2(k+1)^2$. Si $2(k+1)^2$ fuera un cuadrado tendríamos:

$2(k+1)^2 = m^2 \Rightarrow$ m es par por lo tanto existe s en los números enteros tal que $s<k+1$ y además sucede que

$$m^2 = 2(k+1)^2 = 4s^2$$ y de aquí se tiene:

$(k+1)^2 = 2s^2$ ¡habríamos encontrado un número $s<k+1$ cuyo doble de su cuadrado sería un cuadrado y ésto contradiría la hipótesis, ya que s debería estar en el conjunto $\{1,2,\ldots,k\}$.

Por lo que hemos demostrado que no puede suceder mas que en $\{1,2,\ldots,k,k+1\}$ no existe un número cuyo doble de su cuadrado sea un número cuadrado.

Regresando al problema original, queremos encontrar n,m tales que $n^2 - 2m^2 = 0$ y de aquí podemos tener:

$n^2 = 2m^2$ de donde

$$\frac{n^2}{2} = 2$$

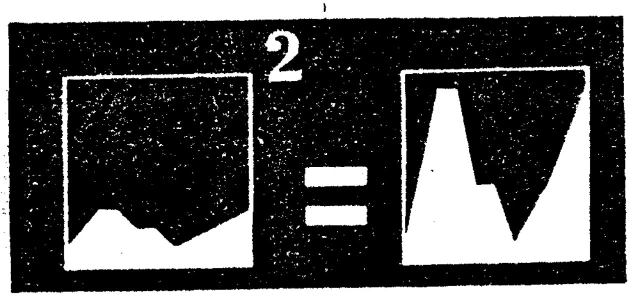
Y sacando raíz cuadrada tenemos

$$\frac{n}{m} = \sqrt{2} \quad !!!$$

¡ Pero esto es una contradicción ! Sabemos que n y m son naturales y entonces tendríamos que demostrar que $\sqrt{2}$ no se puede escribir como el cociente de 2 enteros positivos. ¿Cómo lo demostraríamos?

Nótese que lo hemos demostrado ya, cuando demostramos la proposición (a).

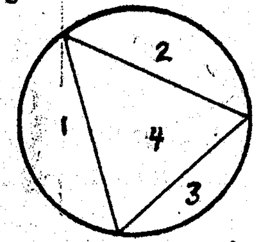
¿ Conoce el lector alguna otra demostración de que $\sqrt{2}$ es un número irracional ? Si la respuesta es afirmativa, nótese que de alguna u otra manera, en la demostración se usa un procedimiento de descenso infinito.



PROBLEMA.

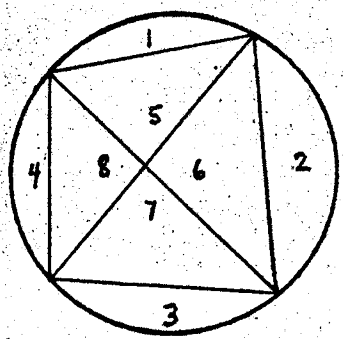
Dado un círculo y n puntos en él, ¿en cuántas regiones queda dividido el círculo cuando unimos los n puntos por medio de rectas?

Si el círculo tiene un punto, éste queda dividido en una sola región. Si el círculo tiene 2 puntos, queda dividido en 2 regiones. Si el círculo tiene 3 puntos:



Queda dividido en 4 regiones.

Si tiene 4 puntos:



Queda dividido en 8 regiones.

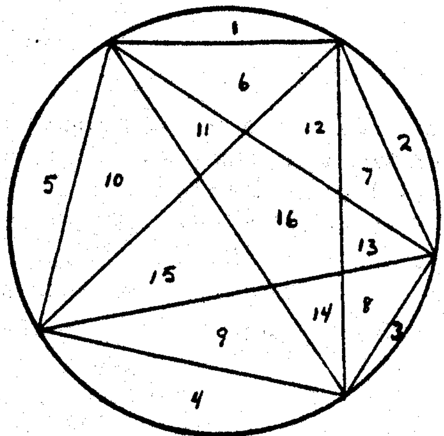
Si hacemos una tabla con los resultados que hemos obtenido, quizá pueda ayudarnos a dar la respuesta en general.

# DE PUNTOS	# DE REGIONES
1	1
2	2
3	4
4	8

tabla 29

¿Qué sucederá si el círculo tiene 5 puntos?

Por la regla que se observa, esperamos que el círculo quede dividido en 16 regiones. Veamos:



Contando las regiones tenemos: 5 regiones afuera del pentágono que se forma, 5 regiones afuera de la estrella, más 5 regiones que son los picos de la estrella y por último la región central. En total son 16 regiones, como esperábamos ¿no?.

Así podemos seguir contando con mas y mas puntos, pero hasta aquí, parece ser que siguen una regla, es decir, en la tabla n hemos observado que si el círculo tiene n puntos, entonces el número de regiones en que queda dividido el círculo es 2^{n-1} y ésto lo hemos comprobado ya para los 5 primeros números naturales. ¿Será cierta la proposición para todos los números naturales?

Antes de buscar un razonamiento general para ver si se puede demostrar para todos los números naturales, hagamos un ejemplo más. Si el círculo tiene 6 puntos ¿cuántas regiones determina?.

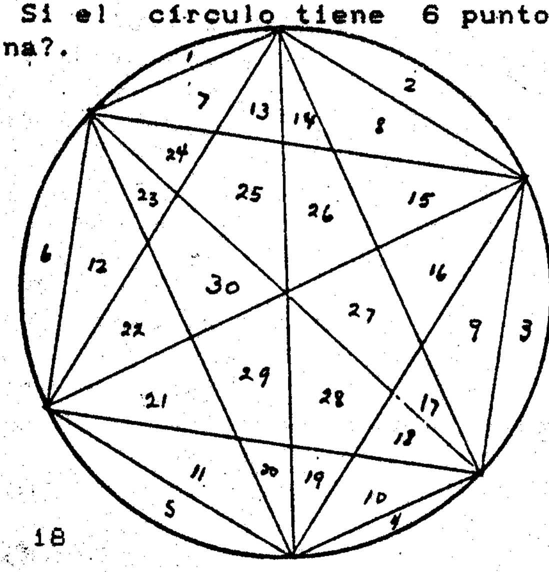


FIG. 1

¡ Queda dividido en 30 regiones que no son lo que esperábamos !

Podemos pensar que el error se debe a la colocación de los puntos sobre el círculo, entonces hagamos un ejemplo más para cerciorarnos de que esté correcto.

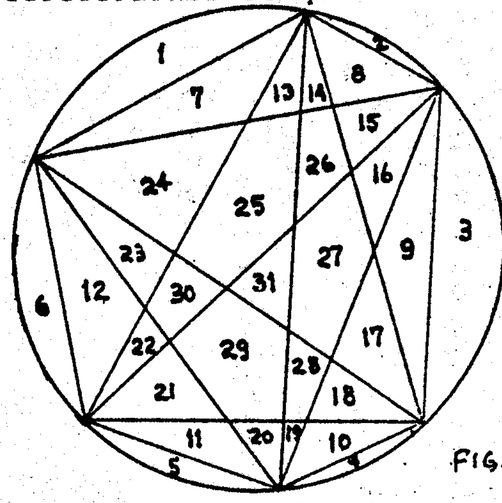


FIG. 2

¡ De nuevo no salió lo que esperábamos ! ; es más, ni siquiera salió igual que el ejemplo anterior en que también teníamos 6 puntos sobre el círculo. ¿por qué?

Después de hacer muchos casos mas con 6 puntos, nos daremos cuenta que en los casos en que coloquemos los 6 puntos sobre el círculo en forma un tanto uniforme se formarán 30 regiones y cuando no exista ninguna "uniformidad", se formarán 31 regiones, ya que todas las líneas del centro pasarán por un sólo punto, en el primer caso y en el segundo, las líneas del centro no pasan por un solo punto y se forma la región marcada con 31 en la figura 2, o alguna otra en otros casos.

Nótese que 31 regiones es lo más que se puede hacer, ya que en la figura 1 por ejemplo, el ùnico punto donde se cruzan mas de 2 rectas, distinto de los 6 originales, es el punto central en donde se cruzan 3 rectas que, si los 6 puntos no estan muy uniformemente distribuidos, ese punto central se transforma en un triángulo y ésto da por resultado una región más. En la figura 2, no hay ningún cruce de más de 2 rectas, por lo que de ninguna manera podemos obtener una región más para tener las 32 regiones que esperábamos que resultaran.

Entonces lo que tenemos hasta aquí, es que no basta con comprobar un número particular de veces una hipótesis para tener demostrada una proposición, sino que debe ser demostrada en general. En este caso hemos encontrado un contraejemplo a la proposición que formulamos con base a la observación de los 5 primeros casos particulares; y si siguiéramos haciendo los casos para 7 y 8 puntos, tenemos la siguiente tabla:

# DE PUNTOS	# DE REGIONES
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	31
7	57
8	99

tabla 30

En donde vemos que no es cierta la proposición, es más, no se ve tan sencillo encontrar alguna fórmula general que sea válida para todos los casos.

Existe un método llamado Cálculo de Diferencias Finitas, que en ocasiones es muy útil, y ésta es una de ellas, ya que por medio de éste podemos encontrar una fórmula general para encontrar el número de regiones en que queda dividido el círculo. El método es el siguiente:

- Se hace una lista de los valores que nos da el problema en un número particular de casos, en seguida se anotan en otra lista las diferencias entre cada par de números entre los renglones consecutivos. En una tercera lista se escriben las diferencias de los números que están en la segunda fila y así sucesivamente se van encontrando la primera, segunda, tercera, etc. diferencias, hasta que se encuentre una lista de constantes.

Veamoslo en nuestro caso particular:

N	# DE REGIONES	1a.DIF.	2a.DIF.	3a.DIF.	4a.DIF.
1	1				
2	2	1			
3	4	2	1		
4	8	4	2	1	
5	16	8	4	2	1
6	31	15	7	3	1
7	57	26	11	4	1
8	99	42	16	5	1

tabla 31

Cuando la lista inicial está generada por una función lineal, los números de la lista de las primeras diferencias son todos iguales. Si la función es cuadrática, en la lista de las segundas diferencias es en donde aparecen todas iguales. Así, una fórmula de tercer grado, dará cifras iguales en la lista de las terceras diferencias y así sucesivamente.

Volviendo a nuestro caso, la fórmula que genera la lista inicial debe ser una función de grado 4 ya que fueron necesarias 4 listas de diferencias para tener constantes.

Existe una fórmula descubierta por Isaac Newton, que es aplicable en todos los casos, independientemente del número de listas de la tabla. Esta fórmula no la vamos a ver aquí, pero si el lector está interesado, en la bibliografía de este trabajo se da un libro de Martin Gardner en donde se puede consultar lo mas elemental de ésto.

Una vez que hemos aplicado la fórmula de Newton a nuestro caso particular, resulta que la fórmula que genera la lista correspondiente al número de regiones en que queda dividido el círculo, es:

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2x3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2x3x4}$$ $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2$

Que podemos comprobar que efectivamente es un polinomio de 4o.grado, y podemos comprobar que para los 8 casos que hemos hecho, la fórmula coincide. Faltaría demostrar que es válida para todos los números naturales. Como suele hacerse, se lo dejamos al lector.

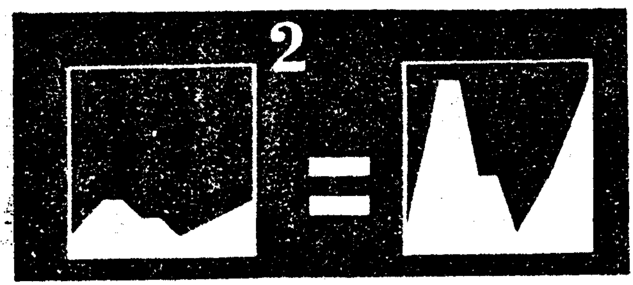
$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2}$

$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$

NOTA. Por el "método" de quedársele viendo a la lista original una, y otra, y otra vez, se obtuvo la siguiente fórmula que también funciona para los 8 primeros casos y coincide en ellos con la que se obtuvo con la fórmula de Newton:

$$(n-3)T_1 + (n-4)T_2 + \ldots + (n-n+1)T_{n-3} + T_{n-1} + 1$$

Donde T_i es el i'ésimo número triangular. De nuevo, queda como ejercicio demostrar que ambas son válidas.



INDUCCION MATEMATICA.

Una forma de trabajar los problemas que hemos utilizado reiteradamente en el capítulo anterior ha sido la siguiente:

Al resolver un problema que se nos plantea para un número natural arbitrario n, analizamos primero el problema para valores pequeños de n y a partir de los resultados obtenemos una hipótesis para el resultado general. En ocasiones hemos podido demostrar esta hipótesis en general de manera directa (por ejemplo en el problema del Pin Pon). En otras se ha podido demostrar la hipótesis viendo que nuestra hipótesis es válida para los primeros valores de n y que la "regla de crecimiento" de nuesta hipótesis corresponde a la del resultado que se busca (por ejemplo para demostrar que el número de subconjuntos de un conjunto es 2^n observamos que ésto era válido para n=0,1 y que la "regla de crecimiento" del número de subconjuntos y de nuestra fórmula eran el mismo -"multiplicar por 2"-). De aquí concluimos que la fórmula era válida para todo natural n.

Durante todo el primer capítulo, hemos venido trabajando de estas dos maneras a la hora de demostrar una hipótesis. El primer método, es el que busca los "porqué's" de la fórmula obtenida, que busca razonamientos generales que nos ayuden a demostrar la hipótesis del problema, de modo que siguiendo esta manera de demostrar una hipótesis, lo que podemos generalizar es que debemos comprender lo mejor posible el problema concreto y buscar todos los"porqué's" que podamos, debemos tratar de explicarnos en el problema mismo todas y cada una de las abstracciones y generalizaciones que hagamos, debemos buscar muchos caminos y formas diferentes de resolver un problema. El segundo método, el que a partir de casos particulares obtenemos una hipótesis la cual se puede demostrar gracias a la propiedad que tienen los naturales de que dado un número natural siempre podemos saber cuál es el siguiente, ha llevado a la conclusión de que ya que aparece en tantos problemas relacionados con los números naturales y que aparece tantas veces, bien vale la pena "abstraer" ese método de todos estos problemas y establecer un Principio General que permita avanzar y comprender mas firmemente, en general que lo que se está haciendo es válido para toda n.

Recordemos un poco qué hacíamos en el capítulo anterior en muchos de los ejemplos. Formábamos una tabla con los casos particulares que íbamos comprobando "a pie", de modo que si descubríamos una fórmula, la manera de demostrar que era válida siempre era comprobar que funcionaba para los casos particulares que ya teníamos y luego descubrir cómo era el cambio de renglón a renglón en general, es decir: Se tienen 2 listas de números (2 funciones), si podemos comprobar que empiezan igual, es decir, que $f(1)=g(1)$ (si las funciones son f y g), y además que si en algún renglón son iguales entonces también son iguales en el siguiente renglón, se puede concluir que las 2 listas (funciones) siempre serán iguales.

Veamos un ejemplo.

Decíamos que:

$$C_n^3 = T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

Porque viendo la tabla, éstas comienzan igual, o sea:

n	C_n^3	$T_1+T_2+\ldots+T_{n-2}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
3	$C_3^3 = 1$	$T_1 = 1$	$\frac{3(2)(1)}{6} = 1$
4	$C_4^3 = 4$	$T_1+T_2 = 1+3 = 4$	$\frac{4(3)(2)}{6} = 4$
5	$C_5^3 = 10$	$T_1+T_2+T_3 = 1+3+6 = 10$	$\frac{5(4)(3)}{6} = 10$

Y además si suponemos que coinciden en el renglón k-2 tenemos en la tabla:

$$k \qquad C_k 3 = 1+3+6+\ldots+T_{k-2} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

Tenemos que ver que para el renglón k-1 también coinciden, es decir, que la modificación entre renglón y renglón en cualquiera de las 3 columnas es la misma, o sea:

$$C_{k+1}^3 - C_k^3 = (1+3+\ldots+T_{k-2}+T_{k-1}) - (1+3+\ldots+T_{k-2}) = \frac{(k+1)(k)(k-1)}{6} - \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

Y ya habíamos visto en el capítulo anterior que:

$$C_{k+1}^3 - C_k^3 = \frac{k(k-1)}{2} = T_{k-1}$$

Y que

$$(1+3+\ldots+T_{k-2}+T_{k-1}) - (1+3+\ldots+T_{k-2}) = T_{k-1}$$

Y también que

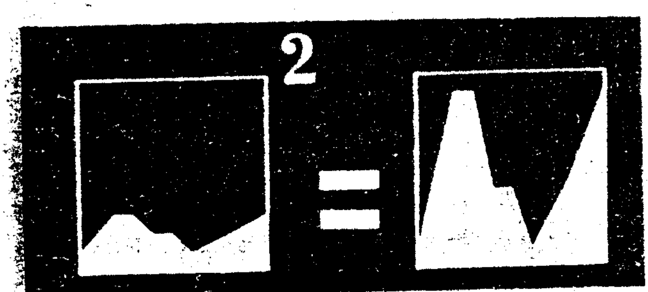
$$\frac{(k+1)(k)(k-1)}{6} - \frac{k(k-1)(k-2)}{6} = \frac{k(k-1)(k+1-k+2)}{6} =$$

$$\frac{k(k-1)3}{6} = \frac{k(k-1)}{2} = T_{k-1}$$

$\frac{k(k+1)}{2}$

Por lo que como las 3 listas comienzan igual y el cambio de renglón a renglón en cualquiera de las 3 es el mismo, se demuestra que las 3 son iguales siempre.

Podemos ahora establecer el Principio General que hemos venido usando y que nos permitirá demostrar en general muchas proposiciones que involucran a los números naturales, este es el llamado Principio de Inducción Matemática.



I - PRINCIPIO DE INDUCCION.

Si A es un subconjunto del conjunto de números naturales que cumple:

1) 1 está en A, y

2) Si un número natural k está en A, también k+1 está en A,

Entonces A es el conjunto de todos los números naturales.

También se formula este Principio General de la siguiente manera:

II - PRINCIPIO DE INDUCCION.

Una proposición se cumple para todo número natural n si se satisfacen las condiciones siguientes:

1)La proposición se cumple para n=1.

2)La veracidad de la proposición para cualquier número n=k implica su veracidad para el número natural siguiente n=k+1.

El mismo principio podemos enunciarlo también como:

III- PRINCIPIO DEL BUEN ORDEN.

Si A es un subconjunto del conjunto de números naturales y A no es vacío, entonces A tiene un primer elemento.

Y también lo hemos usado como:

IV- PRINCIPIO DEL "DESCENSO INFINITO".

No existe una sucesión infinita n1, n2, n3, ... de números naturales tales que n1 > n2 > n3 > ...

Observación. Nótese que los 4 principios son en realidad el mismo. Puede demostrarse la equivalencia entre los 4 de una manera lógica. Aquí, no queremos desviarnos por ese terreno, queremos simplemente hacer hincapié en que la importancia del principio de inducción (en cualquiera de sus formas) reside en que caracteriza a los números naturales. Notemos que otros conjuntos numéricos como **Z**, **Q** y **R** no cumplen con estos principios, el orden en ellos es diferente. El conjunto de los números naturales responde totalmente a nuestra intuición en cuanto al orden que tienen. De manera que los 4 principios que hemos enunciado, no son mas que distintas formas de decir lo mismo, distintas formas de caracterizar el orden de los naturales.

Veamos algunos ejemplos mas.

Si un quebrado tiene factores comunes en el denominador y el numerador, existe un proceso de dividir ambos hasta llegar a uno que ya no tiene factores comunes.

Ejemplo: $$\frac{36\ 000\ 000}{96\ 000\ 000} = \frac{3\ 600\ 000}{9\ 600\ 000} = \ldots = \frac{36}{96} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

entonces 3/8 es el primer elemento que representa al mismo racional.

Este es un ejemplo de un proceso descendiente (finito) que es muy usado implícitamente desde la educación primaria.

Otro ejemplo:

$n! = 1x2x3x4x...xn$

Podemos obtener el factorial de cualquier número natural mediante multiplicar los números naturales de uno en uno hasta llegar al número deseado.

El factorial de un número está bien definido, siempre tiene primer elemento esta definición y siempre sabemos cuál es el siguiente, es decir:

Definimos el factorial de un número natural como:

$1! = 1$ y $(k+1)! = (k!)(k+1)$

entonces podemos conocer cualquier número factorial, o sea:

$2! = 1!(2) = 1x2 = 2$

$3! = 2!(3) = 2x3 = 6$

$4! = 3!(4) = 6x4 = 24$

.

.

.

Se puede obtener cualquier factorial mediante ir construyendo uno por uno.

Si para cada número natural se tiene una proposición, podemos obtener cuál es el conjunto de números naturales para los cuales se cumple la proposición. Por ejemplo:

PROBLEMA.

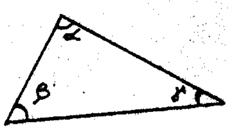
Dado un polígono(*) se trata de polígonos convexos, ver nota al pie en el problema del número de diagonales de un polígono.de n lados, ¿cuál es la suma de sus ángulos internos?

Veamos casos particulares para obtener alguna proposición que demostrar.

Si n=1 no hay polígono; si n=2 tampoco existe un polígono con 2 lados, pero si n=3 el polígono convexo de 3 lados es el triángulo y ya tenemos un resultado previo que nos da la información que necesitamos; esto es, sabemos que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

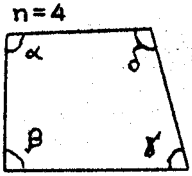
Si n=4, el polígono es un cuadrilátero que podemos dividir en 2 triángulos y así, por la información del caso anterior, tenemos que la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360°.

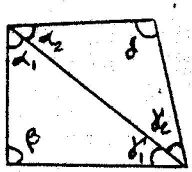
n=3



$$\alpha + \beta + \Gamma = 180°$$

n=4





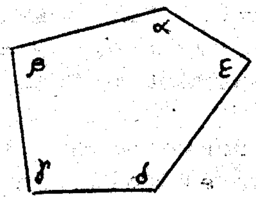
$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ y $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

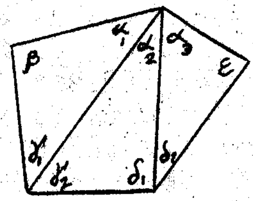
Y por el caso n=3 sabemos que $\alpha_1 + \beta + \Gamma_1 = 180°$ y que $\alpha_2 + \Gamma_2 + \delta = 180°$ por lo que

$$\alpha+\beta+\Gamma+\delta = (\alpha_1+\alpha_2) + \beta + (\Gamma_1+\Gamma_2) + \delta = (\alpha_1+\beta+\Gamma_1)+(\alpha_2+\Gamma_2+\delta) =$$
$$180° + 180° = 2(180°) = 360°$$

(*) De nuevo, se trata de polígonos convexos. Ver nota al pie en el problema del número de diagonales de un polígono.

para n=5 tenemos:





queremos encontrar cuanto es la suma $\alpha + \beta + \Gamma + \delta + \sigma$ y de nuevo formemos triángulos donde tenemos:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \;, \quad \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad \text{y} \quad \delta = \delta_1 + \delta_2$$

y como ya sabemos el resultado para n=3 tenemos:

$$\alpha_1 + \beta + \Gamma_1 = 180°$$
$$\alpha_2 + \Gamma_2 + \delta_1 = 180°$$
$$\alpha_3 + \delta_2 + \sigma = 180° \quad \text{entonces}$$

$$\alpha + \beta + \Gamma + \delta + \sigma = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \beta + (\Gamma_1 + \Gamma_2) + (\delta_1 + \delta_2) + \sigma =$$
$$(\alpha_1 + \beta + \Gamma_1) + (\alpha_2 + \Gamma_2 + \delta_1) + (\alpha_3 + \delta_2 + \sigma) =$$
$$180° + 180° + 180° = 3(180°) = 540°$$

Podemos observar entonces que cada vez que aumentamos un lado, en los términos del problema, aumentamos un triángulo. También observemos que en general dado un polígono convexo de n lados podemos dividirlo en n-2 triángulos (ejercicio para el lector, demostrarlo) y ya sabemos cuánto suman los ángulos internos de un triángulo, por lo que la formulita que ya se antoja proponer es la $(n-2)180°$ o sea, la proposición siguiente:

Proposición. La suma de los ángulos internos de un polígono convexo de n lados es $(n-2)180°$.

Observación. Esta proposición, no tiene sentido para n=1 y n=2, por lo que para demostrarla vamos a cambiar un poco la proposición.

Proposición. En un polígono convexo de n+2 lados, la suma de sus ángulos internos es $n(180°)$.

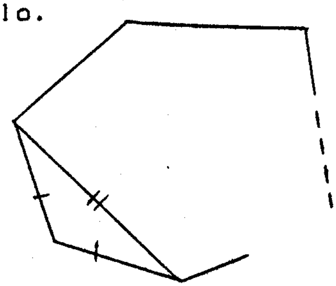
Demostración:

Sea A el conjunto de números naturales para los cuales se cumple la afirmación.

El 1 está en A ya que un polígono de 1+2 = 3 lados es un triángulo y en éste sucede que la suma de sus ángulos internos es $180° = (1)180°$.

Hipótesis de Inducción. Consideremos que la afirmación es verdadera para n=k. Esto es, dado un polígono convexo de k+2 lados, la suma de sus ángulos internos es (k)180° . Debemos demostrar que para n=k+1 también es cierta la afirmación.

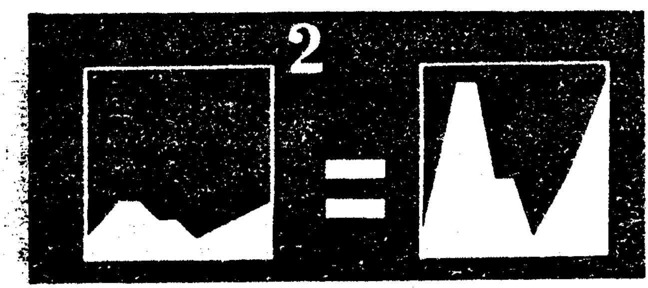
Consideremos un polígono convexo de k+3 lados, tomemos 3 vértices consecutivos, el polígono convexo de k+3 lados se descompone en un polígono convexo de k+2 lados y un triángulo.



Entonces, por hipótesis para un polígono de k+2 lados la afirmación es verdadera, la suma de los ángulos internos de éste es k(180°) y al agregarle la suma de los ángulos internos del triángulo que falta, tenemos $k(180°) + 180° = (k+1)180°$.

La suma de los ángulos internos de un polígono convexo de k+3 lados es:

$(k+3-2)(180°) = (k+1)180°$ por lo que k+1 también está en A. Y por lo tanto A son todos los números naturales. Y con ésto queda demostrada la afirmación para todo número natural.



PROPOSICION.

Todos los triángulos tienen la misma área.

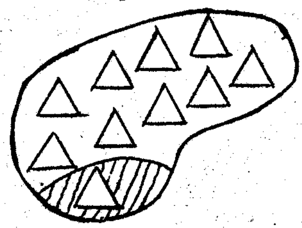
Demostración por inducción:

Tenemos la proposición: "si tenemos un conjunto de n triángulos, todos ellos tienen la misma área".

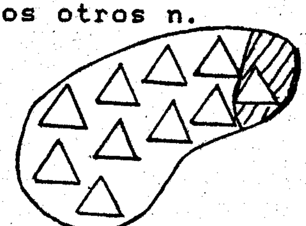
Tomemos un triángulo de ese conjunto y resulta que para ese triángulo es cierta la proposición, ya que es un único triángulo y por lo tanto en un conjunto con un triángulo, todos tienen la misma área.

Tomemos un conjunto con n triángulos y supongamos que todos ellos tienen la misma área.

Tomemos ahora un conjunto con n+1 triángulos y tenemos que demostrar que en éste también todos tienen la misma área.



Tomemos n+1 triángulos y apartemos uno de ellos. Tenemos un conjunto con n triángulos y en éste, por hipótesis todos tienen la misma área. Después regresamos el triángulo que se había apartado y se aparta ahora otro triángulo de los otros n.



Por hipótesis, los n triángulos tienen la misma área, por lo tanto la proposición para n+1 triángulos es cierta, esto es:

Dado un conjunto con n+1 triángulos todos tienen la misma área.

O sea a partir de que la proposición es cierta para n triángulos se demostró que también es verdadera para n+1 triángulos.

Obviamente esta es una proposición que no es verdadera ya que basta con dar 2 triángulos que no tengan la misma área para darnos cuenta de su falsedad. Pero ¿dónde está el problema en la demostración?.

Parece que el problema está en suponer que los dos conjuntos que obtenemos con n elementos cada uno al apartar un triángulo, tienen alguna intersección, esto es, suponemos que tienen elementos comunes; sin embargo, para n=2 se ve que los conjuntos son ajenos y no se puede decir nada sobre ellos. O sea que si Pi es la proposición para i triángulos lo que estamos observando es que $P_1 \not\Rightarrow P_2$.

Otro problema es que el conjunto en cuestión en general solo tiene un elemento. Sea $Z=\{n \mid Pn \text{ es cierta}\}$ lo que pasa es que $Z = \{1\}$.

Vamos a escribir ahora de otra manera la demostración y veamos si ahora queda más clara la trampa.

Demostración:

Sea A un conjunto con n+1 triángulos.

Sea $t_1 \in A$ y sea $B_1 = A - \{t_1\}$

Sea $t_2 \in A$, $t_2 \neq t_1$ y sea $B_2 = A - \{t_2\}$

Hipótesis de inducción. Todos los triángulos en B_1 tienen la misma área. Y también todos los tiángulos de B_2 tienen la misma área.

Sea $t \in (B_1 \cap B_2)$

área (t_1) = área (t) porque $t \in B_2$ y

área (t_2) = área (t) porque $t \in B_1$ por lo tanto

área (t_1) = área (t_2) = área (t)

Pero si no existe t tal que $t \in (B_1 \cap B_2)$ no podemos decir nada.

El problema está en que no siempre sucede que la intersección de B_1 con B_2 sea distinta del vacío y nosotros escribimos la demostración implícitamente como si siempre sucediera esto.

Entonces en general debemos tener claro todos y cada uno de los argumentos en una demostración y debemos pensar en ellos lo mas general posible, es decir, tenemos que pensar en todas las posibilidades que tengamos y para ellas, demostrarlo.

PROBLEMA.

Todo número natural es igual a su "sucesor".

La proposición la podemos escribir como:

Todo número natural k es igual al número $k+1$.

Demostración:

Suponemos que $k = k+1$ por lo tanto

$k+1 = k+1+1 = k+2$

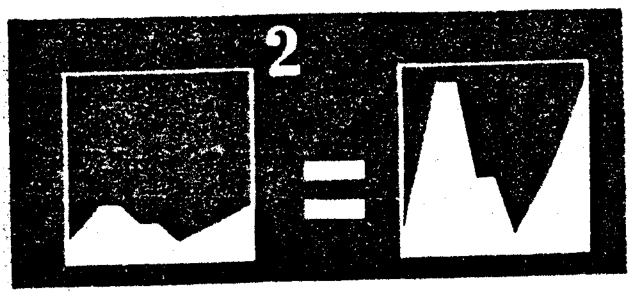
o sea $k+1 = k+2$

De donde se tiene el siguiente

Corolario. Todos los números naturales son iguales.

Vemos pues que el error está en no tomar en cuenta todo el principio de inducción. Es por este tipo de errores, que al llevar a cabo una demostración debemos tener cuidado de no omitir ninguna de las 2 condiciones mencionadas en el Principio de Inducción Matemática.

Ahora haremos algunos problemas para familiarizarnos más con el método de la inducción matemática.



PROBLEMA.

Calcular la suma de los n primeros números naturales.

Este es un problema que ya hemos trabajado mucho en el capítulo anterior, incluso ya hemos demostrado por varios caminos cuánto vale esta suma, ahora solo lo demostraremos por Inducción para ilustrar una demostración por este método.

Proposición. La suma de los n primeros números naturales es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$

Demostración:

i) Para n=1

Tenemos que sumar hasta el natural 1 y esto da por resultado 1 que es lo mismo que $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1(2)}{2} = 1$

Por lo tanto la proposición es verdadera para n=1.

ii)Hipótesis de Inducción.

Suponemos que la proposición es verdadera n=k ,esto es:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Debemos demostrar que la proposición es verdadera para n=k+1, esto es:

Por Demostrar que

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \qquad (1)$$

Demostración:

Sabemos por hipótesis cuanto vale la suma hasta el natural número k, entonces

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = [1+2+3+\ldots+k] + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Que es lo que queríamos demostrar en (1). Por lo tanto la proposición también es cierta para n=k+1 y con esto queda demostrado que la proposición es verdadera para todos los números naturales. O sea:

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo n en los naturales.

PROBLEMA.

Demostrar por inducción:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = [n(n+1)/2]^2$

Este es un problema que también hemos visto antes, pero ahora lo demostraremos por el método de la inducción matemática.

Demostración:

i) para $n=1$

$1^3 = 1$ que por otro lado es $[1(1+1)/2]^2 = 1$ por tanto la proposición es válida para $n=1$.

ii) Hipótesis de Inducción

para $n=k$ la proposición es verdadera, o sea:

$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = [k(k+1)/2]^2$

Debemos demostrar que es válida también para $n=k+1$, es decir, Por Demostrar :

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (k+1)^3 = [(k+1)(k+2)/2]^2 \qquad (1)$$

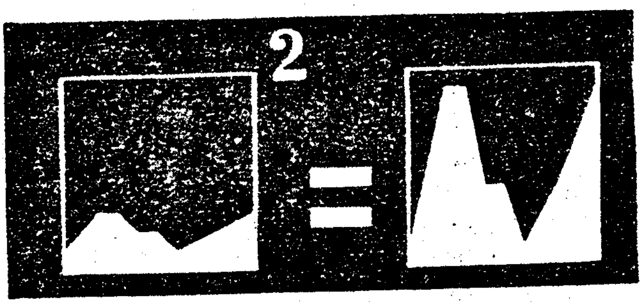
demostración:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = [1^3 + 2^3 + \ldots + k^3] + (k+1)^3 = [k(k+1)/2]^2 + (k+1)^3 =$$

$$[k(k+1)/2]^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2[k^2/4 + (k+1)] = (k+1)^2[(k^2+4k+4)/4] = [(k+1)^2(k+2)2/4] = [(k+1)(k+2)/2]^2$$

que es lo que queríamos demostrar en (1).

Por lo demostrado en i) y en ii), la proposición es cierta para todos los números naturales.



EJERCICIOS.

1 .- Demostrar por inducción matemática:

$$(n)1 + (n-1)2 + \dots + 2(n-1) + 1(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

2 .- Demostrar por inducción que:

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

3 .- Demostrar:

$$(1+1/1)(1+1/2)(1+1/3)\dots(1+1/n) = n+1$$

4 .- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 > 0$ a menos que $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ para toda n en los naturales y toda x en los números reales.

5 .- Para toda n en los números naturales con $n>1$ demostrar:

$$1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \dots + 1/\sqrt{n} > \sqrt{n}$$

6 .- Demostrar que la media geométrica de un número finito de números positivos no es mayor que su media aritmética; es decir, para cualesquiera números positivos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$;

$$\sqrt{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{n}$$

7 .- Demostrar que la fórmula obtenida en el problema de la "Torre de Hanoi" (del capítulo anterior), es cierta para todos los números naturales.

8 .- Demostrar que n rectas en el plano no pueden dividir a este en más de 2^n regiones ajenas.

9 .- Demostrar que $2n-1$ es un impar para todo numero n en los naturales.

10.- Con base en el problema del Pin Pon, que vimos en el capitulo uno y retomamos al final ese mismo capitulo, demostrar conceptualmente la siguiente:

Proposición. Si N es el número de jugadores inscritos y $2^k < N \leq 2^{k+1}$ entonces el número de rondas es $k+1$.

(Esto se nota en los ejemplos que hicimos y es muy fácil de comprender si N es una potencia de 2, en particular. Se sugiere demostrarlo mediante la descomposición de N como: $N = 2^k + x$ con $x < 2^k$)

11.- Demostrar por inducción que el número de rondas que se efectuan en el problema del Pin Pon (primer problema de este trabajo) es m, donde $2^{m-1} < N \leq 2^m$ y N es el número de jugadores inscritos al torneo.

12.- Probar que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \qquad x \neq 1$$

13.- Probar que

$$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

14.- Probar que

$$1.1! + 2.2! + 3.3! + \ldots + n.n! = (n+1)! - 1$$

15.- Probar que el producto de 3 números naturales consecutivos es divisible por 6.

16.- Observe que:

$1^2 = 1$

$3^2 = 2 + 3 + 4$

$5^2 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$

$7^2 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

$9^2 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13$

Demostrar que todo cuadrado impar $(2n+1)^2$ es igual a la suma de n enteros consecutivos del n+1.

17.- Un número natural es "travieso" si su representación en el sistema binario contiene una cantidad par de cifras "uno". Así, por ejemplo, los numeros:

$0 = 0_2$, $3 = 11_2$, $5 = 101_2$, $6 = 110_2$ y $15 = 1111_2$

son numeros traviesos.

Probar que:

a) $2^n + 1$ es travieso para toda n en los naturales.

b) $2^{2n} - 1$ es travieso para toda n en los naturales.

18.- Encontrar la suma de los primeros 1988 números traviesos.

19.- Demostrar por inducción matemática que el número de subconjuntos de un conjunto con N elementos es 2^N.

C A P I T U L O   III

COMBINATORIA

Cuando vimos el problema del Pin Pon, encontramos una manera de contar el número de parejas de un conjunto con n elementos. Cuando vimos el problema de las ternas, encontramos una manera de contar el número de ternas no ordenadas de un conjunto con n elementos. Si siguiéramos de esta forma, podemos preguntarnos si existe alguna manera de saber cuántas "cuartetas" tiene un conjunto con n elementos, o cuantos subconjuntos de 4 elementos tiene un conjunto de n elementos. Es más, podemos preguntarnos mas en general, ¿Cuál es número de subconjuntos de k elementos que tiene un conjunto con n elementos? Para responder a esta última pregunta vamos a proceder, como antes, viendo uno a uno los casos particulares.

Por ejemplo si $k=1$ necesitamos calcular el número de subconjuntos con 1 elemento de un conjunto de n elementos y esto es fácil de responder ya que existe un subconjunto de un elemento para cada uno de los n elementos del conjunto. Por lo tanto hay n subconjuntos con un elemento en un conjunto de n elementos.

Si $k=2$ la pregunta es ¿cuántos subconjuntos de 2 elementos tiene un conjunto de n elementos? Notemos que esta es la misma pregunta que ya contestamos en el problema del Pin Pon, ya que cuando contamos el número de parejas no ordenadas, contamos también los subconjuntos de 2 elementos. Incluso ya le habíamos dado un nombre al número de parejas de un conjunto de n elementos; habíamos hecho la convención de llamarle C_n^2 y por varios caminos sabíamos que $C_n^2 = (n(n-1))/2$ (ver capítulo de Problemas, Problemas y mas Problemas).

Si $k=3$ la pregunta es ¿cuál es el número de subconjuntos con 3 elementos de un conjunto con n elementos? También esta pregunta ya la habíamos respondido cuando hicimos el problema de las ternas. De nuevo notemos que es lo mismo contar ternas que subconjuntos con tres elementos. Ahora si vamos a recordar un poco cómo fué que analizamos el problema para encontrar que el número que buscamos es $C_n^3 = (n(n-1)(n-2))/6$.

Veamos qué hacíamos. Quitamos un elemento del conjunto y formamos un conjunto con n-1 elementos, de este último hacemos una lista de las parejas que podemos hacer con él y cada una de estas parejas la combinamos con el elemento que habíamos quitado por lo que tenemos así $((n-1)(n-2))/2$ ternas distintas en donde siempre aparece el elemento que habíamos quitado. Pero podíamos haber quitado al principio, cualquiera de los n elementos, por lo que hay $((n-1)(n-2))/2$ ternas por cada elemento, entonces tenemos en total $(n(n-1)(n-2))/2$ ternas. Pero de éstas hay que quitar las que se repiten y analizándolo, tenemos: Por ejemplo para la terna **abc**, formada de la pareja **ab** y agregándole **c**, hay 2 ternas más que son iguales a ella y éstas son la **bca** (que la contamos cuando al principio se quitó a **a**) y la terna **acb** (que contamos cuando quitamos al principio a **b**). Por lo tanto estamos contando 3 veces cada terna, entonces debemos dividir entre 3 para tener exactamente el número de ternas de un conjunto de n elementos que es:

$$(n(n-1)(n-2)/2)/3 = n(n-1)(n-2) / 6$$

Que era lo que buscábamos.

Ahora veamos cuántos subconjuntos con 4 elementos tiene un conjunto de n elementos.

Como en el caso anterior, quitemos del conjunto con n elementos, uno de sus elementos, ahora con el nuevo conjunto de n-1 elementos formemos las ternas, que ya sabemos que son $C_{n-1}{}^{3} = ((n-1)(n-2)(n-3)) / 6$ y hagamos una lista con ellas. Ahora a esta lista le agregamos el elemento que habíamos quitado, por lo que tenemos una lista de $((n-1)(n-2)(n-3))/6$ subconjuntos con 4 elementos, en donde cada uno de ellos contiene al elemento que habíamos quitado. Pero todo esto podemos hacerlo para cada uno de los n elementos del conjunto por lo que se tienen en total:

$(n(n-1)(n-2)(n-3))/6$ subconjuntos con 4 elementos; ¡ pero de nuevo estamos repitiéndo muchos subconjuntos ! Contemos ahora cuántas son las repeticiones.

Por ejemplo si queremos contar los subconjuntos de 4 elementos del conjunto {a,b,c,d,e}.

Quitemos el elemento e y tenemos que las ternas del conjunto (a,b,c,d) son: [illegible] que siguen:

abc, abd, bcd, y acd [illegible] les agregamos el elemento e y tenemos los subconjuntos siguientes:

(a,b,c, e), (a,b,d, e), (b,c,d, e) y (a,c,d, e)

Ahora quitemos el elemento d y tenemos que las ternas de (a, b, c, e) son:

abc, abe, bce y ace agregandoles d tenemos los cuatro subconjuntos siguientes:

(a,b,c, d), (a,b,e, d), (b,c,e, d) y (a,c,e, d)

Quitando ahora al elemento c tenemos: las ternas de (a, b, d, e) son abd, abe, bde y ade y los subconjuntos de 4 elementos son:

(a,b,d, c), (a,b,e, c), (b,d,e, c) y (a,d,e, c)

Ahora quitando al elemento b; las ternas de (a,c,d,e) son:

acd ,ace, cde, y ade y los subconjuntos de 4 elementos son:

(a,c,d, b), (a,c,e, b), (c,d,e, b) y (a,d,e, b)

Por último quitando al elemento a tenemos:

(b, c, d, e) cuyas ternas son: bcd, bce, cde y bde por lo que los subconjuntos de 4 elementos son:

(b,c,d, a),(b,c,e, a), (c,d,e, a) y (b,d,e, a)

Tenemos que son 4 subconjuntos con 4 elementos por cada uno de los elementos del conjunto original, entonces son 4x5 = 20 subconjuntos, Veamos ahora las repeticiones:

El (a,b,c, e) se repite en (a,b,e, c), (a,c,e, b) y en (b,c,e, a)

El (a,b,d, e) se repite en (a,b,e, d), (a,d,e, b) y en (b,d,e, a)

El (b,c,d, e) se repite en (b,c,e, d), (b,d,e, c) y en (c,d,e, b)

El (a,c,d, e) se repite en (a,c,e, d), (a,d,e, c) y en (c,d,e, a)

El (a,b,c, d) se repite en (a,b,d, c), (a,c,d, b) y en (b,c,d, a)

Por lo que en este caso debemos dividir entre 4 la cuenta que habíamos obtenido; esto es, el número de subconjuntos de 4 elementos de un conjunto con 5 elementos es (4x5)/4 = 5.

En general las repeticiones son: por ejemplo para la "cuarteta" {a,b,c, n} se tienen las repeticiones {a,b,n, c}, {a,c,n, b} y {b,c,n, a} (y solo esas repeticiones ya que estamos partiendo de ternas no ordenadas). Por lo que el número de subconjuntos con 4 elementos de un conjunto con n elementos es:

$$(n)(n-1)(n-2)(n-3)/(6x4)=(n)(n-1)(n-2)(n-3)/(2x3x4)$$

Veámoslo de otra forma. Llamemos $C_n{}^4$ al número de subconjuntos de 4 elementos de un conjunto con n elementos. Lo que queremos demostrar es que:

$$C_n{}^4 = (n)(n-1)(n-2)(n-3)/(2x3x4)$$

Si n=4 es claro que solo existe un subconjunto de 4 elementos que es el conjunto mismo. Y en la fórmula tenemos:

$C_4{}^4$ = (4)(3)(2)(1)/(2x3x4) = 1 , lo cual muestra que en este caso particular es cierta.

Ahora si n=5 tenemos que el número de subconjuntos de 4 elementos, ya sabemos, es 5; y en la fórmula tenemos:

$C_5{}^4$ = (5)(4)(3)(2)/(2x3x4) = 5 , que también funciona en este caso.

Si suponemos que la fórmula es cierta cuando n=k, debemos demostrar que para n=k+1 también es válida.

Nuestra hipótesis es $C_k{}^4=(k)(k-1)(k-2)(k-3)/(2x3x4)$

Notemos que todos los subconjuntos de un conjunto con k elementos también son subconjuntos de un conjunto con k+1 elementos cuando se le agrega un elemento mas al conjunto original. Esto es, los subconjuntos de 4 elementos de un conjunto con k+1 elementos son todos los subconjuntos de 4 elementos de un conjunto con k elementos más los subconjuntos de 3 elementos de un conjunto con k elementos. Es decir, si tenemos el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ y queremos contar los subconjuntos de 4 elementos, podemos contar los subconjuntos de 4 elementos de $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, que serán los subconjuntos en que no aparece el elemento

a_{k+1}, y sumarle todos los subconjuntos de 4 elementos en que sí aparece a_{k+1}, que serán todas las ternas del conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. O sea:

$$C_{k+1}^4 = C_k^4 + C_k^3$$

Ya habíamos observado antes esta construcción, en el problema de sumar números triangulares por ejemplo.

Por lo tanto para obtener C_{k+1}^4 podemos hacer uso de esta igualdad y tenemos:

$$C_{k+1}^4 = C_k^4 + C_k^3 = (k)(k-1)(k-2)(k-3)/(2x3x4) + (k)(k-1)(k-2)/(2x3) =$$

$$[(k)(k-1)(k-2)(k-3) + (4k)(k-1)(k-2)]/(2x3x4) =$$

$$(k)(k-1)(k-2)(k-3+4)/(2x3x4) =$$

$$(k+1)(k)(k-1)(K-2)/(2x3x4)$$

Que es la fórmula que buscábamos para $n=k+1$.

Así, lo que tenemos hasta ahora son las fórmulas para subconjuntos de 2, 3, y 4 elementos de un conjunto de n elementos. Ahora para subconjuntos de 5 elementos tenemos:

Llamemos C_n^5 el número de subconjuntos de 5 elementos de un conjunto con n elementos. Entonces estamos buscando una fórmula para encontrar C_n^5. De nuevo, empecemos con n's pequeñas para contarlos uno por uno. Por ejemplo si n=5 tenemos:

$C_5^5 = 1$ ya que de un conjunto con 5 elementos solo podemos formar 1 subconjunto con 5 elementos.

Si n=6

De nuevo por la observación que ya hemos hecho antes:

$C_6^5 = C_5^5 + C_5^4$ y ya sabemos calcularlas, por lo que

$$C_6^5 = 1 + (5)(4)(3)(2)/(2x3x4) = 1 + 5 = 6$$

Si n=7

$$C_7^5 = C_6^5 + C_6^4 = 6 + (6)(5)(4)(3)/(2x3x4) = 6+15 = 21$$

Pero ¿cuál será una fórmula general para C_n^5 ?

Siguiéndo el procedimiento que hacíamos antes, hacemos una lista de los C_{n-1}^4 subconjuntos de 4 elementos y a esta lista le agregamos un elemento en cada conjunto con lo que por cada elemento del conjunto original se tienen C_{n-1}^4 conjuntos de 5 elementos de donde tenemos $n(C_{n-1}^4)$ conjuntos de 5 elementos, pero debemos descontar las repeticiones que son:

Por ejemplo la quinteta (a,b,c,d,n) se repite en las quintetas: (a,b,c,n,d), (a,b,d,n,c), (a,c,d,n,b) y (b,c,d,n,a), (Como antes, hacemos la aclaración de que solo son esas repeticiones ya que estamos partiendo de cuartetas no ordenadas y entonces no pueden aparecer, por ejemplo, la quinteta (a,b,n,c,d) en las repeticiones porque querría decir que las cuartetas (a,b,c,n) y (a,b,n,c) son diferentes). Entonces el número de cuartetas multiplicado por n elementos, hay que dividirlo entre 5 repeticiones de cada uno. O sea:

$$C_n^5 = \frac{nC_{n-1}^4}{5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5x4x3x2}$$

Otra manera de contar las repeticiones para una quinteta dada es la siguiente:

Dado el conjunto {a,b,c,d} podemos agregar n (un elemento más) en cualquiera de las 5 posiciones siguientes:
{a,b,c,d,n}, {a,b,c,n,d}, {a,b,n,c,d}, {a,n,b,c,d} ó {n,a,b,c,d} por lo tanto, para cada conjunto de 5 elementos que tengamos hay 5 repeticiones, entonces tenemos de nuevo que:

$$C_n^5 = (n)(C_{n-1}^4)/5 = (n)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)/(2x3x4x5)$$

Y en general podemos decir que $C_n^k = (n)(C_{n-1}^{k-1})/k$ donde $(n)(C_{n-1}^{k-1})$ son los subconjuntos de k elementos en donde todavía hay muchas repeticiones y k son el número de repeticiones que hay en cada uno de ellos. Esto es, dado el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$ hay k distintos lugares en donde agregar el k'ésimo elemento, que producen el mismo conjunto, o sea:

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k1}\} = \ldots = \{a_k, a_1, \ldots, a_{k-1}\}.$$

Y como podemos ir substituyendo C_{n-1}^{k-1} tenemos en general la siguiente fórmula:

$$C_n^k = (n)(C_{n-1}^{k-1})/k = (n)(n-1)(C_{n-2}^{k-2})/(k)(k-1) =$$
$$(n)(n-1)(n-2)(C_{n-3}^{k-3})/(k)(k-1)(k-2) = \ldots =$$
$$(n)(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1)/[(k)(k-1)(k-2) \ldots \quad (2)$$

Veamoslo ahora de otra forma más y demostremos que esta fórmula es cierta siempre, es decir, hay que demostrar que para todo n en los números naturales sucede que:

$$C_n^k = (n)(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1) \;/\; (k)(k-1)(k-2) \ldots \quad (2)$$

Demostración por inducción en k.

Si $k=1$ queremos encontrar C_n^1 que ya sabemos que es n para cualquiera que sea n; y por la fórmula tenemos:

$C_n^1 = (n-1+1)/1 = n$ Por lo tanto es cierta la proposición para $k=1$

Hipótesis de Inducción: para $k=l$

$$C_n^l = (n)(n-1)(n-2)\ldots(n-l+1)/(l)(l-1)\ldots(3)(2)(1)$$

Por demostrar que para $k=l+1$ es cierta también la proposición.

Sabemos que $C_n^{l+1} = C_{n-1}^{l+1} + C_{n-1}^{l}$ entonces por la hipótesis de inducción tenemos:

$$C_n^{l+1} = [(n-1)(n-2)\ldots(n-l-1)/(l+1)(l)(l-1)\ldots(2)(1)]$$
$$+ [(n-1)(n-2)\ldots(n-l)/(l)(l-1)(l-2)\ldots(2)(1)] =$$
$$[(n-1)(n-2)\ldots(n-l-1)+(l+1)(n-1)(n-2)\ldots(n-l)]/$$
$$[(l+1)(l)(l-1)(l-2)\ldots(2)(1)] =$$
$$[(n-1)(n-2)\ldots(n-l)](l+1+n-l-1)/(l+1)(l)(l-1)\ldots(2)(1) =$$
$$[(n)(n-1)(n-2)\ldots(n-l)]/[(l+1)(l)(l-1)\ldots(2)(1)] =$$
$$[n(n-1)(n-2)\ldots(n-l+1-1)]/[(l+1)(l)(l-1)\ldots(2)(1)]$$

Que es lo que se quería demostrar.

De manera que ahora ya tenemos una fórmula para contar el número de subconjuntos de k elemento+s de un conjunto con n elementos y con ésta podemos responder a la pregunta de ¿cuántos subconjuntos tiene un conjunto con n elementos? que había quedado pendiente en el primer capítulo.

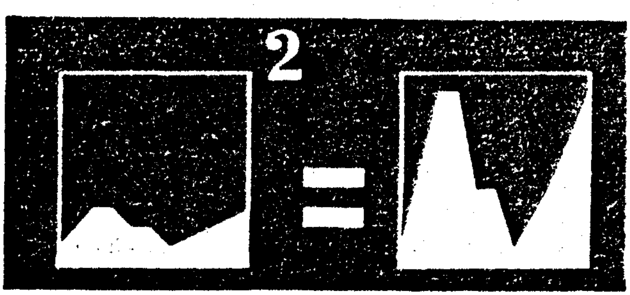
Ahora sí, la respuesta por este camino es:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n$$

Donde $C_n^0 = 1$ ya que es el subconjunto que no tiene elementos o sea el conjunto vacío.

Por lo que tenemos:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$



PROBLEMA.

Si por alguna razón nos interesara ahora el orden en que aparecen los elementos, ¿cuántas parejas podemos tener de un conjunto con n elementos?

Como nos interesa el orden, son diferentes las parejas (a,b) y la (b,a) de modo que por cada pareja que tengamos (de las que ya sabíamos contar) ahora tendremos 2 parejas distintas, esto es:

Si C_n^2 es el número de parejas no ordenadas, entonces $2C_n^2$ es el número de parejas ordenadas distintas que podemos tener, o sea:

$2C_n^2 = 2(n(n-1)/2 = n(n-1)$

Y si ahora nos preguntásemos el número de ternas ordenadas de un conjunto con n elementos, lo que hacemos es: como ya conocemos el número de ternas no ordenadas, ahora solo tenemos que buscar el orden, esto es:

Por ejemplo en un conjunto con 4 elementos sabemos que hay C_4^3 ternas no ordenadas y si queremos contar las ternas ordenadas de ese mismo conjunto, no debemos quitar las repeticiones que quitábamos cuando contamos C_n^3. De manera que si tenemos la terna no ordenada abc, tenemos las ternas ordenadas: acb, bac, cab, bca cba. Así, por cada terna no ordenada se tienen 6 ternas ordenadas distintas, por lo que el número de ternas ordenadas es $6(C_4^3) = 6[(4)(3)(2)/6] = 24$. Y en general el número de ternas no ordenadas de un conjunto con n elementos es $6(C_n^3) = n(n-1)(n-2)$, que es lo mismo si pensamos en el número de parejas ordenadas de un conjunto con n-1 elementos y las combinamos con cada uno de los elementos de un conjunto con n elementos, ya que (n-1)(n-2) son las parejas ordenadas de un conjunto con n-1 elementos y a cada una de ellas la vamos a juntar con uno de los n elementos del conjunto, por lo que el número de ternas ordenadas de un conjunto con n elementos es n(n-1)(n-2).

Ahora para encontrar el número de "cuartetas" ordenadas de un conjunto con n elementos, tenemos:

Ya sabemos el número de "cuartetas" no ordenadas, y sabemos también cuántas son las repeticiones de cada una (que ya contamos en el problema del principio de este capítulo), entonces el número que buscamos es:

$24(C_n^4) = 24[(n)(n-1)(n-2)(n-3)/(4x3x2)] = n(n-1)(n-2)(n-3)$

Si llamamos O_n^k al número de ordenaciones de k elementos tomados de un conjunto con n elementos, tenemos que lo que hemos encontrado hasta ahora es:

$O_n^2 = n(n-1)$, $O_n^3 = n(n-1)(n-2)$ y $O_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3)$

Que son las parejas ordenadas de un conjunto con n elementos, las ternas ordenadas de un conjunto con n elementos y las "cuartetas" ordenadas de un conjunto con n elementos, respectivamente.

Podemos conjeturar entonces que:

$O_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))$

Ahora debemos demostrar la conjetura para cualquier k en los números naturales.

Ya sabemos que si $k=2,3,4$ la fórmula es cierta, entonces debemos demostrar ahora que, si es verdadera para alguna k entonces es también verdadera para la siguiente, o sea que es cierta para k+1.

Tenemos por hipótesis que

$O_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))$.

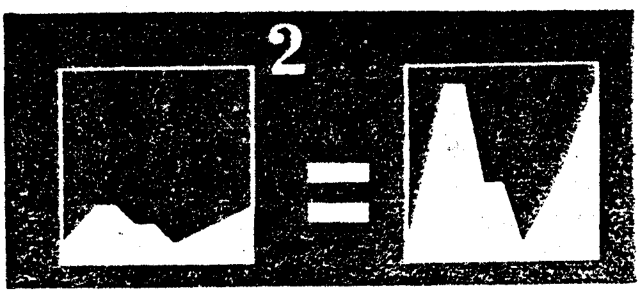
Tomamos una e esas ordenaciones y le adjuntamos uno de los n-k elementos que sobran en el conjunto y tenemos así una ordenación de k+1 elementos, esto lo podemos hacer con cada uno de los n-k elementos, y para cada una de las ordenaciones de k elementos tomados del conjunto con n elementos. Por lo que:

$O_n^{k+1} = O_n^k\ (n-k)=[n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))](n-k) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-[(k+1)-1])=n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))$

Que es a lo que queríamos llegar, por lo tanto es cierto que para toda k en los números naturales se tiene:

$O_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))$

Tenemos ya algunas fórmulas muy usadas en la Combinatoria y que nos ayudarán a resolver problemas cuyo comportamiento sea semejante a los que ya hemos resuelto. Esto es, existen problemas "tipo" para los cuales conviene tener una fórmula que nos ayude a avanzar en la resolución del problema, una vez que hemos analizado que su comportamiento es el mismo. Por ejemplo, ya hemos resuelto con todo detalle el problema de contar el número de ternas de un conjunto con n elementos, si por alguna razón, el procedimiento para resolver otro problema nos lleva a tener que contar C_n^3, ya no tenemos que volver a hacerlo "a pie", sino que ya podemos aplicar la fórmula que hemos demostrado que vale para cualquier valor de n en los números naturales. Lo mismo sucede con la fórmula de O_n^k, ya que existen muchos problemas que se resuelven de la misma manera y teniendo una fórmula general, podemos avanzar mucho mejor en los problemas de las matemáticas. Lo que debemos tener claro es que cuando querramos aplicar tal o cual fórmula para resolver un problema, debemos estar seguros de que el comportamiento del problema es totalmente equivalente al de aquél que generó la fórmula o aquél por medio del cual la descubrimos o bien a aquél que nos sirvió para demostrarla.



PROBLEMA

En un campeonato de fútbol participan 17 equipos. Los premios son medallas de oro, de plata y de cobre para los 3 primeros lugares. Suponiendo que no puede haber empates, ¿de cuántas formas distintas pueden ser distribuidas las medallas?

Representemos en un casillero los 3 lugares de los ganadores como sigue:

Para que la primera casilla se ocupe, hay 17 posibilidades distintas de hacerlo (cualquiera de los 17 equipos). Una vez que un equipo ha ocupado el primer lugar, hay 16 posibilidades de ocupar el segundo lugar y por último ya que hay 2 equipos designados como primer y segundo lugar, solo quedan 15 posibles equipos para ocupar el tercer lugar.

Dado que por cada uno de los 17 posibles equipos para ocupar el primer lugar existen los 16 posibles para ocupar el segundo y por cada uno de estos existen los 15 para el tercero, tenemos que el número de formas de escoger los 3 lugares es:

$(17)(16)(15) = 4080$

Notemos que este es un caso particular de las O_n^3, ya que estamos buscando ternas ordenadas de un conjunto. Esto es:

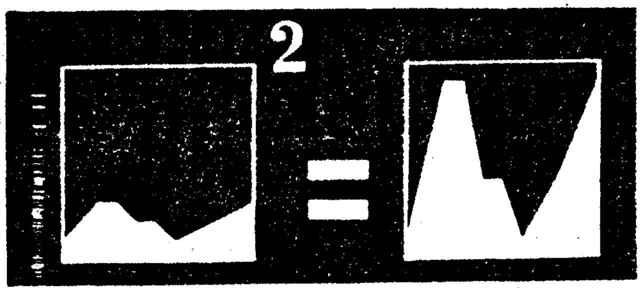
Sea $\{a_1, a_2, \ldots, a_{17}\}$ el conjunto de los 17 equipos. Las ternas $a_1a_2a_3$ y $a_2a_1a_3$, por ejemplo, son distintas para este problema ya que no es lo mismo que a_1 tenga la medalla de oro y a_2 la de plata, que a_1 tenga la de plata y a_2 la de oro; por lo tanto sí nos interesa el orden de las ternas. Entonces queremos encontrar O_{17}^3 que por la fórmula que ya conocemos es:

$O_{17}^3 = (17)(17-1)(17-2) = (17)(16)(15) = 4080$

Por lo que hay 4080 formas distintas de distribuir las medallas.

Con las fórmulas que hemos encontrado, podemos resolver muchos problemas clásicos en el análisis combinatorio, solo que no debemos buscar encajar luego luego una fórmula así como así, debemos analizar el problema y solo después de esto aplicar las fórmulas si es que alguna nos sirve, o alguna combinación de ellas, etc.

Veamos algunos problemas mas para ir avanzando en el análisis y comportamiento de los problemas y en la aplicación de las fórmulas.



PROBLEMA.

Dada una pareja como (a,b) ¿de cuántas formas se pueden ordenar sus elementos?

Solo de 2 formas: (a,b) y (b.a).

Si se tiene una terna como (a,b,c) ¿de cuántas formas se pueden ordenar de 3 en 3 sus elementos?

Haciendo las ternas tenemos:

(a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b) y (c,b,a)

De 6 formas distintas.

Y si tenemos un a n-ada, ¿de cuántas formas se pueden ordenar de n en n sus elementos?

Tenemos una forma para pensar cómo hacerlo en general.

Dada una cajita con n lugares ¿de cuántas formas podemos llenarla tomando a sus elementos de un conjunto que tiene n elementos?

1a. 2a. 3a. . . . na.

____ ____ ____ . . .

Para llenar la primera se tienen n posibilidades, pero una vez lleno el primer lugar, se tienen solo n-1 elementos para escoger uno que llenará el segundo lugar, para llenar el tercer lugar, ya solo se tienen n-2 posibilidades y así sucesivamente para los demás lugares.

Por ejemplo. Dada una cajita con 4 lugares, tenemos 4 maneras de llenar el primer lugar, pero una vez lleno éste, tenemos 3 formas de llenar el segundo lugar, 2 formas para llenar el tercero y solo una para llenar el cuarto lugar. O sea:

$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Haciendo, como antes, una tabla para tratar de descubrir el comportamiento tenemos:

Sea P_n el número de formas distintas de permutar los n elementos de un conjunto. Es decir, sea P_n = las permutaciones de un conjunto con n elementos, que es lo mismo que veníamos llamandole ordenaciones de n en n de un conjunto con n elementos.

P_1 es claro que es 1

P_2 ya lo habíamos calculado y son 2

P_3 también habíamos contado ya, y son 6

P_4 nos dió como resultado 24

Entonces tenemos la siguiente tabla:

n	P_n
1	1
2	2
3	6
4	24

¿Cuál es el incremento de un renglón a otro?

n	P_n	INCREMENTO
1	1	-
2	2	x 2
3	6	x 3
4	24	x 4

Vemos que la regla de crecimiento es, el renglón anterior multiplicado por la n en cada renglón.

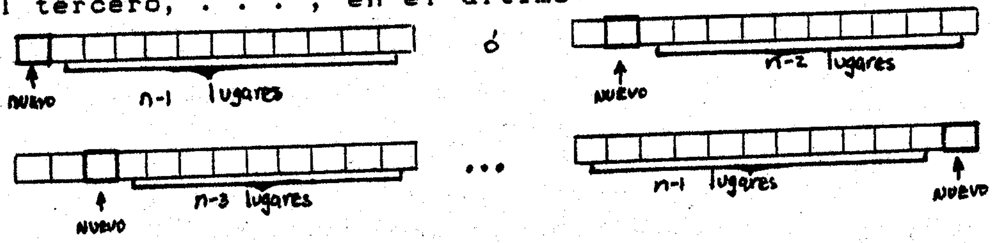
Ya contamos una a una las ternas, y nos dió 6 formas distintas de ordenarlas. Cuando tenemos 4 elementos a ordenar, resulta que para cada uno de estos 4 elementos existen 6 formas de ordenar los otros 3 elementos del conjunto, o sea:

Sea {a,b,c,d} el conjunto a ordenar, para tener el conjunto ordenado con el elemento a en primer lugar se tienen 6 posibilidades que son las formas de ordenar el conjunto {b,c,d}, el número de ordenaciones que tienen en primer lugar al elemento b también son 6 (las formas de ordenar el conjunto {a,c,d} y así sucede para cada uno de los cuatro elementos, teniendo como resultado; 4 elementos del conjunto, por 6, que es el número de formas de ordenar un conjunto con 3 elementos, nos dan 24 formas.

El resultado que acabamos de observar nos lleva a formular la siguiente conjetura:

$P_n = n(P_{n-1})$

Si ya tenemos escritas las permutaciones de n-1 elementos y nos dan un elemento mas, las permutaciones de n elementos serán $n(P_{n-1})$ porque por cada una de las permutaciones de n-1 elementos hay n formas de incluir al nuevo elemento: al principio, en el segundo lugar, en el tercero, . . . , en el último



Y como esto sucede para cada una de las distintas formas de permutar un conjunto de n-1 elementos, se tiene que es cierto que $n(P_{n-1}) = P_n$.

Entonces ya sabemos calcular P_n para cualquier n . Por ejemplo para permutar un conjunto con 5 elementos tenemos:

$P_5 = 5(P_4) = 5(24) = 5x4x3x2$

Ahora como notación escribiremos:

$P_n = nx(n-1)x(n-2)x. \ . \ .x3x2x1 = n!$

n! se llama "factorial de n" ó "n factorial"

PROBLEMA.

¿Existe alguna fórmula para calcular n! ?

Cuando vimos el segundo problema del Pin Pon, teníamos que hacer la suma 1+2+3+...+n y encontramos una fórmula (n(n+1)/2) que nos proporcionaba rápidamente este resultado. Ahora nos preguntamos si existirá alguna fórmula para encontrar rápidamente el producto 1x2x3x...xn.

¿Podrá el lector encontrar alguna fórmula que nos proporcione al menos una buena aproximación a n!?

Sabemos que existen fórmulas aproximadas para calcular el producto de los n primeros números naturales, una de ellas, que nos proporciona una buena aproximación a n! es la que se conoce como la fórmula de Stirling[10], que es la siguiente:

[10] Stirling, James. Matemático inglés (1692-1770).

$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$

Una convención que debemos hacer para que la igualdad $n! = n(n-1)!$ que hemos obtenido siga siendo válida para todos los números naturales es, que cero factorial debe ser igual a 1, esto es:

$0! = 1$

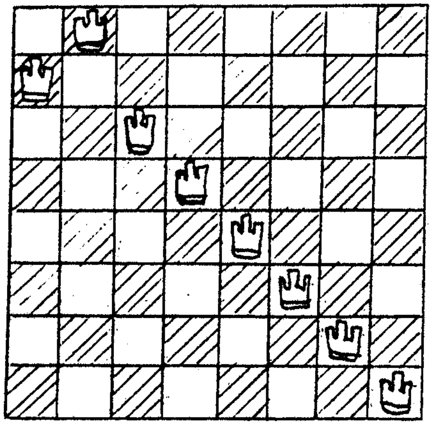
Es interesante la discusión en torno a esta convención. P_0 = las permutaciones de un conjunto con cero elementos y como no tiene elementos la única forma de ordenarlos es dejarlos como estan, o sea P_0 es 1. También para $n=1$ debe suceder que $P_1 = 1(P_0)$ y como 1! ya sabemos que es 1 enton ces: $1! = 1(0!) = 1$ entonces también por este lado vemos que 0! debe ser 1.

Por necesidad y para "simplificarse las cosas" se conviene que $0! = 1$

Ejemplo.

¿De cuántas formas se pueden colocar en el tablero de ajedrez 8 torres de tal forma que no esten en una misma horizontal o en una misma vertical?

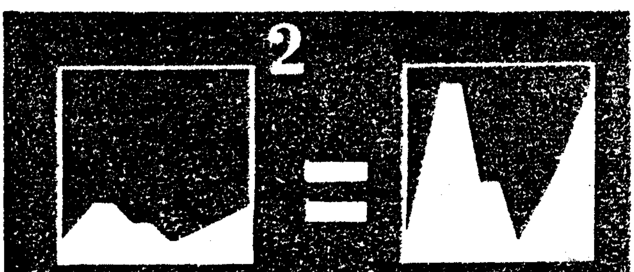
Hagamos una sucesión de 8 cajitas. Cada una representa las hileras verticales del tablero de ajedrez y numeremos de 1 á 8 a las hileras horizontales del tablero. El problema ahora consiste en llenar las cajitas con`los números del 1 al 8. Así, una disposición como 2,1,3,4,5,6,7,8 significa que en la primera vertical se encuentra una torre en el segundo lugar, en la segunda vertical está una torre en el primer lugar, y así sucesivamente, o sea que la posición que se describe en el tablero es la siguiente:



Y es claro que es una de las soluciones al problema.

Entonces el problema consiste en contar ¿de cuántas formas se pueden llenar 8 cajitas con los números del 1 al 8? o bien, ¿de cuántas formas se pueden permutar 8 elementos? Y la respuesta nos la da luego luego la fórmula de las permutaciones o sea:

$P_8 = 8! = 8x7x6x5x4x3x2x1 = 40320$ formas de hacerlo.



PROBLEMA.

¿Cuántos miembros puede tener un club si en las credenciales solo es posible tener números con 5 cifras?

Empecemos por preguntarnos ¿cuántos miembros tendría el club si solo se permitieran números de credenciales con 1 cifra?

Es claro que el club tendría como máximo solo 10 miembros, o sea los que tuvieran las credenciales: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 y 9.

Ahora, si se permitiese que las credenciales tuviesen números de 2 cifras, ¿cuántos miembros tendría como máximo el club?

Podemos de inmediato pensar en los números de 2 cifras con dígitos del cero al nueve, y tenemos así que las credenciales permitidas serían: 00, 01, 02, 04, ...,98 y 99. Y esta lista, sabemos que contiene 100 elementos. Entonces el club tendría como máximo 100 miembros.

Si se permitiera que las credenciales tuvieran números de 3 cifras, ¿cuántos miembros podría tener el club? De nuevo pensamos de inmediato en los números 000, 001,002, 003, 004, ... , 100, 101, 102, ... , 998 y 999. Y el número total de ellos es 1000, de modo que el club podría tener hasta 1000 miembros.

Si siguiéramos de esta manera, para 4 cifras tendríamos que contar cuantos números hay en la lista siguiente: 0000, 0001, 0002, ... , 9998 y 9999. Y ya sabemos que en esta lista hay 10000 números (desde el cero hasta el 9999). Por lo que podría haber 10000 miembros en el club con credenciales de 4 cifras.

Hagamos una tabla de los resultados que hemos obtenido:

# DE CIFRAS PERMITIDAS	# DE MIEMBROS DEL CLUB
1	10
2	100
3	1000
4	10000

¿Cuánto deberá ser para 5 cifras?

Es de esperarse que el resultado sea 100000 por lo que se observa en la tabla. Y efectivamente resulta que los números de 5 cifras son los de la lista: 00000, 00001, 00002, ..., 99999 que son exactamente 100000 (desde el 0 hasta el 99999).

Y con esto damos respuesta a la pregunta y sabemos que en el club puede haber a lo más 100000 miembros.

Ahora, si se nos pregunta ¿cuántos miembros puede haber en un club donde las credenciales tienen un número k de cifras? ¿cuál será nuestra respuesta?

Observando la tabla tenemos una hipótesis que se comprueba en estos 5 casos, que es:

Dado un número de cifras permitido n, el número de miembros que puede tener el club es 10^n.

Entonces si nuestra hipótesis fuera cierta para cualquier número natural, ya tendríamos la respuesta y contestaríamos simplemente que el club podría tener hasta 10^k miembros.

Ahora veamos el problema con otro esquema. Por ejemplo, para contar cuántos miembros puede haber en el club si solo se permiten credenciales con 2 cifras, podemos pensar que los números de credenciales se forman mediante llenar con cualquiera de los 10 dígitos, los lugares de un casillero de 2 lugares. Esto es, sea _ _ el casillero con 2 lugares en donde colocaremos los números. Debemos contar de cuántas formas distintas podemos colocar los 10 dígitos en los 2 lugares del casillero.

Para colocar una cifra en el primer lugar tenemos cualquiera de los 10 dígitos (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) y una vez que hemos colocado la primera cifra, tenemos otras 10 opciones para llenar la segunda casilla (de nuevo cualquiera de los 10 dígitos). Nótese que no importa cuál de las 10 cifras hayamos escogido en el primer lugar pra que en el segundo también tengamos 10 cifras para escoger, ya que podemos repetir los números, esto es, el número 77 por ejemplo puede ser un número de credencial, y no importa que se haya repetido la elección para el primer lugar con la elección para el segundo.

De modo que por cada una de las 10 cifras que podamos escoger en el primer lugar, tenemos 10 cifras para escoger en el segundo. En consecuencia, el número de credenciales con 2 cifras que puede haber es $10 \times 10 = 10^2 = 100$.

Para el caso en que se permita tener credenciales con 3 cifras, tenemos un casillero con 3 lugares. Para llenar el primer lugar hay 10 opciones (los 10 dígitos) y por cada uno de los dígitos que escojamos hay 10 opciones para llenar la segunda casilla; una vez llenas las 2 primeras, hay 10 opciones por cada una de las elecciones hechas para las 2 anteriores, para llenar la tercera casilla. Esto es, hay
$(10 \times 10) \times 10 = 10^3 = 1000$ formas distintas de llenar tres casillas con uno de los 10 dígitos en cada una. O sea si se permiten credenciales de 3 cifras puede haber hasta 1000 miembros en el club.

Siguiendo así, si se permiten credenciales con k cifras tenemos que llenar un casillero de k lugares y en cada uno podemos poner cualquiera de los 10 dígitos. Para llenar la primera casilla hay 10 opciones, para la segunda (no importando que haya sucedido en la primera) hay 10 opciones, para la tercera también hay 10 y así sucesivamente para la k'ésima hay 10 opciones también, independientemente de qué hayamnos escogido en las k-1 anteriores. De manera que se tienen un total de $10 \times 10 \times 10 \times \ldots \times 10 = 10^k$ formas diferentes de llenar el casillero y por consiguiente en el club puede haber hasta 10^k miembros.

Si por alguna razón, en el número de credenciales del club no se permitiese que hubiera ningún número con la cifra 8, ¿cuántos miembros podría tener el club si el número de cifras puede ser k?

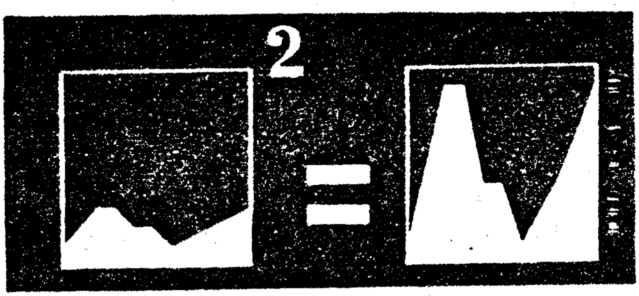
El problema cambia solo en el número de opciones que tenemos para llenar los lugares del casillero. Ahora solo hay 9 opciones para cada uno de los k lugares del casillero, de modo que el número de credenciales sin algún 8 es:
$9 \times 9 \times 9 \times \ldots \times 9 = 9^k$.

Si llamamos $OR_n{}^k$ al número de ordenaciones con repetición de n elementos tomados de k en k, notemos que lo que hemos hecho en el problema de las credenciales del club, es calcular las ordenaciones con repetición de 10 elementos tomados de 5 en 5 en el primer caso y las ordenaciones con repetición de 9 elementos tomados de k en k en el segundo, o sea: $OR_{10}{}^5$ en el primero y $OR_9{}^k$ en el segundo.

Nótese que se llaman ordenaciones con repetición porque está permitido repetir los elementos en una ordenación, el número de veces que sea necesario, es decir, para el primer caso del problema de las credenciales, los números 12312, 33312 y 33333 pueden ser números de credenciales.

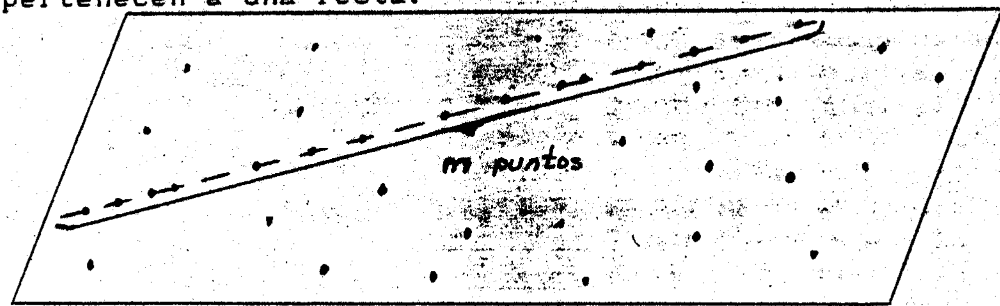
Nótese también que por todo lo que hemos hecho, hemos demostarado que $OR_n{}^k = n^k$

Dejamos como ejercicio para el lector demostrarlo por inducción.



PROBLEMA.

Se tienen en el plano n puntos de los cuales ninguna terna es colineal, excepto m puntos que pertenecen a una recta.



¿Con cuántas rectas podemos unir estos puntos?

Si no se tuviera la restricción de los m puntos colineales, con los n puntos tendríamos que formar todas las parejas, o sea C_n^2 (las posibles rectas). A este número tenemos que restarle las parejas que forman entre si los m puntos colineales, que son C_m^2 y a que por ser colineales solo definen una recta y no C_m^2 rectas. Y por último debemos sumar la recta que definen los m puntos colineales. Por lo que el número de rectas con las cuales podemos unir estos puntos es:

$C_n^2 - C_m^2 + 1$

Otra pregunta para este mismo problema es: ¿Cuántos triángulos distintos podemos formar con vértices en dichos n puntos?

Sin tomar en cuenta la restricción de los m puntos colineales, el número de triángulos es C_n^3, pero si tomamos en cuenta la restricción, tenemos que restarle el número de triángulos que no es posible que se formen, esto es, las combinaciones de m elementos tomados de 3 en 3 porque las ternas de los puntos que son colineales no forman triángulos, por lo tanto el número de triángulos es:

$C_n^3 - C_m^3$

PROBLEMA.

Demostrar que $\Sigma(-1)^k C_n{}^k$ con $k=0,1,\ldots,n$ es cero para toda n en los números naturales.

Como siempre, empecemos por hacer una lista con los primeros casos para buscar un procedimiento general.

n=0 se tiene: $(-1)^0 C_0{}^0 = 1\times 0 = 0$

n=1 Tenemos: $(-1)^0 C_1{}^0 + (-1)^1 C_1{}^1 = 1 - 1 = 0$

n=2 $(-1)^0 C_2{}^0 + (-1)^1 C_2{}^1 + (-1)^2 C_2{}^2 = 1 - 2 - 1 = 0$

n=3 $(-1)^0 C_3{}^0 + (-1)^1 C_3{}^1 + (-1)^2 C_3{}^2 + (-1)^3 C_3{}^3 = 1-3+3-1 = 0$

n=4 $(-1)^0 C_4{}^0 + (-1)^1 C_4{}^1 + (-1)^2 C_4{}^2 + (-1)^3 C_4{}^3 + (-1)^4 C_4{}^4 = 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$

n=5 $\Sigma(-1)^k C_5{}^k$ con $k=0,1,\ldots,5$ $=1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 = 0$

Vemos que en general hay 2 casos: cuando n es par y cuando n es impar.

Si n es impar, tenemos n+1 sumandos de los cuales (n+1)/2 son positivos y (n+1)/2 son negativos y además por la identidad $C_n{}^k = C_n{}^{n-k}$ tenemos que los (n+1)/2 negativos son exactamente los mismos que los (n+1)/2 positivos, por lo tanto la suma es efectivamente cero.

Ahora veamos qué sucede si n es par.

Sea n=2m por lo tanto hay 2m+1 sumandos y el de enmedio es el sumando es el sumando número m+1 .

De los 2m+1 sumandos, m de ellos son iguales, incluso en signo, por pares (ya que $C_n{}^k = C_n{}^{n-k}$) y queda sin pareja el sumando de enmedio, entonces tenemos:

$\Sigma(-1)^k C_n{}^k$ con $k=0,1,\ldots,n$ $=2(\Sigma(-1)^k C_n{}^k$ con $k=0,1,\ldots,m-1)$ $+ (-1)^m C_n{}^m =$

Sustituyendo en cada sumando la fórmula $C_n{}^k = C_{n-1}{}^{k-1} + C_{n-1}{}^k$ tenemos:

$$2[C_{n-1}{}^0 - (C_{n-1}{}^0 + C_{n-1}{}^1) + (C_{n-1}{}^1 + C_{n-1}{}^2) + \ldots + (-1)^{m-1}(C_{n-1}{}^{m-2} + C_{n-1}{}^{m-1})] + (-1)^m (C_{n-1}{}^{m-1} + C_{n-1}{}^m) =$$

De donde, quitando paréntesis tenemos:

$$2[C_{n-1}{}^0 - C_{n-1}{}^0 - C_{n-1}{}^1 + C_{n-1}{}^1 + C_{n-1}{}^2 - C_{n-1}{}^2 - \ldots + (-1)^{m-1} C_{n-1}{}^{m-2} + (-1)^{m-1} C_{n-1}{}^{m-1}] + (-1)^m (C_{n-1}{}^{m-1} + C_{n-1}{}^m) =$$

Cancelando términos semejantes:

$$2(-1)^{m-1} C_{n-1}{}^{m-1} + (-1)^m C_{n-1}{}^{m-1} + (-1)^m C_{n-1}{}^m =$$

Sacando como factor común a $(-1)^{m-1}$ resulta:

$$(-1)^{m-1}(2C_{n-1}{}^{m-1} - C_{n-1}{}^{m-1} - C_{n-1}{}^m) =$$

$$(-1)^{m-1}(C_{n-1}{}^{m-1} - C_{n-1}{}^m)$$

y como $n=2m$

$(-1)^{m-1}(C_{2m-1}{}^{m-1} - C_{2m-1}{}^m) = (-1)^{m-1}(0) = 0$ ya que:

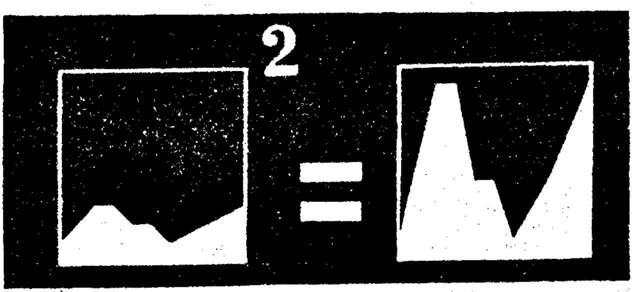
$C_{2m-1}^{m-1} = C_{2m-1}^{2m-1-(m-1)} = C_{2m-1}^{m}$ (o sea que m es el complemento de m-1 para tener n-1 elementos)

Por lo tanto queda demostrado en general que

$\Sigma(-1)^k C_n^k$ con $k=0,1,\ldots,n$ $= 0$

Observación.

Cuando veamos la fórmula del binomio de Newton, se verá otra demostración de este problema. También con los ejercicios 18 y 19 del final de este capítulo, se puede encontrar otra forma de demostrar este hecho.



PROBLEMA.

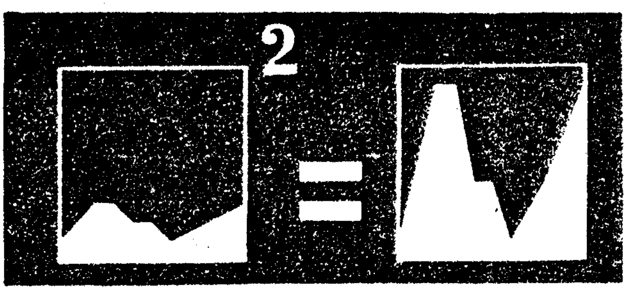
Demostrar que $C_n^k = n! / (n-k)!\,k!$

Sabemos que $C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots(3)(2)}$

entonces multiplicamos arriba y abajo por $(n-k)!$ y tenemos:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)(n-k)!}{k(k-1)(k-2)\ \ldots\ (3)(2)(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Así, tenemos ya otra manera de escribir a C_n^k.



RECORDANDO EL SEGUNDO PROBLEMA DEL FIN FON.

Recordando el segundo problema del Fin Fon en donde se enfrentan todos los jugadores contra todos, veamos ahora una interpretación diferente que observó un alumno nuestro.

Suponiendo que una secretaria nos ayuda a hacer tarjetas que indiquen los 2 nombres de los participantes en un partido, esto es, en cada tarjeta estarán escritos 2 nombres (estas serán las tarjetas de participaciones, decía el alumno).

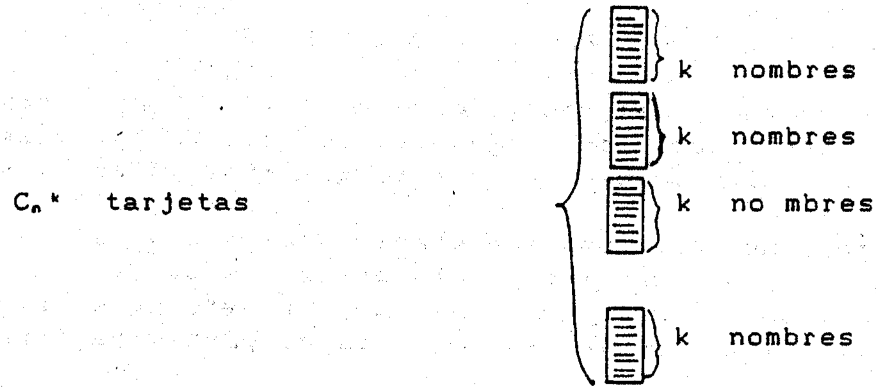
Ya sabemos, por lo que hemos discutido antes, que cuando la secretaria haga todas las tarjetas de participaciones habrá en total $n(n-1)/2$ tarjetas que son el número de partidas que se efectuan cuando hay n jugadores inscritos. Ahora contémoslo de otra manera.

Cuando la secretaria haya terminado de hacer las tarjetas, habrá escrito $n(n-1)$ nombres en total, ya que hay n participantes y cada uno debe jugar contra $n-1$ jugadores. Esto es, por ejemplo el nombre de Juan Pérez lo ha escrito $n-1$ veces, una por cada partida que juega Juan Pérez, y esto sucede para cada uno de los n jugadores.

El número de tarjetas es $C_n^2 = (n)(n-1)/2$, que ya sabíamos, y 2 nombres en cada tarjeta, por lo tanto tenemos que:

$n(n-1) = 2(C_n^2)$ que es el número de nombres que ha escrito en total la secretaria.

En esta manera de ver el problema, tenemos en cada tarjeta una pareja de jugadores y en total el número de tarjetas es el número de parejas que pueden formarse de un conjunto con n elementos que es C_n^2. ¿Qué sucederá si ahora queremos ver cuál es la relación que hay con C_n^k ? ó mas bien, ¿cuántos nombres escribirá la secretaria si ahora se tienen C_n^k tarjetas en las cuales hay k nombres en cada una?



Hay k nombres en cada tarjeta y son en total C_n^k tarjetas, por lo tanto hay escritos en total $k(C_n^k)$ nombres.

Pero ¿cuántas veces está escrito cada nombre?

Cada nombre está escrito en una tarjeta junto con k-1 nombres más, pero en esos k-1 nombres deben estar todas las combinaciones de n-1 nombres escogidos de k-1 formas, esto es, de los n nombres quitamos el que nos interesa y formamos todas las formas de escoger k-1 nombres con el resto y para cada una de estas formas existe una tarjeta en donde estan escritos los k-1 nombres y también el que quitamos al principio. O sea que cada nombre está escrito en C_{n-1}^{k-1} tarjetas. Y como tenemos en total n nombres, entonces la secretaria ha escrito en total $n(C_{n-1}^{k-1})$ nombres. De donde tenemos que:

$k\ C_n^k = n\ C_{n-1}^{k-1}$ para k y n en los números naturales.

Anora, ¿cómo lo demostramos de otra forma?

Demostración.

Sabemos que:

$C_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)/(k)(k-1)...(2)(1)$ entonces

$k(C_n^k)=n(n-1)(n-2)...(n-k+1)k\ /(k)(k-1)...(2)(1)=$

$n[(n-1)(n-2)...(n-k+1)]/(k-1)(k-2)...(2)(1) = nC_{n-1}^{k-1}$

Tenemos ahora una fórmula combinatoria que puede sernos útil después.

PROBLEMA.

Demostrar por fórmula, por inducción y/o conceptualmente que

$$C_n^{m+1} = [(n-m)/(m+1)]C_n^m$$

Demostración. Por la fórmula de combinaciones tenemos:

$C_n^{m+1} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m-1+1)/(m+1)(m)(m-1)\ldots(2)(1) =$
$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m-1+2)(n-m)/(m+1)(m)(m-1)\ldots(2)(1) =$
$[(n-m)/(m+1)]C_n^m$

Conceptualmente:

Demostración.

Tenemos un conjunto con n elementos y formamos los subconjuntos de m elementos (con $m \leq n$) o sea C_n^m. Si a cada una de las combinaciones de m elementos le adjuntamos sucesivamente un elemento de los restantes (n-m), que no aparecieron en dichas combinaciones, formaremos todas las posibles combinaciones de n elementos tomados de (m+1) en (m+1) elementos, o sea C_n^{m+1} .

Cuando tomamos en esa forma las nuevas combinaciones, cada una de ellas aparece m+1 veces repetida. Para verlo mejor veamos qué ocurre con una combinación particular, por ejemplo la combinación (1,2,3,...,m,m+1) esta puede aparecer de cualquiera de las m+1 formas siguientes:

A la combinación (2,3,...,m,m+1) agregándole el elemento 1, a la combinación (1,3,...,m,m+1) agregándole el elemento 2, ... ,a la combinación (1,2,3,...,m-1,m) agregándole el elemento m+1.

De donde vemos que se repite m+1 veces cada una, entonces tenemos que dividir el número de combinaciones encontradas por las m+1 repeticiones.

También tenemos que cada uno de las combinaciones de C_n^m genera n-m nuevas combinaciones de m+1 elementos con el procedimiento antes descrito por lo que tenemos que se forman $(n-m)C_n^m$ nuevas combinaciones de m+1 elementos pero, por lo que se vió en el párrafo anterior cada una de ellas está repetida m+1 veces, por lo tanto tenemos:

$$C_n^{m+1} = [(n-m)C_n^m]/(m+1) = [(n-m)/(m+1)]C_n^m$$

Tenemos así, una nueva forma de encontrar C_n^{m+1} a partir de C_n^m .

PROBLEMA.

Demostrar, usando lo que ya se sabe de combinatoria, que

$kC_n^k = (n-k+1)C_n^{k-1}$

Demostración.

Sabemos que $C_n^{m+1} = [(n-m)/(m+1)]C_n^m$

entonces $(m+1)C_n^{m+1} = (n-m)C_n^m$

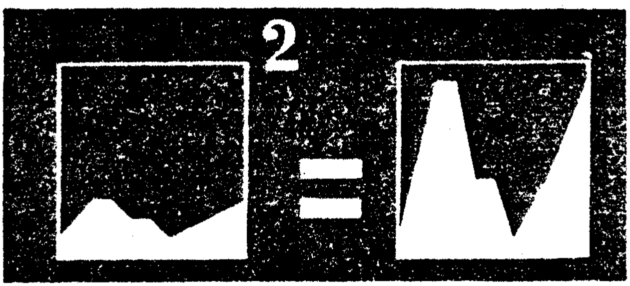
si $k=m+1$ entonces $m=k-1$ y tenemos

$$kC_n^k = (n-k+1)C_n^{k-1}$$

por lo tanto tenemos también

$$(n-k+1)C_n^{k-1} = nC_{n-1}^{k-1}$$

¿Podrémos demostrarlo conceptualmente?



Recordando el problema de las rutas de una ciudad: TRIANGULO DE PASCAL Y FORMULA DEL BINOMIO.

Recordemos que en el problema de las rutas en una ciudad (que vimos en el capítulo I), dejamos pendiente la pregunta ¿cuántos caminos mínimos hay para llegar a la esquina (i,j)? sea cual sea la esquina de que se trate y sin construir el esquema de todas las esquinas anteriores a ella.

Una vez que hemos encontrado en general cuánto es C_n^k ya podemos encontrar la respuesta que buscábamos.

Habíamos planteado que era necesario encontrar el número de formas de colocar i flechas hacia la derecha y j flechas hacia arriba en un casillero de i+j lugares y esto lo podemos escribir como C_{i+j}^i que es lo mismo que C_{i+j}^j , entonces el número de caminos mínimos para llegar a la esquina (i,j) es:

$$C_{i+j}^i = \frac{(i+j)!}{i!j!}$$

Y siguiendo con el problema de las rutas de una ciudad, también allí vimos que podíamos tener un esquema con el número de caminos mínimos para llegar a cada esquina, como sigue:

1	5	15	35	70
1	4	10	20	35
1	3	6	10	15
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

número de caminos mínimos en cada esquina

De donde podemos ver que se obtiene el triángulo conocido como triángulo de Pascal[11], y que quizá todos ya conozcan y recuerden como se calcula o incluso, hasta recuerden para qué sirve.

En el problema que estamos recordando, encontramos que para llegar a una esquina dada, se necesita sumar el # de caminos mínimos para llegar a la esquina de la izquierda de ella mas el # de caminos mínimos para llegar a la esquina de abajo de ella; notemos que esto no es otra cosa mas que la regla para encontrar el triángulo de Pascal. Si en el esquema anterior, giramos hacia la izquierda unos 45°, lo que obtenemos es el siguiente esquema:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & &
\end{array}
$$

Que ahora sí podemos reconocer como el triángulo de Pascal que generalmente nos enseñan en el bachillerato, solo que invertido.

Y por lo que hemos visto en el párrafo anterior, el triángulo podemos escribirlo como:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & C_6^2 & & C_6^3 & & C_6^4 & & \\
 & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & & & C_0^0 & & & &
\end{array}
$$

Que si lo volvemos a girar como estaba antes y lo invertimos, tenemos el siguiente esquema:

---

[11] Pascal, Blaise. Filósofo, matemático, teólogo y escritor francés. (1623-1662).Ver serie Sigma, vol.1 pp.61-64; vol. 4 pp.224-225.

C_0^0	C_1^1	C_2^2	C_3^3	C_4^4
C_1^0	C_2^1	C_3^2	C_4^3	C_5^4
C_2^0	C_3^1	C_4^2	C_5^3	C_6^4
C_3^0	C_4^1	C_5^2	C_6^3	C_7^4
C_4^0	C_5^1	C_6^2	C_7^3	C_8^4

Notemos que en estos dos esquemas y por la regla que se ha discutido en el problema de las rutas de una ciudad, se vuelve a ver la siguiente igualdad:

$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Y podemos hacer un esquema mas completo todavía, como sigue:

C_n^k k / n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1

En donde además podemos reconocer algunos de los números figurados que ya hemos trabajado como son: los números triangulares y los números piramidales. Veamos que en la primera columna del esquema anterior, estan solamente números unos, en la segunda los números naturales, en la tercera, los números triangulares y en la cuarta, los números piramidales.¿Cuáles serán los que estan en las otras columnas?

Por fórmulas, sabemos que en la quinta columna estan los números $C_n^4 = \dfrac{n!}{4!(n-4)!}$ pero, ¿qué números son esos?

¿Serán también algunos de los números figurados?

Dejemos estas preguntas para pensarlas y que cada uno las trabaje por su cuenta hasta donde cada quien lo quiera..

Continuando con el triángulo de Pascal y sus utilizaciones, ya que por lo general se nos enseña a usarlo en las potencias de un binomio, veamos qué es lo que sucede con un binomio elevado a cualquier potencia.

Como siempre, empecemos por números pequeños.

$(x+y)^1 = x + y$

$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = (x+y)^2(x+y) = (x^2 + xy + yx + y^2)(x+y) =$

$x^3 + xxy + xyx + xy^2 + yx^2 + xy^2 + y^2x + y^3 =$

$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x+y)^4 = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(x+y) =$

$x^4 + 3x^2yx + 3x^2y^2 + y^3x + x^3y + 3x^2y^2 + 3xy^3 + y^4$

$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

El coeficiente de cada término podemos encontrarlo de una manera semejante a la que se utilizó en el problema de las rutas de una ciudad, esto es, veamos que en el binomio al cuadrado el coeficiente de xy es el número de formas que podemos escoger un lugar para x en un casillero de 2 lugares ya que el término 2xy salió de sumar xy + yx . En el binomio al cubo, el término $3x^2y$, por ejemplo, salió de sumar los términos: xxy + xyx + yxx. Y en el binomio a la cuarta potencia, el término $4x^3y$ por ejemplo, salió de sumar los términos: xxxy + xxyx + xyxx + yxxx .

Así, veamos que en cada caso el coeficiente es el número de formas que tenemos para escoger un número determinado de x's en un casillero con un número dado de lugares disponibles.

Observemos además que en el binomio al cubo cada uno de los términos tiene el producto de 3 literales, esto es:

$(x+y)^3 = xxx + 3(xxy) + 3(xyy) + yyy$

En el binomio a la cuarta cada término tiene el producto de 4 literales, o sea:

$(x+y)^4 = xxxx + 4(xxxy) + 6(xxyy) + 4(xyyy) + yyyy$

Así, conjeturamos que en el binomio a la quinta potencia cada término tiene el producto de 5 literales por lo que debe tener 6 términos que, aunque no sabemos cuáles son los coeficientes sabemos que son de la forma:

xxxxx + ?(xxxxy) + ?(xxxyy) + ?(xxyyy) + ?(xyyyy) + ?(yyyyy)

Entonces ahora tenemos 2 preguntas pendientes: la primera, saber cuál es el coeficiente en cada uno de los términos de un binomio elevado a cualquier potencia y la segunda, saber cuántos términos tiene un binomio elevado a cualquier potencia.

Empezaremos por resolver la segunda pregunta. Sabemos que en el binomio $(x+y)^n$ al menos aparecen los términos x^n y y^n, es más, sabemos que son el primero y el último término respectivamente, pero ¿cuántos son los demás? Cada uno de los términos tiene que ser el producto de n literales porque para elevar $(x+y)^n$ lo que se hace es:

$$(x+y)^n = (x\underbrace{+y)(x+y)\ \ldots\ (x+y)(x+}_{n\ \text{veces}}y)$$

Y para tener un término tenemos que nultiplicar una de las 2 literales en cada binomio por una de las 2 literales de todos los demás. Por ejemplo, el término x^2y^2 del binomio $(x+y)^4$ va a resultar de xxyy ó de xyxy ó de cualquier otro monomio que conste del producto de 2 x's y 2 y's, y lo que quiere decir en xxyy, por ejemplo, es que se escogió x en el primer factor, x en el segundo factor, y en el tercero y y también en el cuarto. Donde (x+y)(x+y)(x+y) y (x+y) son los 4 factores de que hablamos. Entonces siguiendo este razonamiento, que es válido en general, se tiene que cada término de $(x+y)^n$ tiene n literales. Ahora solo tenemos que contar cuántas son las formas que podemos tener para distribuir 2 literales en un producto de n de ellas. Esto podemos pensarlo como: si las n son x's se tiene el término x^n; si n-1 son x's y 1 es y se tiene el término $x^{n-1}y$, y así sucesivamente hasta que tenemos el término en donde las n son y's qye es y^n; y como tenemos n lugares que pueden estar ocupados por 0,1,2,...,n x's (y por consiguiente por n, n-1,...,1,0 y's) decimos que hay n+1 términos en el binomio $(x+y)^n$. Que son:

$$\underbrace{xx\ldots x}_{n\ \text{veces}},\ \underbrace{xx\ldots x}_{n-1\ \text{veces}}y,\ \underbrace{xx\ldots x}_{n-2\ \text{veces}}yy,\ \ldots\ldots,\ \underbrace{x}_{1\ \text{vez}}yy\ldots y,\ yy\ldots y$$

Ahora tenemos que responder a la primera pregunta.

Sabemos que cada uno de los n+1 términos del binomio $(x+y)^n$ tiene el producto de n literales y que si tenemos 2 sumandos que constan de i x's y j y's ambos, podemos agruparlos y considerarlos en un solo término, y ésto es por ejemplo en el término $6x^2y^2$ del binomio $(x+y)^4$ proviene de: xxyy + xyxy + xyyx + yxxy + yxyx + yyxx , que son las 6 formas distintas que se tiene de escoger 2 x's y 2 y's de un casillero de 4 lugares.

Entonces en general lo que buscamos para tener el coeficiente de cada término es el número de formas de escoger i lugares (para colocar las x's) de un casillero con n lugares disponibles. O lo que es lo mismo, buscamos cuántas palabras de n lugares con exactamente i x's podemos formar. Esto ya lo habíamos visto al resolver el problema de las rutas de una ciudad, pero ahora trataremos de encontrar la relación entre los coeficientes solamente trabajando con el binomio.

Sabemos que $(x+y)^n$ en su desarrillo tiene la forma:

$x^n + (?)x^{n-1}y + (?)x^{n-2}y^2 + \dots + (?)xy^{n-1} + y^n$

Vamos a ponerles algún nombre a los coeficientes de este binomio y busquémos cuál es la regla que siguen éstos.

Sean $B_n{}^i$ los coeficientes del binomio $(x+y)^n$. O sea:

$(x+y)^n = B_n{}^0x^n + B_n{}^1x^{n-1}y + \dots + B_n{}^{n-1}xy^{n-1} + B_n{}^ny^n$

Ya conocemos $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ de donde sabemos que $B_2{}^0 = 1$, $B_2{}^1 = 2$ y $B_2{}^2 = 1$.

Queremos descubrir cómo son los coeficientes de $(x+y)^3$ partiendo de que ya sabemos $(x+y)^2$ y de allí encontrar en general como se obtiene el siguiente binomio en términos del que ya conocemos.

Veamos cómo se obtiene $(x+y)^3$:

$(x+y)^3 = (B_2{}^0x^2 + B_2{}^1xy + B_2{}^2y^2)(x+y)$

Desarrollando el producto, primero multiplicando por x:

$B_2{}^0x^2x + B_2{}^1xyx + B_2{}^2y^2x$, y luego por y, tenemos:

$B_2{}^0x^2y + B_2{}^1xyy + B_2{}^2y^2y$, y agrupando términos semejantes sumamos como sigue:

$$
\begin{array}{lllll}
 & B_2^0x^3 + & B_2^1x^2y & + \quad B_2^2xy^2 & \\
+ & & B_2^0x^2y & + \quad B_2^1xy^2 & + \; B_2^2y^3 \\
\hline
 & \multicolumn{4}{l}{B_2^0x^3 + (B_2^1+B_2^0)x^2y + (B_2^2+B_2^1)xy^2 + B_2^2y^3}
\end{array}
$$

De donde obtenemos:

$B_3^0 = B_2^0$; $B_3^1 = B_2^1 + B_2^0$; $B_3^2 = B_2^2 + B_2^1$ y $B_3^3 = B_2^2$

Y además por otro lado sabemos que:

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ por lo que tenemos: $B_3^0 = 1$; $B_3^1 = 3$; $B_3^2 = 3$ y $B_3^3 = 1$

¿Qué sucederá ahora con $(x+y)^4$?

$(x+y)^4 = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(x+y) =$

$$
\begin{array}{llllllll}
 & x^4 + & 3x^3y + & 3x^2y^2 + & xy^3 & & & \text{(todo por x)} \\
+ & & x^3y + & 3x^2y^2 + & 3xy^3 & + & y^4 & \text{(por y)} \\
\hline
 & x^4 + & 4x^3y + & 6x^2y^2 + & 4xy^3 & + & y^4 &
\end{array}
$$

Donde el segundo coeficiente se obtuvo sumando el segundo coeficiente del desarrollo al cubo más el primer coeficiente del desarrollo al cubo, en símbolos:

$B_4^1 = B_3^1 + B_3^0$

Ahora debemos plantearlo en general, es decir, debemos asegurarnos que siempre sucede lo mismo y no solo para unos casos particulares.

$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y) =$

$(B_n^0x^n + B_n^1x^{n-1}y + \dots + B_n^ix^{n-i}y^i + \dots + B_n^ny^n)(x+y) =$

$$
\begin{array}{l}
B_n^0x^{n+1} + B_n^1x^ny + \dots + B_n^ix^{n-i+1}y^i + \dots + B_n^nxy^n \\
+ \\
\qquad B_n^0x^ny + \dots + B_n^{i-1}x^{n-i+1}y^i + \dots + B_n^{n-1}xy^n + B_n^ny^{n+1} \\
\hline
B_n^0x^{n+1} + (B_n^1+B_n^0)x^ny^n + \dots + (B_n^i+B_n^{i-1})x^{n-i+1}y^i + \dots + \\
\qquad\qquad\qquad (B_n^n+B_n^{n-1})xy^n + B_n^ny^{n+1}
\end{array}
$$

Por lo tanto vemos que:

$B_{n+1}^0 = B_n^0$, $B_{n+1}^1 = B_n^0 + B_n^1$, . . . ,
$B_{n+1}^i = B_n^{i-1} + B_n^i$, . . . , $B_{n+1}^n = B_n^{n-1} + B_n^n$
$B_{n+1}^{n+1} = B_n^n$

Por lo que en general la regla que siguen los coeficientes del binomio $(x+y)^n$ es:

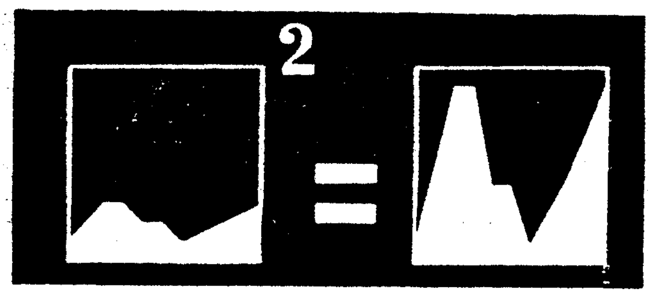
$B_{n+1}^{i} = B_n^{i-1} + B_n^{i}$ para $i=0,1,2,...,n+1$
donde B_n^{-1} y B_n^{n+1} no tienen sentido y les damos el valor de cero.

Así, lo que podemos concluir de todo esto es que los números B_n^k cumplen con lo siguiente:
$B_0^0 = 1$, $B_0^k = 0$ para toda k diferente de cero , y
$B_{n+1}^k = B_n^k + B_n^{k-1}$ para toda k en los números naturales.

Y resulta que todo esto lo cumplen también los números que conocemos como C_n^k, entonces concluimos que $B_n^k = c_n^k$ siempre.

Ya podemos responder a la primera pregunta, el coeficiente del término $x^{n-i}y^i$ es C_n^i o bien C_n^{n-i} ya que como ya se vió antes $C_n^i = C_n^{n-i}$.

A la fórmula del desarrollo del binomio $(x+y)^n$ se le llama comúnmente **fórmula del binomio de Newton,** pero esta denominación es incorrecta desde el punto de vista de la histora de las matemáticas, ya que esta fórmula era bien conocida por los matemáticos del Asia Central y en Europa Occidental mucho antes que la conociera Newton[12] .



[12] Ver Vilenkin, N. ¿De cuantas formas? Editorial MIR. 1972 p. 122.

PROBLEMA.

Demostrar que $\Sigma(-1)^k C_n^k = 0$ con $k= 0,1,2,\ldots,n$ para toda n en los naturales.

Nòtese que este problema ya se resolvió en los èjercicios de combinatoria, ahora lo demostraremos de otra manera.

Veamos que es suficiente con sustituir $x=1$ y $y=-1$ el la fórmula del binomio de Newton y tenemos:

$0 = (1-1)^n = C_n^0(1)^n(-1)^0 + C_n^1(1)^{n-1}(-1)^1 +\ldots+ C_n^n(1)^0(-1)^n$ $\quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$

$= \Sigma(-1)^k C_n^k$ con $k=0,1,2,\ldots,n$ $\quad C_n^i$

Con lo que queda demostrada la proposición.

También relacionado con el binomio de Newton, encontramos en un libro del siglo pasado (que ya no encontramos la página donde estaba el autor, pero sí que está editado por la Caja de Ahorros de Francia y que se llama Fundamentos de Algebra), que la regla que proporciona como receta para calcular los coeficientes de un binomio a cualquier potencia es:

"Para encontrar el coeficiente de un término cualquiera, se multiplica el exponente de **x** en el término que precede, por el coeficiente de ese término, y se divide el producto por el lugar que ocupa este mismo término".

En general, en los libros antiguos de Algebra, para calcular los coeficientes binomiales, se enseñaba la regla citada arriba.

Si tenemos que hacer $(x+y)^5$ la regla es:

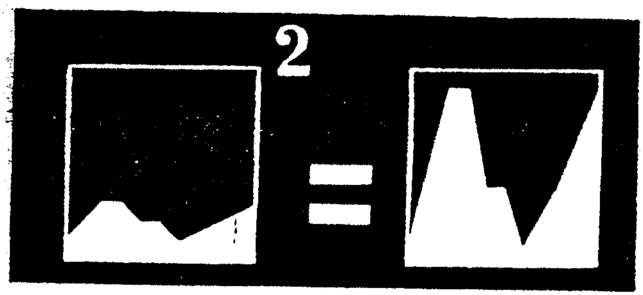
El primer coeficiente es 1 para la potencia 5a. de x, o sea $(1)x^5y^0 = x^5$ es el primer término de este binomio. Para el coeficiente del segundo término se toma el coeficiente del primero, se multiplica por el exponente de x en el primero y se divide entre el exponente de y mas uno en el primer término, esto es: el coeficiente del segundo término es $1(5)/1 = 5$ por lo que el segundo término es $5x^4y^1$. Para el coeficiente del tercer término se multiplica el coeficiente del segundo por el exponente de x en este mismo y se divide entre el exponente de y, mas uno, o sea: 5(4)/2 = 10 y así, el tercer término es $10x^3y^2$. Y así sucesivamente se tiene una fórmula para construir un binomio a cualquier potencia sin desarrollar el triángulo de Pascal.

Nótese que esta reglita no es otra mas que la fórmula que se demostró en uno de los ejercicios de combinatoria, o sea la igualdad siguiente:

$$C_n^{m+1} = [(n-m)/(m+1)]C_n^m$$

Y además sabemos que el desarrollo del binomio $(x+y)^n$ es:

$$C_n^0 x^{n-0} y^0 + C_n^1 x^{n-1} y^1 + \ldots + C_n^i x^{n-i} y^i + \ldots + C_n^n x^{n-n} y^n$$



APLICACIONES DE LA COMBINATORIA

PROBABILIDAD.

En general, todos tenemos una idea intuitiva de lo que es la probabilidad. Por ejemplo, si lanzamos una moneda al aire, y preguntamos ¿cuál es la probabilidad de que caiga águila o sol?, todos pensaremos que la probabilidad de uno u otro es la misma. Es decir, pensamos que con igual probabilidad puede caer águila o sol.

Si nos preguntamos ¿cuál es la probabilidad de que la moneda caiga águila? por ejemplo, de inmediato surge la pregunta ¿cómo podemos calcular esa probabilidad? Analicemos más este ejemplo para obtener esa probabilidad.

Sabemos que la moneda puede caer solo de una de dos formas, (estamos considerando una moneda "honesta" y no tomaremos en cuenta la posibilidad de que cayera de canto), que son águila o sol, esto quiere decir que de los dos casos posibles estamos interesados en que suceda únicamente uno de ellos. A los casos que nos interesa que sucedan se les llama <u>casos favorables</u>. Y al total de casos que pueden suceder se les llama <u>casos posibles</u>.

La probabilidad en casos como éste, se calcula mediante el cociente de los casos favorables entre los casos posibles. De manera que en caso de la moneda (que estamos analizando) los casos favorables son uno y los casos posibles son dos, entonces para obtener la probabilidad de la moneda caiga águila consideramos el cociente:

casos favorables / casos posibles = 1 / 2 = ½

De esta forma, la probabilidad de que la moneda caiga águila es ½.

Y a su vez, la probabilidad de que la moneda caiga sol es también ½, como lo esperábamos intuitivamente.

Oservaciones:

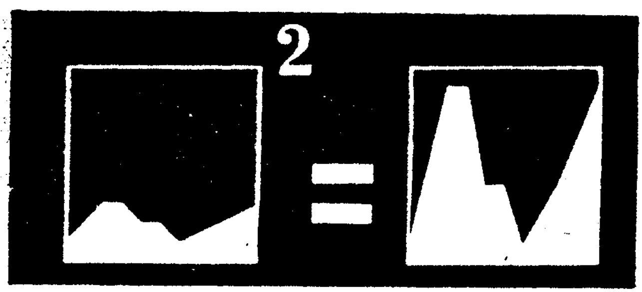
1) En este caso, la probabilidad de los 2 eventos es la misma; en algunos casos, la probabilidad de los diferentes eventos en un experimento, es diferente. No siempre sucede que la probabilidad de los distintos eventos sea la misma.

2) La suma de las probabilidades de todos los eventos de un experimento es siempre 1.

En este caso solo hay eventos que que pueden ocurrir:: que caiga sol o que caiga águila y la probabilidad de cada uno de estos eventos es ½, entonces se tiene: ½ + ½ = 1 que es la probabilidad de los casos posibles, o sea es la probabilidad de que suceda cualquier evento.

Por la definición misma de probabilidad, notemos que la probabilidad es siempre un número que está entre cero y uno.

Veamos ahora algunos ejemplos sencillos en donde calculemos, con la definición ya establecida, la probabilidad de algunos eventos en varios experimentos.



PROBLEMA.

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado (honesto), caiga el número 6?

Los casos posibles son claramente 6. Y los casos favorables solo uno, por lo que la probabilidad que se nos pregunta es 1/6 .

¿Cuál es la probabilidad de que caiga el 5?

Es claro que esta probabilidad es también 1/6.

Notemos que en este experimento también sucede que la probabilidad de cada evento (que caiga 1, 2, 3, 4, 5 ó 6) es la misma, es decir, la probabilidad de que caiga cualquiera de los números es 1/6 para cada uno. Comprobemos de paso, que :
$1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 6(1/6) = 1$ que es la probabilidad de los casos posibles.

Ahora, si el experimento consiste en lanzar 2 dados , ¿Cuál es la probabilidad que caiga el número 12?.

Para que uno de los dados caiga en 6,, ya vimos que la probabilidad es 1/6 y para que el otro dado caiga en 6 también, la probabilidad es 1/6. Entonces la probabilidad de que caigan 12 es $(1/6)(1/6) = 1/36$. Se deben multiplicar las probabilidades, ya que por cada una de las posibles caras en que puede caer el primer dado, se tienen las 6 posibles caras en que puede caer el segundo dado; esto es, para que caiga 6 en el segundo dado, no importa que es lo que haya sucedido en el primero, se tiene una probabilidad de 1/6 .

Ahora veamoslo de otra forma.

Si queremos que al lanzar 2 dados caiga 12, la única forma de lograrlo es que ambos dados caigan en 6, esto es, los casos favorables son uno. Para los casos posibles tenemos que contar de cuántas formas pueden caer los dados, o sea: cada dado tiene 6 posibilidades y por cada una de éstas, el otro dado tiene 6 posibilidades también, entonces los casos posibles son:
$6 \times 6 = OR_6{}^2 = 6^2 = 36$

De modo que la probabilidad de que 2 dados caigan en 12 es 1/36.

¿cuál es la probabilidad de que al lanzar 2 dados caiga el número 7?

Veamos los casos favorables:

Para que caiga 7, puede suceder cualquiera de las siguientes combinaciones de caras de los dados:

DADO 1	DADO 2
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1

Son 6 distintas combinaciones, entonces los casos favorables son 6. Los casos posibles ya sabemos que son 36, por lo tanto la probabilidad de que caiga 7 es:

6/36 = 1/6.

De donde observemos que es más probable que caiga 7 a que caiga 12, tal y como sucede en la realidad ¿no?.

¿Cuál es la probabilidad que caiga 4, por ejemplo?

Casos favorables:

DADO 1	DADO 2
1	3
2	2
3	1

Por lo tanto la probabilidad es: 3/36 = 1/12

Entonces la probabilidad de que caiga 4 es mayor que la probabilidad de que caiga 12 pero menor que la probabilidad de que caiga 7.

Nótese que este es un experimento en donde la probabilidad de cada uno de los eventos no es la misma, pero de cualquier manera, si sumamos las probabilidades de todos los eventos obtendremos la probabilidad de los eventos posibles, es decir, obtendremos 1.

El lector puede analizar más este experimento de los dados para obtener más resultados y comprobar que todo concuerda con lo que hemos experimentado todos en la vida diaria.

PROBLEMA.

Se tiene una urna con r bolas rojas y n bolas negras. Si extraemos una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraida sea roja?.

Como antes, debemos encontrar los casos posibles y los casos favorables. Los casos posibles son el número total de bolas que tenemos en la urna, o sea, son r+n ya que podemos extraer cualquiera de las r+n bolas. Como solo nos interesa que salga una roja y tenemos en total r bolas rojas, los casos favorables son r; de donde la probabilidad de que la bola sea roja es: $r/(r+n)$.

¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraida sea negra?

Análogamente al anterior, la probabilidad que buscamos es: $n/(r+n)$.

¿Qué sucede si sumamos ambas probabilidades?

$$\frac{r}{r+n} + \frac{n}{r+n} = \frac{r+n}{r+n} = 1$$

Como habíamos observado, la suma es la probabilidad de los casos posibles ya que estos 2 eventos son los únicos posibles en este experimento.

Si ahora quisiéramos extraer 2 bolas al mismo tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean rojas?

Como se observa, el problema es siempre el de contar los casos posibles y los casos favorables, entonces de alguna manera necesitamos saber contar y esto lo haremos en general con todo lo que hemos tratado de hacer en los tres capítulos anteriores en este trabajo.

Veamos cuales son los casos posibles. Debemos observar que el problema es sacar las dos bolas al mismo tiempo. Los casos posibles son todas las formas de escoger 2 bolas de las r+n que tenemos en total, o sea C_{n+r}^{2} .Y los casos favorables son todas las formas de escoger 2 bolas rojas de un total de r que disponemos;

esto es C_r^2, por lo que la probabilidad de que las 2 bolas sean rojas es:

$(C_r^2) / (C_{n+r}^2)$

De manera similar, la probabilidad de que las 2 bolas sean negras es:

$(C_n^2) / (C_{n+r}^2)$

Ahora si se quiere encontrar la probabilidad de que una sea negra y otra roja, tenemos:

Los casos posibles son los mismos C_{n+r}^2, pero los casos favorables no son los mismos que en el evento anterior, éstos debemos contarlos de manera diferente. Se tienen n+r bolas, para sacar una negra tenemos n posibilidades y por cada una de estas se tienen r posibilidades de sacar una roja, esto es, los casos favorables son nr, de donde la probabilidad de sacar una negra y una roja es:

$(nr) / (C_{n+r}^2)$

Ahora sumemos las probabilidades de los tres únicos eventos en este experimento:

$$\frac{C_r^2}{C_{n+r}^2} + \frac{C_n^2}{C_{n+r}^2} + \frac{nr}{C_{n+r}^2} = \frac{C_r^2 + C_n^2 + nr}{C_{n+r}^2} =$$

$$\frac{r(r-1) + n(n-1) + 2nr}{(n+r)(n+r-1)} = \frac{(r+n)(n+r-1)}{(n+r)(n+r-1)} = 1$$

Veamos ahora cómo cambia la probabilidad al modificar un poco el experimento.

Se tiene una urna con n bolas negras y r bolas rojas. El experimento consiste en extraer una bola y anotar el color de ésta, luego regresarla a la urna y hacer una segunda extracción y anotar el colo de la segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de obtener, de esta manera, 2 bolas rojas?

Para la primera extracción tenemos que hay r/(r+n) posibilidades de sacar una bola roja y para la segunda extracción, como se regresa la bola a la urna, tenemos de nuevo r/(r+n) posibilidades de sacar una bola roja, de manera que la probabilidad de sacar 2 rojas es:

$$\frac{r}{r+n} \times \frac{r}{r+n}$$

Ya que por cada una de las posibilidades en la primera extracción, tenemos todas las de la segunda.

Viéndolo ahora como los casos favorables entre los casos posibles, tenemos:

Los casos favorables en la primera extracción son r, pero por cada uno de éstos, hay r casos favorables en la segunda extracción por lo que son r^2 casos favorables al extraer las dos bolas.

Para los casos posibles tenemos que en la primera extracción son n+r, que ya habíamos analizado y para la segunda tenemos exactamente la misma situación, por lo que los casos posibles son n+r por cada uno de los n+r de la primera extracción. Así la probabilidad de extraer 2 bolas rojas es: $r^2 / (n+r)^2 = (r/[n+r])^2$

De la misma manera, la probabilidad de extraer 2 negras es: $(n/[n+r])^2$.

¿Cuál es la probabilidad de extraer una negra y una roja?

Para que la primera extracción sea roja se tienen $r/(n+r)$ posibilidades y para que la segunda sea negra se tienen $n/(n+r)$ posibilidades, por lo que la probabilidad de que la primera sea roja y la regunda negra es:

$$\frac{rn}{(n+r)^2}$$

De la misma manera, la probabilidad de que la primera sea negra y la segunda roja es:

$$\frac{nr}{(n+r)^2}$$

De modo que sumando los cuatro posibles eventos de este experimento tenemos:

$$\frac{r^2 + 2nr + n^2}{(n+r)^2} = 1$$

Que es, como esperábamos la probabilidad de los casos posibles o lo que se llama en Probabilidad el evento seguro.

¿Cuál es la probabilidad de extraer k bolas rojas?

Si debemos extraerlas las k juntas, la probabilidad es: C_r^k / C_{n+r}^k

Si el experimento permite ir regresando las bolas a la urna, la probabilidad es: $r^k / (n+r)^k$

PROBLEMA.

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 4 monedas salgan 2 soles y 2 águilas?

Representemos las 4 monedas como:

1 2 3 4

A A S S

Cada una de estas monedas tiene 2 opciones, por lo tanto el número de casos posibles es:

$2x2x2x2 = OR_2{}^4 = 2^4$

Si se quiere que 2 monedas caigan en águila y 2 en sol, se tiene por ejemplo:

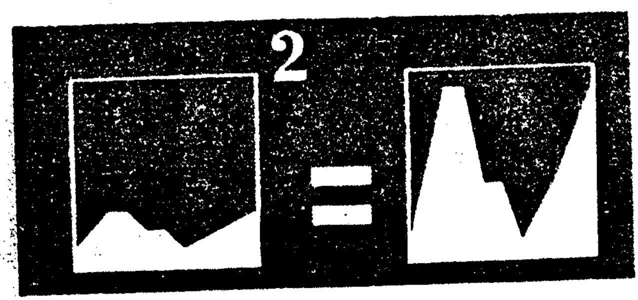
A A S S

Pero considerando todas las formas en que se pueden obtener 2 águilas y 2 soles, tenemos que $C_4{}^2$ son los casos favorabes.

De modo que la probabilidad de que 2 monedas caigan en águila y 2 en sol es:

$$\frac{C_4{}^2}{OR_2{}^4} = \frac{(4x3)\div 2}{2^4} = \frac{3}{8}$$

Dejamos al lector experimentar en las variantes que se ocurran a este problema.



PROBLEMA

Recordemos el problema de las urnas con r bolas rojas y n bolas negras en donde se permitía el reemplazo. Si p es la probabilidad de que saquémos una bola roja entonces $p = r/(n+r)$ y si q es la probabilidad de sacar una negra, tenemos que $q = n/(n+r)$. De modo que en efecto la probabilidad de sacar una bola de cualquier color en una sola extracción (el evento seguro) es $p+q = r/n+r + n/n+r = 1$.

Ahora veamos qué sucede para una segunda extracción.

La probabilidad de sacar 2 bolas rojas en 2 extracciones con reemplazo es $r^2/(n+r)^2 = p^2$. La probabilidad de sacar 2 bolas negras es $n^2/(n+r)^2 = q^2$. Y por último la probabilidad de que sean de distinto color es $rn/(n+r)^2 + nr/(n+r)^2 = 2rn/(n+r)^2 = 2pq$.

De modo que la probabilidad de que sean de cualquier color (el evento seguro) es:

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2 = 1^2 = 1$$

¿Cuál esla probabilidad de que en 3 extracciones con reemplazo las 3 bolas sean rojas?

Como el experimento es con reemplazo, la probabilidad de sacar 3 rojas es p^3

¿Cuál es la probabilidad de sacar 2 bolas negras y una roja en 3 extracciones con reemplazo?

La probabilidad de sacar una negra en la primera extracción es q, la probabilidad de sacar una negra en la segunda extracción es q también y la probabilidad de sacar una roja en la tercera extracción es p. Pero no nos interesa en qué orden hayan ido saliendo las bolas, entonces tenemos que considerar también cuando hayan salido por ejemplo primero la roja y después las negras,ó la roja en la segunda extracción, por lo que se tienen 3 eventos posibles que son: nnr, nrn y rnn; y la probabilidad de cada uno de ellos respectivamente es q^2p, qpq y pq^2. De manera que la probabilidad de sacar 2 negras y una roja en tres extracciones con reemplazo es:

$$q^2p + qpq + pq^2 = 3pq^2$$

De forma equivalente, la probabilidad de sacar 2 rojas y una negra es: $3qp^2$ y la probabilidad de sacar tres negras es q^3.

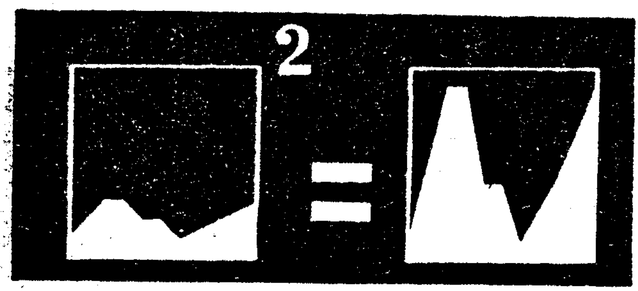
Ahora, ¿Cuál será la probabilidad del evento seguro en este experimento? Por un lado ya sabemos que ésta es 1, por otro sabemos que es la suma de todos los eventos posibles y además sabemos que la probabilidad de sacar una bola de cualquier color en una extracción es $(p+q)=1$, la probabilidad de sacar 2 bolas de cualquier color en 2 extracciones es $(p+q)(p+q)=(p+q)^2=1$ y entonces tenemos que la probabilidad del evento seguro en tres extracciones es:

$$1=(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$$

Donde cada uno de los sumandos nos da la información de a qué evento se refiere esa probabilidad.

EJERCICIO.

¿Cuál es la probabilidad de que en una extracción de m bolas con reemplazo, k de ellas sean rojas y m-k sean negras? Demostrarlo.



PROBLEMA

Se tiene cierto número de cajas con 25 artículos cada una y se quiere obtener el control de calidad, para lo cual se sacan 5 artículos de una caja y si ninguno está defectuoso, se aprueba la caja completa.

a) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar una caja si contiene exactamente un artículo defectuoso?

Los casos posibles son las combinaciones de 25 tomadas de 5 en 5, o sea C_{25}^{5}. Los casos favorables son las formas de escoger 5 artículos de los 24 que no son defectuosos, o sea C_{24}^{5} ya que solo hay un artículo defectuoso. Entonces la probabilidad de que se apruebe una caja que tiene exactamente un artículo defectuoso es:

$$\frac{C_{24}^{5}}{C_{25}^{5}}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar una caja, si contiene 2 artículos defectuosos?

Casos posibles $= C_{25}^{5}$

Casos favorables $= C_{23}^{5}$

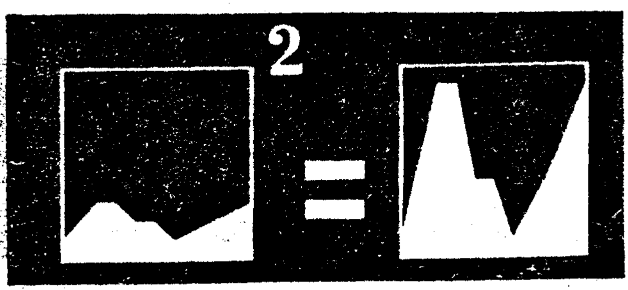
Entonces la probabilidad de que se apruebe la caja con 2 artículos defectuosos es:

$C_{23}^{5} \ / \ C_{25}^{5}$

c) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar una caja que contiene 3 artículos defectuosos?

La probabilidad que se nos pregunta es:

$C_{22}^{5} \ / \ C_{25}^{5}$



PROBLEMA

Dado un grupo de 36 o más alumnos, podemos apostar a que al menos dos personas tienen el mismo cumpleaños y con mucha seguridad ganaremos la apuesta. ¿por qué? ¿cuál es la probabilidad de que 2 personas tengan el mismo cumpleaños en un grupo de 36 personas?

Para resolverlo, veamos primero cuál es la probabilidad de que los 36 alumnos tengan distinto cumpleaños, o sea, la probabilidad de que no haya 2 personas con el mismo cumpleaños.

Casos favorables:

$O_{365}{}^{36} = 365 x 364 x 363 x \ldots x 328$

Casos Posibles:

$OR_{365}{}^{36} = 365 x 365 x 365 x \ldots x 365 = 365^{36}$

Entonces la probabilidad de que los 36 cumpleaños sean distintos es:

$$\frac{O_{365}{}^{36}}{OR_{365}{}^{36}} = \frac{365 x 364 x \ldots x 328}{365 x 365 x \ldots x 365} = 0.16781789$$

Así, vemos que como la probabilidad de que los 36 alumnos tengan cumpleaños distinto es muy pequeña, podemos asegurar con una probabilidad muy alta que hay 2 personas, de las 36, que tienen el mismo cumpleaños y además conforme tengamos un grupo de personas mas grande, mayor es la probabilidad de ganar la apuesta de que hay 2 personas que tienen el mismo cumpleaños.

¿Qué cantidad de alumnos debe haber para que la apuesta sea pareja?

Generalmente la respuesta inmediata es 182 ó algún número muy cercano a él, puesto que $365 \div 2 = 182.5$, pero si analizamos más lo que hemos hecho tenemos que, por ejemplo para un grupo de 182 personas la probabilidad de que no haya 2 personas con el mismo cumpleaños es:

$$\frac{O_{365}{}^{182}}{OR_{365}{}^{182}} = \frac{365 x 364 x 363 x \ldots x 185 x 184}{365 x 365 x 365 x \ldots x 365 x 365} =$$

$$1 x \frac{364}{365} x \frac{363}{365} x \ldots x \frac{184}{365}$$

Y analizando este producto se observa que los primeros factores son: el primero es 1, el segundo es casi 1, el tercero también se parece mucho a 1, etc. etc. el penúltimo y el último ya son casi ½ ; así es que este producto, se hace pequeño muy rápido ya que todos sus factores son números menores que 1.

De manera que con 182 personas es claro que con mayor razón, o bien con mayor probabilidad, ganaremos la apuesta.

Haciendo el cálculo de las probabilidades de que no haya 2 personas con el mismo cumpleaños en un grupo de k alumnos tenemos la siguiente tabla:

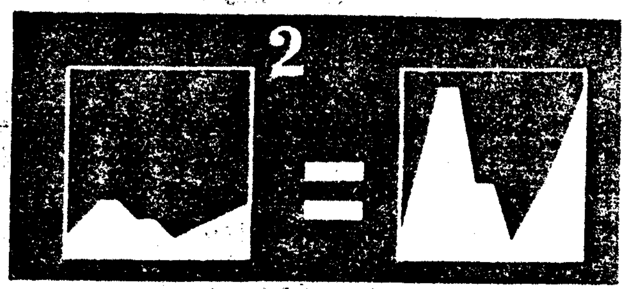
# DE PERSONAS	PROBABILIDAD DE QUE NO HAYA 2 CON EL MISMO CUMPLEAÑOS
39	0.121780334
38	0.135932170
37	0.151265989
36	0.167817890
35	0.185616757
34	0.204683140
33	0.225028139
32	0.246524760
31	0.269545356
30	0.293683760
29	0.319031448
28	0.345538528
27	0.373140698
26	0.401759177
25	0.431300270
24	0.461655736
23	0.492702782
22	0.524304681
21	0.556311679
20	0.5885616

tabla 32

Con lo que podemos observar que si el número de personas fuera 23 la apuesta sería pareja. Es mas, si se tiene un grupo con un número menor de personas, podemos perder con mayor probabilidad.

Recomendación:

¡Antes de apostar, cuéntese el número de personas que hay en el grupo!.



PROBLEMA

LEYES DE HARDY-WEIMBERG

G. Hardy era un matemático especialista en Teoría de Números, refutó con argumentos matemáticos a un crítico de Mendel con respecto a que después de varios cruzamientos, los chícharos, o cualquier población, tendría solamente la característica dominante y desaparecería la recesiva.

Veamos como fué que lo hizo.

Las hipótesis son:

1) Hay 2 rasgos característicos para cada individuo.

2) Cualquier individuo, masculino o femenino, tiene la misma posibilidad de tener uno u otro rasgo.

3) La población es lo suficientemente grande para que todas las cruzas tengan la misma probabilidad de mezclarse.

Tomaremos como ejemplo el de los chícharos.

Uno de los mecanismos simples para la transmisión de diversos rasgos y características mediante la herencia es llevado a cabo a través de pares de genes, cada uno de los cuales puede ser de dos tipos, por ejemplo A (amarillo) y V (verde). Un individuo (chícharo) puede tener cualquiera de las siguientes combinaciones: AA, AV ó VV (solo escribimos AV y no VA ya que genéticamente son la misma). Usualmente los chícharos (en este caso) con las combinaciones AA y AV son virtualmente iguales respecto a las características particulares, es decir, en este caso puede suceder que los 2 chícharos se vean amarillos. En tales casos el gene A se dice dominante respecto al gene V. Un individuo (chícharo) se dice que es <u>dominante</u> (D) respecto a esta característica si tiene los genes AA, recesivo (R) si tiene los genes VV y heterocigoto (H) si tiene la mezcla AV (ó VA que son la misma).

La suposición básica de la genética en la cruza es que los genes de los "hijos" se seleccionan al azar de los genes de los "padres"; es decir, es igualmente probable que uno u otro gene del par de genes de los "padres" sea transmitido al descendiente. El "hijo" de dos "padres" dominantes (AA) debe por tanto ser dominante ya que solo hay genes A disponibles para la transmisión. La cría de dos "padres" recesivos (VV), análogamente, debe ser recesivo. El "hijo" de un "padre" recesivo (VV) y uno dominante (AA) debe ser heterocigoto (AV). Si se cruzan un dominante (AA) y un heterocigoto (AV), la cría debe obtener un gene A del "padre" dominante y tiene una probabilidad de ½ de obtener un gene A o uno V del "padre" heterocigoto. Por lo tanto la cría puede ser dominante o heterocigoto con una probabilidad de ½.

Hagamos un esquema en donde pongamos todas las posibilidades.

♂ \ ♀	D AA	H AV	R VV
D = AA	AA	AA AV AA AV	AV
H = AV	AA AA AV AV	AA AV AV VV	AV AV VV VV
R = VV	AV	AV VV AV VV	VV

Donde de nuevo vemos que si se cruza un AA con un AV, la mitad de los descendientes serán AA y la otra mitad serán AV. Si se cruza un AV con otro AV, ¼ de los descendientes serán AA, ¼ serán VV y ½ serán AV.

Nos preguntamos ahora ¿Cuál es la probabilidad de encontrar uno dominante? ó ¿cuál es la proporción que guardan los dominantes en la población total?

Recordemos que dominante es D=AA.

Suponiéndo que todos se cruzan con todos y que existe el mismo promedio de "hijos" para cada uno:

Sea p(D) la probabilidad de encontrar dominante, esto es:

$$p(D)=\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}=\frac{\text{\# de individuos con AA}}{\text{\# total de individuos}}=\frac{D}{D+H+R}$$

Y la probabilidad de encontrar uno recesivo o bien uno heterocigoto será:

$$p(R)=\frac{\text{\# de individuos con VV}}{\text{\# total de individuos}}=\frac{R}{D+H+R}$$

$$p(H) = \frac{\#\text{de individuos con AV}}{\#\text{ total de individuos}} = \frac{H}{D + H + R}$$

Escribamos de nuevo la tabla sintetizando un poco los resultados como sigue:

♂ \ ♀	D	H	R
D	AA	AA | AV	AV
H	AA / AV	AA | AV / AV | VV	AV / VV
R	AV	AV | VV	VV

Sean N = D + H + R, p(R) = r, p(H) = h y p(D)= d los casos posibles y las probabilidades de encontrar un recesivo, heterocigoto o dominante respectivamente.

Ahora nos preguntamos ¿cuántos de cada uno hay en la siguiente generación? ó ¿cuál es la proporción que guardan en la siguiente generación?

Llamemos D', H', R' los de la siguiente generación.

¿Cuántos dominantes habrá?

En la siguiente generación tenemos que los AA provienen del ángulo superior izquierdo del último esquema como sigue:

	D	H	
D	AA	AA	...
H	AA	AA	...
	...	...	...

Entonces debemos sumar los cuatro casos en que resultan AA que son:

$$D \times D + D \times H/2 + H \times D/2 + H \times H/4 = D^2 + DH + H^2/4 = (D+H/2)^2 = D'$$

Donde como ya dijimos D' es el número de dominantes en la siguiente generación.

Así, el número de heterocigotos en la siguiente generación es:

$DH/2 + DR + HD/2 + HH/2 + HR/2 + RD + RH/2 =$
$DH + 2DR + H^2/2 + HR = D(H + 2R) + H(H/2 + R) =$
$2D(H/2 + R) + h(H/2 + R) = (2D + H)(H/2 + R) =$
$2(D + H/2)(R + H/2) = H'$

Y el número de recesivos en la siguiente generación es:

$HH/4 + HR/2 + HR/2 + RR = H^2/4 + HR + R^2 =$
$(R + H/2)^2 = R'$

De donde sabemos que en total habrá:

$(D+H/2)^2 + 2(D+H/2)(R+H/2) + (R+H/2)^2 =$
$[(D+H/2) = (R+H/2)]^2 = (D + R + H)^2 = N^2$

Por lo tanto

$D' + H' + R' = N^2 = N'$

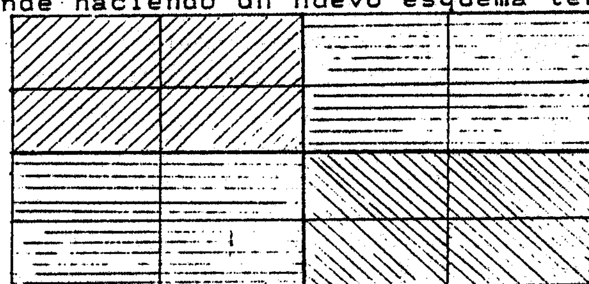
¿Cuáles serán ahora las nuevas proporciones?

$p(D') = d' = [(D+H/2)^2] / N^2 = [(D+H/2)/H]^2 =$
$(d + H/2N)^2 = (d + h/2)^2$

Y de la misma manera tenemos:

$h' = 2(d + h/2)(r + h/2)$
$r' = (r + H/2)^2$

De donde haciendo un nuevo esquema tenemos:



Y observemos que aunque empezáramos con alguna distribución que no cumpla con esta proporción, lo que se obtiene en la segunda generación forzosamente tiene que cumplirla.

Ahora, contando cuantas A individuales había originalmente (en el esquema) se tiene:

Hay 2 A's por cada D y una A por cada H entonces tenemos en total 2D + H A's y contando cuantas hay en total (de las individuales) en el esquema tenemos:

2 letras por cada individuo y eran N individuos, por lo que en total hay 2N individuales, entonces;

$d' = d + h/2 = (2D + H)/2N$ que es la proporción de A individuales que hay en total

Sean $p = d + h/2$ y $q = r + h/2$ las proporciones de rasgos amarillos (A) ó verdes (V) que hay individualmente.

Nótese que $p+q=N$

La reglita que hemos encontrado es:

Primera generación: d, h, r, la proporción de genes individuales que hay es:

$p = d + h/2$ y $q = r + h/2$

Segunda generación: d', h', r' donde $d'=p^2$, $h'=2pq$ y $r'=q^2$ la proporción de genes individuales será:

$p' = d' + h'/2 = p^2 + pq = p(p+q) = p$

$q' = r' + h'/2 = q^2 + pq = q(p+q) = q$

De donde observamos que si cambian d, r y h, de todos modos las proporciones de genes individuales no cambian.

¿Qué sucedería en la tercera generación? ¿cuánto será d''?

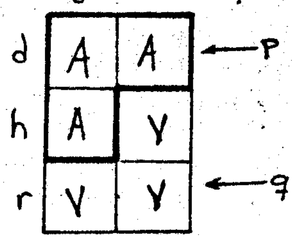
Veamos:

$d'' = p'^2 = p^2 = d'$

$h'' = 2p'q' = 2pq = h'$

$r'' = q'^2 = q^2 = r'$

De manera que la proporción entre ellos se mantendrá igual siempre.



La proporción entre los genes individuales siempre será la misma.

	D AA		H AV		R VV	
D-AA	AA	AA	AA	AV	AV	AV
	AA	AA	AA	AV	AV	AV
H-AV	AA	AA	AA	AV	AV	AV
	AV	AV	AV	VV	VV	VV
R-VV	AV	AV	AV	VV	VV	VV
	AV	AV	AV	VV	VV	VV

EJERCICIOS.

1 .- En un estante hay 12 libros. ¿De cuántas formas se pueden escoger 5 de éstos de modo que no haya 2 juntos?

¿Y si son n libros y se quieren sacar k de ellos de modo que no haya 2 juntos?

¿Y si son n libros y se quieren sacar k de ellos de modo que no haya m juntos?

2 .- Demostrar

$C_{n+m}^{k} = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0$

a) Por Inducción Matemática.

b) Conceptualmente, es decir, usando el concepto de "combinación" como subconjunto.

c) Usando la fórmula $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

d) Interpretar geométricamente los casos k=2 y k=3

3 .- Ocho muchachas forman una ronda. ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar en circulo?

a) Si estuviesen paradas, sin moverse.

b) Si giraran(en su misma posición de círculo)

c) Lo mismo, si son n muchachas.

4 .- En el juego del dominó, 4 jugadores dividen en partes iguales 28 fichas. ¿De cuántas formas pueden hacerlo?

5 .- ¿De cuántas maneras se pueden escoger en el tablero de ajedrez, una casilla blanca y una negra que no estén en una misma horizontal ni vertical?

6 .- ¿De cuántas maneras se pueden repartir 10 hongos blancos, 15 setas y 8 trufas entre 4 niños?

Analiza todas las posibilidades.

7 .- ¿Cuántos monomios de grado n en 2 variables con coeficiente 1 hay?

Ejemplo: de grado 1 solo son x y y o sea 2,
de grado 2 son x^2, xy y y^2 o sea 3.

¿Cuántos hay en k variables?

8 .- En un tablero de ajedrez, ¿ de cuántas formas se pueden colocar 8 torres de manera que sí se puedan comer?

9 .- En un tablero de ajedrez, ¿de cuántas formas se pueden colocar 8 torres de manera que no se puedan comer?

10.- ¿Cuántas fichas de dominó se pueden formar suponiendo que se dispone de n símbolos?

11.- ¿Cuál es el número de itinerarios de longitud mínima que, sobre el tablero de ajedrez, puede seguir una torre para ir desde una esquina hasta la diagonalmente opuesta?

12.- Con n símbolos ¿cuántas palabras distintas de m letras se pueden construir?

13.- En una cierta ciudad, no había dos habitantes con igual cantidad de dientes. ¿Cuál puede ser la población máxima de esta ciudad, si el mayor número de dientes es igual a 32?

14.- Dado un candado con cinco círculos con 12 letras cada uno. ¿Cuántas combinaciones infructuosas pueden realizarse en un candado así?

15.- Se tiene una computadora con 10000 celdas cada una de las cuales contiene 43 cifras binarias (0 ó 1). ¿En cuántos estados diferentes puede hallarse dicha computadora?

16.- Todas las personas que han habitado el actual territorio mexicano han intercambiado saludos de mano cierto número de veces. ¿Qué número de personas (par ó impar) se ha saludado de mano un número impar de veces?

17.- ¿De cuántas formas se pueden dividir 33 muchachos en 3 equipos de futbol de 11 muchachos cada uno?

Generalizar al número de formas en que se pueden dividir nk objetos en conjuntos de n objetos cada uno.

18.- Demostrar:

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1}$$

19.- Demostrar:

$$C_{k+m}^{k+1} = C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \ldots + C_{k+m-1}^k$$

20.- Encontrar los coeficientes de x^{29} y x^{37} en el desarrollo del binomio $(x+x^3)^{21}$.

21.- ¿Cuál es el mayor número de reinas que se pueden colocar en un tablero de ajedrez, de tal manera que ninguna pueda ser comida?

a) En un tablero de ajedrez de 8x8 .

b) En un tablero de nxn.

22.-Se tienen n puntos en el plano, ninguna terna es colineal. ¿Cuántas poligonales de k segmentos <u>no cerradas</u> y cuántas <u>cerradas</u> con vértices en dichos puntos pueden formarse?

23.- Dados $p+q+r$ objetos distinto. ¿De cuántas formas podemos dividir dichos objetos en 3 grupos de suerte que el primer grupo contenga p objetos, el segundo q y el tercero contenga r objetos?

24.- Demostrar:

$$C_k^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+2}^2 + \dots + C_{k+m-1}^{m-1} = C_{k+m}^{m-1}$$

o sea $\quad \Sigma C_{k+i}^i \quad$ con $i=0,1,\dots,m-1 \quad = C_{k+m}^{m-1}$

25.- ¿De cuántas formas se pueden seleccionar 3 números tomados de los números 1,2,3,...,300 tales que su suma sea divisible por 3?

26.- Considere el siguiente arreglo triangular numérico:

				1				
			1	1	1			
		1	2	3	2	1		
	1	3	6	7	6	3	1	
1	4	10	16	19	16	10	4	1
.	.	.	.					

En la primera fila de este arreglo está solo el número uno, y los números en las siguientes filas se determinan mediante la siguiente regla: cada número es la suma de los tres números más cercanos a él en la fila anterior (esto es, la suma del del número inmediatamente arriba de él mas el de la derecha de ése, ma+s el de la izquierda de ése mismo). En la enésima fila de este arreglo hay 2n+1 números, denotaremos estos números como $B_n^0, B_n^1, B_n^2, \dots , B_n^{2n}$.

Pruebe que:

a) $B_n^0 + B_n^1 + B_n^2 + \dots + B_n^{2n} = 3^n$

b) $B_n^0 - B_n^1 + B_n^2 - \dots + B_n^{2n} = 1$

c) $(B_n^0)^2 + (B_n^1)^2 + (B_n^2)^2 + \dots + (B_n^{2n})^2 = B_{2n}^{2n}$

27.- De una lista de 15 problemas sobre Combinatoria y problemas de Inducción, ¿cuántos exámenes diferentes pueden darse que incluyan 4 preguntas sobre cada uno de estos temas?

28.- Un círculo se divide en cuatro cuadrantes iguales. Se quiere pintar cada cuadrante de diferente color y se dispone de 9 distintos colores. ¿De cuántas maneras distintas puede quedar pintado el círculo?

29.- Si $O_{2n}^{4} = 127 O_{2n}^{3}$, encontrar n.

30.- ¿Cuántos triángulos existen, cuyos vértices sean vértices de un hexágono convexo dado?

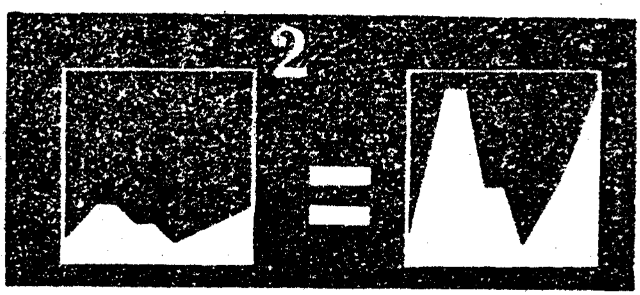
31.- Cada lado de un cuadrado se ha dividido en n partes. ¿Cuántos triángulos se pueden construir, cuyos vértices sean los puntos de división?

32.- Nueve pasajeros abordan un tren que consiste de 3 carros. Cada pasajero selecciona al azar en cual carro ha de viajar. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) Viajen 3 personas en el primer carro?

b) Viajen 3 personas en cada carro?

c) Viajen de tal manera que queden distribuidos en los carros como: 2 en uno, 3 en otro y 4 en el otro carro?



CONCLUSIONES.

Sabemos que esta forma de enseñanza requiere de más trabajo, tanto de parte del maestro como de parte del alumno, pero sabemos también que es más productiva tanto para unos como para otros. Muchas veces, en el proceso de buscar un camino distinto para resolver un problema, encontramos resultados que no imaginábamos que tuviesen algo que ver con el problema planteado; a veces hasta se tienen que demostrar resultados un tanto más complicados que el problema mismo cuando buscamos distintos caminos para resolverlo, pero creemos que esto es una ventaja, es ir aprendiendo al mismo tiempo tanto la teoría que va saliendo como los procesos que se siguen en la matemática misma para ir contruyendo toda la estructura formal que nos han mostrado siempre, y que nunca nos la explican o nunca lo entendemos porque no lo hemos llevado a la práctica.

Viviendo los tropiezos, reconstruyendo la teoría necesaria, equivocándose y volviéndose a equivocar para después rectificar con todo conocimiento de lo que ocurre, en una palabra <u>haciendo</u> matemáticas, es como creo que se comprende mejor la misma.

El hacer que los alumnos traten de explicarse entre ellos mismos lo que han hecho, permite ver el problema de muchas maneras distintas, manifiesta que no todos tenemos que pensar un problema, matemático o no, de una misma forma. Les hace ver que en ocasiones debemos cambiar nuestra forma de "resolver problemas" por la simple forma de "comprender" el problema. Esto es, no existe una receta única para resolver problemas, sino en cada uno de ellos debemos buscar una forma propia de resolverlo, debemos adquirir un hábito de buscar formas y más formas de pensar.

Es muy importante que el alumno desarrolle su propia experiencia, que se pierda en el camino de buscar la respuesta a un problema, que aprenda en ese "perderse", que se vuelva a perder si es necesario y así es más seguro que cuando llegue a la respuesta correcta haya comprendido mejor un conocimiento. Claro está que no necesariamente todos los alumnos deben perderse antes de encontrar el camino correcto. No debe darle miedo a nadie el equivocarse en algún momento y después reconocer que se estaba equivocado.

Con este involucrar a los alumnos y hacer que ellos hagan matemáticas, se va construyendo la teoría y el lenguaje necesarios para la clase. Se va recapitulando y consolidando lo que los muchachos van "descubriendo". Se va avanzando en la generalización y abstracción de las matemáticas.

También se busca que los alumnos busquen soluciones geométricas, que busquen interpretaciones geométricas y en cierto sentido que los problemas que se les dan "cobren vida" de alguna manera, donde por cierto, la geometría es algo al alcance de muchos de ellos y que en la educación previa no se explota la intuición geométrica tanto como nos gustaría que se hiciera.

Es importante también ponerles problemas que tengan varias soluciones, que discutan ese tipo de problemas, que vivan situaciones reales y que comprueben que existen problemas que no solo tienen una solución e incluso hay problemas que no tienen solución alguna y que es necesario demostrar que en efecto no tienen solución.

Por último, algo que en general para el maestro es mas difícil, es dar además de la teoría que han ido redescubriendo sus alumnos, un panorama global de la matemática; un panorama que a su nivel les dé información de cuál es la teoría que estan construyendo, de dónde salió antes, que relación tiene con otras áreas y otros momentos, qué vínculo puede tener con problemas e investigaciones actuales, qué herramienta les proporciona, para qué les sirve, etc. Cuando el alumno se siente importante en cuanto a descubrir, construir, resolver, etc. es cuando podemos aprovechar más para que adquiera un conocimiento.

APENDICE a.

Recordemos que un número en base 2 se escribe solo con los dígitos 0 y 1 y recordemos que en el sistema en base 10, la posiciones de un dígito tienen un significado concreto. Por ejemplo el número 345 en base diez quiere decir que tenemos 5 unidades mas 4 decenas mas 3 centenas, esto es 5 de 1, mas 4 de 10, mas 3 de 100; y lo representamos como:

$$5\times10^{0} + 4\times10^{1} + 3\times10^{2} = 5 + 40 + 300 = 345.$$

De manera similar, un número en base dos se escribe como:

Por ejemplo el 11001_2 es 1 de 1, mas 0 de 2, mas 0 de 4, mas 1 de 8, mas 1 de 16; o sea:

$$1\times2^{0} + 0\times2^{1} + 0\times2^{2} + 1\times2^{3} + 1\times2^{4} = 11001_2 \qquad (1)$$

Pero ¿porqué es esto?

Si en la ecuación (1) sumamos los números del lado izquierdo pero en lo que significa cada uno en base 10 tenemos:

$1 + 0 + 0 + 8 + 16 = 25$

De modo que 11001 en base 2 es lo mismo que 25 en base 10.

Y si quisiéramos hacerlo al revés, dado un número en base 10 pasarlo a base 2, ¿cómo lo hacemos?

Debemos dividir el número entre la mayor potencia de 2 que esté contenida en él, luego el residuo a su vez, dividirlo entre la potencia de dos mas grande que lo contenga y así sucesivamente. Veamos un ejemplo.

Se quiere saber qué número es en base 2 el número 541.

Las potencias de 2 son:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, . . .

entonces

	1		1		1		1		1
512	541	16	29	8	13	4	5	1	11
	029		13		5		1		0

$r_n r_{n-1} \ldots r_3 r_2 r_1 r_0$ en base 2 y por el sistema posicional esto es:

$$r_n 2^n + r_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + r_3 2^3 + r_2 2^2 + r_1 2^1 + r_0 2^0$$

de donde al sumar estos números en base 10 tenemos:

$N = r_n 2^n + r_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + r_2 2^2 + r_1 2^1 + r_0 2^0$ en base 10.

Ahora, si $N = 2^n r_n + 2^{n-1} r_{n-1} + \ldots + 2^2 r_2 + 2^1 r_1 + r_0$ para pasarlo a base 2 tenemos:

$N = 2N_1 + r_0 = 2(2^{n-1} r_n + 2^{n-2} r_{n-1} + \ldots + 2r_2 + r_1) + r_0$

donde $N_1 = (2^{n-1} r_n + 2^{n-2} r_{n-1} + \ldots + 2r_2 + r_1)$ es el cociente y r_0 el residuo de dividir N entre 2.

Siguiendo con las divisiones tenemos:

$N_1 = 2N_2 + r_1 = 2(2^{n-2} r_n + 2^{n-3} r_{n-1} + \ldots + r_2) + r_1$

donde

$N_2 = 2^{n-2} r_n + 2^{n-3} r_{n-1} + \ldots + r_2$ es el cociente y r_1 el residuo de dividir N_1 entre dos.

Así sucesivamente tenemos que:

r_0 = residuo de $N/2$ y N_1 = cociente de $N/2$

r_1 = residuo de $N_1/2$ y N_2 = cociente de $N_1/2$

r_2 = residuo de $N_2/2$ y N_3 = cociente de $N_2/2$

.

.

.

r_n = residuo de $N_n/2$

De donde tenemos:

$N_2 = 2^{n-2} r_n + 2^{n-3} r_{n-1} + \ldots + r_2$

$N_3 = 2^{n-3} r_n + 2^{n-4} r_{n-1} + \ldots + r_3$

.

.

.

$N_{n-1} = 2^{n-n+1} r_n + r_{n-1} = 2r_n + r_{n-1}$

$N_n = r_n$ con $r_n = 1$ ya que si $r_n=0$ entonces no tiene sentido expresar a N como en la ecuación (1). Y si $r_n=0$ entonces n es el menor entero tal que $2^n > N$ y entonces n es el número de dígitos en base 2 que tiene el número N.

Si $r_n=1$ entonces n+1 es el menor entero tal que $2^{n+1} > N$ y así, n+1 es el número de dígitos de N en base 2.

Veamoslo en un ejemplo particular.

Sea $N = 17$, entonces

$$N = 17 = 2(8) + 1 = 2(N_1) + r_1$$
$$N_1 = 8 = 2(4) + 0 = 2(N_2) + r_2$$
$$N_2 = 4 = 2(2) + 0 = 2(N_3) + r_3$$
$$N_3 = 2 = 2(1) + 0 = 2(N_4) + r_4$$
$$N_4 = 1 = 2(0) + 1 = 2(N_5) + r_5$$
$$N_5 = 0$$

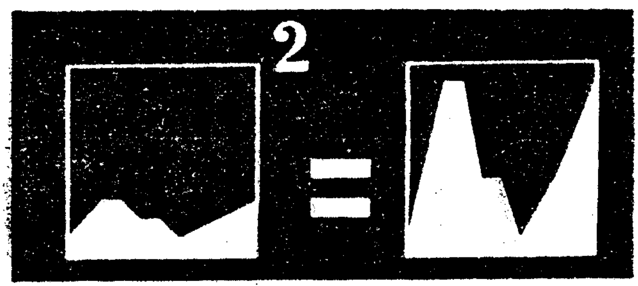
De modo que $N = r_5 r_4 r_3 r_2 r_1$ en base 2 por lo que

$$17 = 10001_2$$

Y 5 es el menor entero tal que

$2^5 = 32 > 17$ y además

5 es el número de dígitos que tiene 17 en su expansión binaria (que en nuestro problema era el número de rondas).



APENDICE b.

Queremos encontrar la solución general a la ecuación $x^2 - 2y^2 = -1$. ¿Cómo procederemos?

En general, las ecuaciones de la forma $x^2 - Ay^2 = -1$ ó $x^2 - Ay^2 = 1$ con A diferente de k^2 para alguna k en los naturales, son las llamadas ecuaciones de Pell, gracias al matemático inglés John Pell (1611-1685), quien tuvo poco que hacer con el problema en realidad. Este problema, ya había sido estudiado por los matemáticos de la India, e incluso se dice que por Arquímedes también[13].

Notemos que la condición A diferente de k^2 para alguna k en los naturales, es necesaria ya que si $A=k^2$ tenemos:

$x^2 - Ay^2 = x^2 - k^2y^2 = (x-ky)(x+ky) = 1$ ó

$x^2 - Ay^2 = x^2 - k^2y^2 = (x-ky)(x+ky) = -1$

Esto ya nos proporciona fácilmente las soluciones que son, para el primer caso:

$x-ky = 1$ y $x+ky = 1$ ó $x-ky = -1$ y $x+ky = -1$

Ya que en los números enteros los divisores de 1 son 1 y -1.

De donde obtenemos que las soluciones son:

$x=1$ y $y=0$ o bien $x=-1$ y $y=0$.

Y para el segundo caso tenemos:

$x-ky = 1$ y $x+ky = -1$ ó $x-ky = -1$ y $x+ky = 1$

Porque en los enteros, los divisores de -1 son 1 y -1 también.

De donde obtenemos que las soluciones en este caso son:

$x=0$ y $y=1/k$ o bien $x=0$ y $y=-1/k$

Por lo que se observa que $x^2 - k^2y^2 = -1$ sólo tiene solución cuando $k=1$.

Y éstas, son todas las posibilidades, de modo que consideraremos el caso en que A no es un cuadrado.

---

[13] Ver artículo de Fermat, sobre la ecuación de Pell en el libro A Source Book in Mathematics, de D. Struik citado en la bibliografía.

Si la ecuación que buscáramos fuera de la forma $x^2 - Ay^2 = 1$, vemos que siempre tiene solución ya que al menos existe la solución trivial $x=1$ y $y=0$. Cuando la ecuación es de forma $x^2 - Ay^2 = -1$ no siempre existe solución ya que dependiendo del valor de A hay o no hay solución; como el caso del problema que queremos resolver es uno de éstos, vamos a ver el procedimiento que se sigue para darles solución, en el caso particular de $A=2$.

Recodemos que ya sabemos que $x^2 - 2y^2 = -1$ tiene al menos 3 soluciones que son:
$x=7$, $y=5$; $x=41$, $y=29$ y $x=239$, $y=169$

Ya hemos visto que si la ecuación en cuestión fuese $x^2 - Ay^2 = 1$ con $A=1$ por ejemplo, se podría factorizar y encontraríamos las 2 únicas soluciones. Si la ecuación fuese $x^2 - Ay^2 = -1$ con $A=1$ también por factorización encontramos que tiene solo 2 soluciones. Entonces, un camino que se puede seguir para resolver $x^2 - 2y^2 = -1$ es buscar si existe alguna factorización que nos conduzca a las soluciones. Pero, esta ecuación no tiene factorización en los números enteros, es decir la factorización de esta ecuación es:

$$(x - \sqrt{2}\,y)(x + \sqrt{2}\,y) = -1 \qquad (a)$$

Y el número $\sqrt{2}$ no es un número natural, ni tampoco un número racional.

Pero por simple inspección, vemos que $x=1$, $y=1$ es una solución de (a) ya que $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$ entonces, aunque la factorizxación no esté en los números enteros, x y y sí son números enteros y con esto basta para decir que sí son solución de (a).

El problema ahora es buscar cómo encontarar todas las soluciones a la factorización (a) que son todas las soluciones para $x^2 - 2y^2 = -1$.

Si trabajamos en el conjunto de los números de la forma $a + b\sqrt{2}$ con a y b en los enteros, quizá encontremos todas las soluciones a (a).

Reformulémos nuestro problema. Queremos encontrar todos los números de la forma $a + b\sqrt{2}$ con a,b en los enteros tales que satisfagan $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = -1$.

Entonces trabajaremos en el conjunto:

$Z(\sqrt{2}) = \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Z \}$

Notemos que $Z(\sqrt{2})$ es obviamente cerrado bajo la suma, y también es cerrado bajo el producto, o sea: si $\alpha_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$ y $\alpha_2 = a_2 + b_2\sqrt{2}$ entonces existen a y $b \in Z$ tales que $a + b\sqrt{2} = (\alpha_1)(\alpha_2)$.

Demostración.

$$(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) = a_1a_2 + a_2b_1\sqrt{2} + a_1b_2\sqrt{2} + 2b_1b_2 = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_2b_1 + a_1b_2)\sqrt{2}$$

Sean $a = a_1a_2 + 2b_1b_2$ y $b = a_2b_1 + a_1b_2$ y como a_1, b_1, a_2 y $b_2 \in Z$ entonces a y $b \in Z$.

De manera equivalente puede probarse que $Z(\sqrt{2})$ cumple con todas las propiedades que cumplen los números enteros (y que caracterizan a Z como un dominio entero; es decir, un conjunto donde la suma y el producto tienen las propiedades usuales -de un anillo- y además se cumple que si $xy=0$ entonces $x=0$ ó $y=0$).

Sea $\alpha = a + b\sqrt{2}$ y llamémosle $\overline{\alpha} = a - b\sqrt{2}$ con a,b en los enteros, (Nótese que $\overline{\alpha} \in Z(\sqrt{2})$ también).

Nótese que en $Z(\sqrt{2})$ se cumple la siguiente proposición:

Proposición. Si $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in Z(\sqrt{2})$ se cumple $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$

Demostración.

Sean $\alpha = a+b\sqrt{2}$ y $\beta = c+d\sqrt{2}$ entonces

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})} = \overline{[ac + 2bd + (cb + ad)\sqrt{2}]} =$$
$$ac + 2bd - (cb + ad)\sqrt{2} = \underline{ac + 2bd} - \underline{cb\sqrt{2}} - \underline{ad\sqrt{2}} =$$
$$(a - b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2}) = \overline{(a + b\sqrt{2})}\,\overline{(c + d\sqrt{2})} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$$

Ahora, nuestro problema es encontrar todas las α's tales que:

$$(\alpha)(\overline{\alpha}) = -1 \qquad \text{(b)}$$

Notemos que si α_0 es solución a (b), entonces $(\alpha_0)^{2n+1}$ también es solución ya que:

$(\alpha_0)(\overline{\alpha_0}) = -1$ implica $(\alpha_0)^{2n+1}(\overline{\alpha_0})^{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$ para toda n en los números naturales.

Y de aquí tenemos una infinidad de soluciones para (b).

Ahora, ¿cómo encontramos a todas las soluciones?

Encontremos la solución más pequeña y las potencias impares de ésta, serán todas las soluciones de (b).

Sabemos que $1+\sqrt{2}$ es solución a (b) y además veamos que $1+\sqrt{2}$ es el menor número de $Z(\sqrt{2})$ tal que a y b son positivos.

$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 1-2 = -1$

Sea $\alpha_0 = 1+\sqrt{2}$. Veamos un poco cómo son las potencias de α_0. La tabla siguiente muestra algunas de estas potencias.

n	$(\alpha_0)^n$
1	$1 + \sqrt{2}$
2	$3 + 2\sqrt{2}$
3	$7 + 5\sqrt{2}$
4	$17 + 12\sqrt{2}$
5	$41 + 29\sqrt{2}$
6	$99 + 70\sqrt{2}$
7	$239 + 169\sqrt{2}$
.	
.	
.	

Como ya se demostró, para los valores impares de n, obtenemos siempre soluciones a (b). Si llamamos (c) a la ecuación $(\alpha)(\overline{\alpha}) = 1$, entonces para los valores pares de n obtenemos siempre soluciones a la ecuación (c). Ya que si

$(\alpha_0)(\overline{\alpha_0}) = -1$ entonces $(\alpha_0)^{2n}\overline{(\alpha_0)}^{2n} = (-1)^{2n} = 1$

De manera que si α_0 es el menor número en $Z(\sqrt{2})$ con a y b positivos, que satisface (b), entonces $(\alpha_0)^2$ es el menor número de $Z(\sqrt{2})$ con a y b positivos que satisface la ecuación (c). Y entonces para tener cualquier potencia impar de α_0 solo tenemos que ir multiplicando α_0 por $(\alpha_0)^2$ tantas veces como sea necesario.

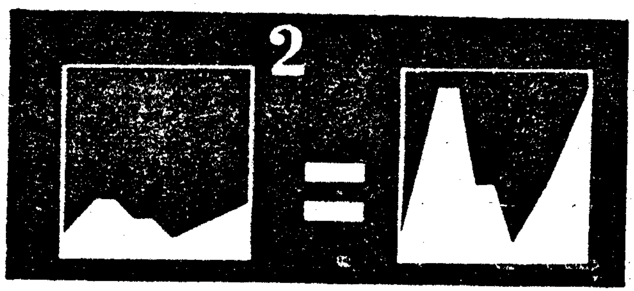
$(\overline{\alpha_0})^2$

Pero si podemos multiplicar por $(\alpha_0)^2$, también podemos <u>dividir</u> entre $(\alpha_0)^2$ (que es lo mismo que multiplicar por $(\overline{\alpha_0})^2$). Esto significa que si partimos de cualquier solución α de (b) $\alpha(\overline{\alpha_0})^2$ es otra solución "más chica". Con esta idea se puede ver que siempre podemos encontrar una solución "más chica" que una solución dada, a menos que esta solución sea α_0 misma (que al dividir entre $(\alpha_0)^2$ nos dá una solución con números negativos). Esto implica que al dividir una solución cualquiera por $(\alpha_0)^2$, $(\alpha_0)^4$, ... , $(\alpha_0)^{2n}$ en algún momento caeríamos en α_0. Luego las soluciones de la forma $(\alpha_0)^{2n+1}$ son <u>todas</u> las soluciones "positivas" de (b). Dejamos al lector verificar los detalles de estas afirmaciones.

De todo lo anterior tenemos que si β es solución de (b) entonces $\beta(\alpha_0)^2$ también lo es, y es la siguiente solución, esto es:

si $\beta = x + y\sqrt{2}$ entonces $\beta(\alpha_0)^2 = (x + y\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) =$
$(3x + 4y) + (3y + 2x)\sqrt{2} = -1$ o sea
es solución a (b).

De donde obtenemos dos fórmulas para encontrar la siguiente solución a partir de cualquier solución que tengamos.



APENDICE c

Para que al lector le quede un poco mas en general la idea del curso de Algebra Supérior que hemos impartido en la Facultad de Ciencias, trascribimos a continuación un resumen del mismo.

UN CURSO DE ALGEBRA SUPERIOR.

Dirigido a estudiantes universitarios de primer año de Matemáticas y Física, (edades de 17 años en adelante).

El programa estándard en nuestra escuela es:

I. Primer semestre: 1) Análisis combinatorio e Inducción Matemática.
2) Espacios vectoriales y Sistemas de Ecuaciones lineales.

II. Segundo semestre: 1) Divisibilidad y Congruencias.
2) Polinomios y Ecuaciones.

Cubrimos estos temas tratando de:

1) Hacer que los estudiantes trabajen problemas concretos por sí mismos, sin exposición previa de la teoría, de modo que puedan encontrar sus propias soluciones.

2) Hacer que la teoría surja naturalmente de estos problemas y sus soluciones.

3) Mostrar aplicaciones de estas teorías a otros problemas en diferentes campos.

4) Insistir en la conveniencia de representaciones gráficas o pictóricas en la solución de problemas.

5) Discutir aspectos de las soluciones históricas reales dadas a algunos problemas, las relaciones entre el desarrollo de las matemáticas y el de la sociedad, el uso de la ciencia en nuestra sociedad, etc.

(Como siempre, las limitaciones de tiempo no nos permiten hacer todo esto tan minuciosamente como quisiéramos).

Los problemas que usamos en clase y en las tareas son los siguientes:

I.1 Combinatoria e Inducción.

a) Problema del torneo de Pin-Pon: n jugadores deben efectuar un torneo con las siguientes reglas: se forman parejas al azar; cada pareja juega un partido y los perdedores se descartan. Si n es impar, algún jugador tiene la suerte de llegar a la siguiente ronda sin jugar. Se repite este proceso con los jugadores restantes. ¿Cuántos partidos deben jugarse antes de tener un solo ganador? (Tomado de Halmos).

b) Barra de chocolate. Una barra de chocolate está formada de 8x4 pequeñas piezas. ¿Cuál es el número mínimo de veces que debe partirse la barra para tener separadas todas las pequeñas piezas? (Tomada del IREM de Estrasburgo).

Estos dos problemas nos permiten poner énfasis en la necesidad de desarrollar casos particulares estableciendo diversas conjeturas, probándolas, etc. La impresionantemente simple y clara solución a la que se llega finalmente, es sólo el resultado del arduo y "sucio" trabajo previo.

c) Segundo problema del Pin-Pon. Ahora debemos jugar un "round robin"; cada quien tiene que jugar contra todos los demás. ¿Cuántos partidos se juegan ahora?

Aquí obtenemos diferentes soluciones de parte de los estudiantes, les pedimos que prueben que todas ellas son correctas y que vean las relaciones entre ellas. Introducimos una primera experiencia en inducción matemática observando la "ley de crecimiento" de las diferentes soluciones.

d) Conteo de ternas no ordenadas de un conjunto de n elementos.
(Repetimos los procedimientos antes descritos).

e) Número de subconjuntos de un conjunto de n elementos, número de diagonales de un polígono, número de regiones en las que puede dividirse un círculo mediante las cuerdas que unen los puntos de su frontera. Sumas de cuadrados, cubos, etc. (Más de inducción).

f) Encontrar un número triangular cuyo doble sea también un número triangular. (Después de que los estudiantes dan ejemplos, el maestro da una fórmula recursiva). Encontrar un número cuadradado cuyo doble es, también, un cuadrado. (Prueba por contradicción: el principio del Buen Orden; descenso infinito).

g) Problemas estándard de combinatoria: Combinaciones, permutaciones, etc. ¿Hay alguna fórmula para n!? (Como la que se encontró para la suma de los primeros n números naturales).

h) Triángulo de "Pascal". Combinaciones, coeficientes binomiales, número de rutas en una ciudad (Tomado de Polya). Identidades Combinatorias.

i) Pruebas estándard por inducción.

j) Aplicaciones a la Probabilidad, Física, Biología. (Problemas de los cumpleaños, estadísticas de Bose-Einstein, leyes de Hardy-Weimberg).

1.2 Espacios Vectoriales y Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Suponemos que los estudiantes tienen experiencia previa con problemas referentes a ecuaciones lineales, la idea principal es tratar de que se den las nociones de dependencia lineal, bases, etc., a través de problemas se encuentra la solución de ecuaciones lineales. Se mencionan algunos acertijos en conexión con determinantes y permutaciones pares e impares.

II.1 Divisibilidad y Congruencias.

a) Problema de las jarras: medir l litros con dos jarras con capacidad de m y n litros. ¿Cuáles números pueden medirse? (Conduce al máximo común divisor como combinación lineal de los números)!

b) Problemas estándard encaminados a las ecuaciones diofantinas.

c) Calendario Maya: consiste de 20 símbolos, digamos A,B,C,..., y 13 números; los días sucesivos son A1, B2, C3,...

d) Problemas de engranes: un engrane de n dientes está conectado con uno de m. Problemas de bolas de billar.

e) Algoritmo de Euclides también para números reales. Razón áurea y otros números irracionales.

f) Números primos y factorización. Se mencionan problemas resueltos y no resueltos en la teoría de números primos.

g) Problemas de horas, días de la semana, etc. que conducen a la idea de congruencia. Problemas de calendario: ¿En qué día de la semana es más frecuente que caiga el 1o. de enero? (Con distintas reglas respecto a los años bisiestos). Otros problemas que tienen periodicidad. La "prueba del nueve", etc.

h) Propiedades de congruencias, resolver congruencias lineales.

i) Clases de congruencias; se definen más o menos los anillos y los campos.

j) Codificación usando clases de congruencias. El código secreto de Rivest-Shamir-Adleman; se mencionan los teoremas de Fermat y Euler y el maestro los demuestra.

II.2 Polinomios y Ecuaciones.

Aquí nuevamente no se dan problemas concretos. Solución por radicales de ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grados. Se menciona la imposibilidad para las de quinto grado. Los números complejos se introducen como una necesidad para tratar el caso irreducible de la cúbica. Algebra y Geometría de números complejos. Un argumento geométrico para el Teorema Fundamental del Algebra.

El Teorema del Factor para polinomios abre el camino para una relación entre la solución de ecuaciones y una teoría de divisibilidad para polinomios, análoga a la de los enteros. Raíces comunes y raíces múltiples. Introducción a métodos numéricos. Regla de los signos de Descartes y métodos de Horner y Newton.

(Esto es un burdo bosquejo del curso. Se necesita precisar y completar más en varios puntos).

Los cursos a los que nos hemos referido aquí, han estado a cargo del Dr. Santiago López de Medrano y como ayudante Julieta Verdugo Díaz. (Ambos trabajando en el Grupo de Enseñanza de las Matemáticas, del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM).

BIBLIOGRAFIA.

GOLOVINA, L. I. y YAGLOM, I. M. Inducción en la Geometría. Ed. MIR. 1981

SOMINSKII, I. S. El Método de la Inducción Matemática. Ed. LIMUSA 1982

GARDNER, MARTIN ¡Ajá! Inspiración ¡ajá! Ed. LABOR 1981

VILENKIN, N. ¿De cuántas formas? Combinatoria Ed. MIR 1972

*COURANT Y ROBINS ¿Qué es la Matemática? AGUILAR 1979

YAGLOM, A. M. y YAGLOM, I. M. Challenging Mathematical Problems with elementary solutions Vol. 1 Combinatorial Analysis and Probability Theory HOLDEN-DAY 1964

*POLYA, G. Cómo Plantear y Resolver Problemas. TRILLAS 1984

*POLYA, G. Matemáticas y Razonamiento Plausible. TECNOS 1966

*POLYA, G. Mathematical Discovery

NEWMAN, JAMES R. Sigma, El mundo de las Matemáticas. GRIJALBO 1969

KOYRé, ALEXANDRE Estudios de Historia del Pensamiento científico. Bonaventura Cavalieri y la Geometría de los Continuos SIGLO XXI 1980

SMITH, DAVID EUGENE History of Mathematics Vol II DOVER 1958

STRUIK, DIRK J. Historia Concisa de las Matemáticas. IPN 1980

RADEMACHER, HANS Y TOEPLITZ OTTO Números y Figuras. Matemáticas para todos ALIANZA 1970.

COLERUS, EGMONT Breve Historia de las Matemáticas DONCEL 1973

STRUIK, DIRK J. A Source Book in Mathematics HARVARD UNIVERSITY PRESS 1969.

anónimo Elementos de Algebra. CAJA DE AHORROS DE FRANCIA. 1877

*HALMOS, P.R. The teaching of problem solving artículo, American Mathematical Montly. Vol. 82, 466-470, 1975

GARDER, MARTIN Nuevos Pasatiempos Matemáticos. ALIANZA 1984

*LOPEZ DE MEDRANO, SANTIAGO Lenguajes Simbólicos. ANUIES 1973

LOPEZ DE MEDRANO, SANTIAGO Modelos Matemáticos. TRILLAS 1981

LIU, C.L. Introduction to Combinatorial Mathematics. MC.GRAW HILL 1968

*ALEKSANDROV, KOLMOGOROV, LAURENT, Mathematics its content, Methods and Meaning. MIT.PRESS 1969

BEAUMONT, R.A. y PIERCE, R. The algebraic foundations of Mathematics. ADDISON-WESLEY 1963

DODGE, CLAYTON W. Sets, Logic and numbers. PRINDLE, WEBER & SCHMIDT 1970

NORTHROP, EUGENE P. Paradojas Matemáticas. UTEHA 1989

KASNER, E. y NEWMAN, J. Matemáticas e Imaginación. SALVAT 1987

BEILER, ALBERT H. Recreations in Theory of Numbers DOVER 1963

LUCHNIK, N. Porqué me parezco a mi padre. MIR 1979

*HALMOS, P.R. The Heart of Mathematics. artículo, American Mathematical Montly. Vol. 87, 519-524, 1980

DAVIS, MARTIN Hilbert's tenth Problem is unsolvable. artículo, American Mathematical Montly. Vol. 80, 233-269, 1973

CULLEN III, GEORGE The smallest Prime factor of a Natural number. artículo, Mathematics Teacher abril 1974

FERMAT, PIERRE DE The "Pell" equation. artículo del libro A Source Book in Mathematics. 29-31 1969

SIDWELL, JAMES K. Pascal's Triangle Revisited. artículo, Mathematics Teacher mayo 1973

BASIL, SISTER MARY O.P. Pascal's Pyramid. artículo, Mathematics Teacher enero 1968

HARDY, G.H. Discussion and correspondence, Mendelian proportions in a mixed population. artículo, Science julio 1908

NOTA.

Los libros marcados con "*" se recomiendan como lectura complementaria a los temas tratados en este trabajo.