Análisis Matemático

Universidad Nacional Autónoma De México

Facultad De Ciencias

TALLER DE MATEMÁTICAS:
ASESORÍAS DE ANÁLISIS

Ejercicios Propuestos & Soluciones.
PRESENTADO POR:

Lilia Araceli Guinea Domínguez.

Prólogo

El siguiente texto está dirigido a los estudiantes de las distintas licenciaturas que ofrece la Facultad de Ciencias, que estén cursando alguna materia relacionada con el análisis y , que en ocasiones, necesiten un poco de apoyo, más allá del que el que pueden encontrar en los libros o en sus cursos de la asignatura. El artículo se centra en resolver ejercicios concernientes a temas importantes que se ven en la materia de análisis matemático I; dichos ejercicios son considerados por mi como una parte esencial de un curso de análisis y serán de utilidad a lo largo de la licenciatura. Este artículo tiene como objetivo lograr que el estudiante aprenda a realizar demostraciones con este tipo de conceptos matemáticos

Este documento es realizado sin fines comerciales y con el propósito de funcionar como material de apoyo en el **Taller de Matemáticas** de la **Facultad de Ciencias**.
El material presentado fue diseñado en el entorno de LaTeX y los ejercicios que aparecen en el mismo son una compilación de ejemplos que se desarrollaron para explicar algún contenido y otros tantos fueron incorporados de ejercicios que aparecen sugeridos en los libros de uso común de álgebra superior.

Se invita al lector a utilizar este manual exclusivamente como material de apoyo o de respaldo, de alguno de sus libros de preferencia relacionados con la enseñanza del álgebra.

Ejercicios

1. *a*) Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dos sucesiones en $\mathbb{R}^{\ltimes}$, supones que $\{x_n\}$ está acotada y que $\{y_n\}$ converge a 0. Probar que $\langle x_n, y_n \rangle$ converge a 0.
   Como $y_n \to 0$, para $\dfrac{\epsilon}{\mu} > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ y $\|y_n\| < \dfrac{e}{\mu} \left[y_n \in B^0_{\frac{\epsilon}{\mu}} \right]$.
   Así, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, para $n \geq N$:

$$|\langle x_n, y_n \rangle| \leq \|x_n\| \|y_n\| \leq \mu \|y_n\| < \frac{\mu\epsilon}{\mu} = \epsilon$$

$$\therefore \langle x_n, y_n \rangle \to 0$$

   b) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X, d). Probar que:
   - $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$, cuando $n \to \infty$

   Considerando $\alpha_n = d(x_n, x_{n+1})$ y sea $\epsilon > 0$. Como $\{x_n\}$ es de Cauchy, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N, d(x_n, x_{n+1}) < \epsilon$; en particular si se toma $m = n + 1$, cuando $n \geq N \Rightarrow m = n + 1 > \mathbb{N}$ y así:

$$|\alpha_n| = \alpha_n = d(x_n, x_{n+1}) < \epsilon$$

$$\therefore \alpha_n \to 0$$

   - Dado el espacio normado $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$, dar un ejemplo de una sucesión que cumpla lo anterior y no sea de Cauchy.

   Considere $\{x_n\}$ con $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \in \mathbb{R}$ entonces :

$$\alpha_n = d(x_n, x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \text{ y } \frac{1}{n+1}_{n \to \infty} \to 0$$

   Sin embargo, si $k > n, d(x_n, x_{n+1}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{j=n+1}^{k} \frac{1}{j} \geq \frac{k-n}{k} = 1 - \frac{n}{k}$, toma $\epsilon = \frac{1}{3}$, y así

   si $n \in \mathbb{N}$ y $k > \frac{3(n)}{2} > n$ (el cual existe por Prop. Arquimedeana),

$$k \in \mathbb{N} \Rightarrow d(x_n, x_{n+1}) \geq 1 - \tfrac{n}{k} > 1 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3}$$

$$\therefore d(x_n, x_{n+1}) > \tfrac{1}{3} = \epsilon \text{ para toda } n \in \mathbb{N}, m \geq k$$

$$\therefore \{x_n\} \text{ no es de Cauchy}$$

2. Suponer que $\{p_n\}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X, d) y que alguna subsucesión $\{p_{n_j}\}$ converge hacia un punto $p \in X$. Demostrar que la sucesión completa converge hacia p.

   Demostración. Sea $\epsilon > 0$, por ser p_n una sucesión de Cauchy $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n_1, m_1 \geq N_1$

   $$|p_{n_1} - p_{m_1}| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

   Además, como $\{p_{n_j}\}$ converge a $p \in X \exists N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall j \geq N_0$

   $$|p_{n_j} - p| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

   Consideremos $N = max\{N_1, N_2\}$ y sean $n, n_j \geq N$ tales que así, aplicando la desigualdad del triángulo con p_{n_j} un elemento de la subsucesión converge.

   $$|p_n - p| \leq |p_n - p_{n_j}| + |p_{n_j} - p| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

   ■

3. Supongamos que (X, d) es una espacio métrico completo y $\{G_n\}$ una sucesión de subconjuntos abiertos densos en X. Demostrar que $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ es no vacío.

   Demostración.
   Sea $G_0 \subset X$ un subconjunto abierto no vacío de X. Vamos a demostrar que $G_0 \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$.
   Ahora, como G_1 es denso en X, entonces $G_0 \cap G_1 \neq \varnothing$ podemos tomar $x_1 \in G_0 \cap G_1$ y por ser G_0 y G_1 abiertos, $\exists 0 < \epsilon_1 < 1$ tal que $B_{\epsilon_1}(x_1) \subset G_0 \cap G_1$ y$\overline{B_{\epsilon_1}(x_1)} \subset G_0 \cap G_1$. Denotemos a $B_{\epsilon_1}(x_1) = B_1$. Realizando un procedimiento similar, como B_1 es un abierto no vacío de X y G_2 es denso en X, entonces $B_1 \cap G_2 \neq \varnothing$ y nuevamente podemos tomar $x_2 \in B_1 \cap G_2$ y por ser B_1 y G_2 abiertos $\exists 0 < \epsilon_2 < 1/2$ tal que $B_2 \subset B_1 \cap G_2$y $\overline{B_n} \subset B_{n-1} \cap G_n$, de tal manera que:

   - $\overline{B_1} \supseteq \overline{B_2} \supseteq \ldots \supseteq \overline{B_n} \supseteq \ldots$
   - $\lim_{n\to\infty} diam(\overline{B_n}) = 0$

   Entonces por el teorema de encaje de Cantor, podemos concluir que $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{B_n} \neq \varnothing$ y por lo tanto

   $$\varnothing \neq \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{B_n} \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} B_{n-1} \bigcap G_n \subseteq G_0 \bigcap \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$$

$$\therefore \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i \neq \varnothing$$

$\blacksquare$

4. Si cada $a_n > 0$, probar que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$$
$$\liminf_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$$
$$\limsup_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n}$$

Demostración.

a) Supongamos que $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < \infty$ como $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$ y $l > 0$, por lo que $\exists 0 < \gamma < l$. Además, como estamos suponiendo que $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > k \geq N$

$$\gamma < \tfrac{a_{k+1}}{a_k}$$

Así, para $k = N, N+1, \ldots, n-1$

$$\gamma < \tfrac{a_{N+1}}{a_N}; \gamma < \tfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}}; \gamma < \tfrac{a_{N+3}}{a_{N+2}} \cdots \gamma < \tfrac{a_n}{a_{n-1}}$$

Como todos los términos son positivos, podemos multiplicar cada una de estas desigualdades y obtenemos:

$$\gamma^{n-N} < \left(\frac{a_{N+1}}{a_N}\right)\left(\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\right)\left(\frac{a_{N+3}}{a_{N+2}}\right)\cdots\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$$
$$\gamma^{n-N} < \left(\tfrac{a_n}{a_N}\right)$$

Tomando raíz n-ésima y $\liminf_{n\to\infty}$ en ambos lados de la desigualdad

$$\gamma\left(\frac{a_N}{\gamma^N}\right)^{1/n} \leq (a_n)^{1/n}$$
$$\liminf_{n\to\infty} \gamma\left(\frac{a_N}{\gamma^N}\right)^{1/n} \leq \liminf_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$$
$$l \leq \liminf_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$$

$$\therefore \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$$

b) Tenemos $\{a_n\}$ una sucesión de números reales, y se define al conjunto E como el conjunto de los números $x \in \cup\{\infty, -\infty\}\mathbb{R}$ tales que $a_{n_k} \to x$ para alguna subsucesión $\{a_{n_k}\}$ y se definen $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup E$ y $\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf E$, entonces, $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup E \leq \liminf_{n\to\infty} a_n = \inf E \ \forall \{a_n\}$ sucesión real.
En particular, $\liminf_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$

c) Supongamos que $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_n+1}{a_n} = L < \infty$ como $a_n > 0 \forall n \in \ltimes$, entonces $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$ y $L > 0$, por lo que $\exists \alpha > L$. Además, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > k \geq N$

$$\tfrac{a_{k+1}}{a_k} \leq \alpha$$

Así, para $k = N, N+1, \ldots, n-1$ tenemos

$$\tfrac{a_{N+1}}{a_N} < \alpha; \tfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < \alpha; \tfrac{a_{N+3}}{a_{N+2}} < \alpha; \cdots ; \tfrac{a_n}{a_{n-1}} < \alpha$$

Como todos los términos son positivos, podemos multiplicar cada una de estas desigualdades y obtenemos

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)\left(\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right)\cdots\left(\frac{a_{N+1}}{a_N}\right) \leq \alpha^{n-N}$$

$$\left(\frac{a_n}{a_N}\right) < \alpha^{n-N}$$

Tomando raíz n-ésima y $\limsup_{n\to\infty}$ en ambos lados de la desigualdad

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \alpha \left(\frac{a_N}{\alpha^N}\right)^{1/n}$$

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \leq \alpha < L$$

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \leq s$$

$$\therefore \limsup_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n}$$

■

5. Dadas dos sucesiones reales $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ acotadas inferiormente, probar que:

   a) $\limsup_{n\to\infty} a_n + b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$

   b) $\limsup_{n\to\infty} a_n b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n)$ si $a_n > 0, b_n > 0$ para todo n, y si los límites $\limsup_{n\to\infty} a_n$ y $\liminf_{n\to\infty} a_n$ son ambos finitos o ambos infinitos.

   Demostración. (a) Nosotros tenemos que $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ o es finito y sucede lo mismo para $\limsup_{n\to\infty} b_n$. Entonces si alguno de estos dos límites superiores son infinitos, entonces

   $$\limsup_{n\to\infty} a_n + b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n = \infty$$

   Supongamos que ambos límites son finitos. Sean $\limsup_{n\to\infty} a_n = a, \limsup_{n\to\infty} b_n = b$ y $\limsup_{n\to\infty} a_n + b_n = c < \infty$. Entonces, dada $\epsilon > 0$ $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n_1 \geq N_1$ y $n_2 \geq N_2$, tenemos

   $$|a_n - a| < \tfrac{\epsilon}{4} \text{ y } |b_n - b| < \tfrac{\epsilon}{4}$$

Como $a_n > 0, b_n > 0$ y $\limsup_{n\to\infty} x_k \inf_{n\geq 0 k\geq n} \sup x_k$ entonces $a > a_n$ y $b > b_n \forall n \in \mathbb{N}$, de aquí podemos seguir que, tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$ y $n \geq N$:

$$a_n + b_n < a + b + \frac{\epsilon}{2} \tag{1}$$

Ahora, consideramos $m = N$ y como $\limsup_{n\to\infty} a_n + b_n = c < \infty$ entonces para la misma $\epsilon > 0, \exists K \geq n$ tal que:

$$c - \frac{\epsilon}{2} < a_K + b_K \tag{2}$$

Por (1) y (2) tenemos que:

$$c - \tfrac{\epsilon}{2} < a_K + b_K < a + b + \tfrac{\epsilon}{2}$$
$$c < a + b + \epsilon$$

Como ϵ es arbitraria, podemos concluir que:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n + b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

c) Para este inciso sucede lo mismo que en el anterior, si $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ o es finito y sucede lo mismo para $\limsup_{n\to\infty} b_n$. Si alguno de estos dos límites es infinito, entonces

$$\limsup_{n\to\infty} a_n b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \limsup_{n\to\infty} b_n = \infty$$

Supongamos que ambos límites son finitos y sean $\limsup_{n\to\infty} a_n = a, \limsup_{n\to\infty} b_n = b$ y $\limsup_{n\to\infty} a_n b_n = c$. Entonces, dada $\epsilon > 0 \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n_1 \geq N_1$ y $n_2 \geq N_2$, tenemos

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ y } |b_n - b| < \epsilon$$

Como $a_n > 0, b_n > 0$ y $\limsup_{n\to\infty} x_k = \inf_{n\geq 0 k\geq n} \sup x_k$ entonces $a > a_n$ y $b > b_n \forall n \in \mathbb{N}$, de aquí podemos seguir que, tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$ y $n \geq N$:

$$a_n b_n < (a + \epsilon)(b + \epsilon) = ab + \epsilon(a + b + \epsilon) \tag{3}$$

Ahora, consideremos $m = N$ y como $\limsup_{n\to\infty} a_n b_n = c < \infty$ entonces para la misma $\epsilon > 0 \ \exists K \geq n$ tal que:

$$c - \epsilon < a_K b_K \tag{4}$$

Tomando (3) y (4) tenemos que:

$$c - \epsilon < a_K b_K < ab + \epsilon(a + b + \epsilon)$$

$$c < ab + \epsilon(a + b + \epsilon + 1)$$

Nuevamente, como ϵ es arbitraria, entonces

$$c \leq ab$$

Lo que implica que:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \limsup_{n\to\infty} b_n$$

$\blacksquare$

6. Averiguar el comportamiento de $\sum a_n$ para:

   a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

   b) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$;

   c) $a_n = \left(n^{1/n} - 1\right)^n$

Solución.

a) $\sum a_n = \sum \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sum \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = \sum \left(\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = \sum \left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$

Ahora, como $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$, entonces $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < 2\sqrt{n+1}$ y así,

$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} < \sum \frac{1}{2\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{(n+1)^{1/2}}$$

y sabemos que la serie $\sum \frac{1}{k^p}$ para $p \leq 1$ diverge

$\therefore \sum \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ diverge

b) $\sum a_n = \sum \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \sum \left(\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}\right)\left(\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = \sum \dfrac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Ahora, como $\sqrt{n} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, entonces $n(\sqrt{n}) < n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, entonces

$n(\sqrt{n}) < n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \Leftrightarrow n^{3/2} < n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ y así $\frac{1}{n^{3/2}} > \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} < \sum \frac{1}{n^{3/2}}$$

y como la serie $\sum \frac{1}{k^p}$ para $p > 1$ converge

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \text{ converge.}$$

c) $\sum a_n = \sum (n^{1/n} - 1)^n$

Vamos a demostrar que $n^{1/n}$ es una función decreciente de n, para así demostrar que $n^{1/n} < 2\, \forall n \in \mathbb{N}$

Entonces, sea $n \in \mathbb{N}$ y como $n < n+1$ y por ser $f(x) = a^x$ es una función creciente para $x > 1$, entonces su función inversa $f^{-1}(x) = a^{1/x}$ es una función decreciente para $x > 1$, por lo que podemos concluir que:

$n^{1/n} < (n+1)^{1/n+1}$

$\therefore f(n) = n^{1/n}$ es una función decreciente si $n \geq 2$

Por lo tanto, el máximo lo alcanza en $n = 3$, que es $3^{1/3} = 1.4422$, entonces $n^{1/n} < 2\ \forall n \in \mathbb{N}$ y así $n^{1/n} - 1 < 1$

$\Rightarrow \sum a_n = \sum \left(n^{1/n} - 1\right)^n$ converge

$\blacksquare$

7. Calcular $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ y $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ si $\{a_n\}$ está dado por:

a) $a_n = n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

b)
- $a_n = n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \Rightarrow \{a_{6n+1}\} = \{(6_{n+1}) \sin(2n\pi + \frac{\pi}{3}\} = \{(6_{n+1}) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\} = \left\{\frac{(6_{n+1}\sqrt{3}}{2}\right\}$

  es subsucesión y $\left\{\frac{(6_{n+1}\sqrt{3}}{2}\right\} \to \infty$ cuando $n \to \infty$

  $\therefore \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \geq \infty$ para $\infty > x$ para toda y $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} = \tilde{\mathbb{R}}$ y

  $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \in \tilde{\mathbb{R}}$, entonces $\limsup\limits_{n\to\infty} = \infty$

- $a_n = n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \Rightarrow \{a_{6n+5}\} = \{(6_{n+5}) \sin(2n\pi + \frac{5\pi}{3}\} = \{-(6_{n+5} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\} = \left\{\frac{-(6_{n+5})\sqrt{3}}{2}\right\}$

  es subsucesión y $\left\{\frac{-(6_{n+5})\sqrt{3}}{2}\right\} \to -\infty$ cuando $n \to \infty$

  $\therefore \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq -\infty$ para $-\infty \leq x$ para toda $x \in \tilde{\mathbb{R}}$ y $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \in \tilde{\mathbb{R}}$, entonces

  $$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

c) $a_n = \frac{(-1)^n n}{(1+n)^n}$

Si $\alpha_n = (-1)^n, \beta_n = \frac{n}{(1+n)^n}$ entonces $|\alpha_n| \leq 1$ y $0 \leq \frac{n}{(1+n)^n} < \frac{n}{n^n} = \frac{1}{n^{n+1}}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+n)^n} = 0$$

$$\therefore \text{ Dado } \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n \geq N, \left| \frac{n}{(1+n)^n} \right| < \epsilon$$

$$\Rightarrow |a_n| = |\alpha_n \beta_n| \leq |\beta_n| < \epsilon$$

$\therefore a_n \to 0$ y así cualquier subsucesión de a_n converge y lo hace al mismo límite.
$\Rightarrow E = \{x \in \tilde{\mathbb{R}} \mid$ *una subsucesión de* $\{a_n\}$ *converge a* $x\} = \{0\}$ y
$\limsup_{n\to\infty} a_n$ y $\liminf_{n\to\infty} a_n \in E$

$$\therefore \limsup_{n\to\infty} a_n = 0 = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

■

8. Probar que $\{a_n\}$ tiene límite L y encontrar dicho L.

   a) $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, y $a_{n+2} = \sqrt{a_n a_{n+1}}$
   Demostración.
   Si $a_1 = 0$ o $a_2 = 0$, $a_n = 0$ para todo $n \geq 2$,
   entonces podemos decir que $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$ para que $a_n \neq 0$ para toda n.
   Sea $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow b_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{a_n a_{n+1}}}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}}}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n+1}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{a_{n+1}}\sqrt{b_n}} = \frac{1}{\sqrt{b_n}}$
   para toda n

$$\Rightarrow b_{n+1} = (b_1)^{-n/2} \to 1 \text{ cuando } n \to \infty.$$

   Consideremos $\prod_{j=2}^{n+1} b_j = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{b_j}}$

$$\Rightarrow (\sqrt{a_1} a_2)^{-2/5} a_{n+1} = (a_1 a_2^2)^{1/3}$$

   b) $a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ donde $b_1 = b_2 = 1$, $b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$
   Demostración.
   Primero probemos que $b_{n+2} b_n - b_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ para toda n
   Por inducción sobre n:

   - $n = 1$

   $b_3 b_1 - b_2^2 = (b_1 + b_2) b_1 - b_2^2 = (1+1)(1) - (1)^2 = 2 - 1 = 1 = (-1)^2$

$$\therefore \text{ se cumple para } n = 1.$$

   Supongamos que es válido para $n-1$, i.e., $b_{n-1} bn + 1 - b_n^2 = (-1)^n$.

   - Demostremos que cumple para n

   De $b_n + b_{n+2} - b_{n+1}^2 = (-1)(b_{n+1}^2 - b_n b_{n+2}) = (-1)(b_{n+1} b_{n+1} - b_n(b_{n+1} + b_n))$

   $= (-1)(b_{n+1} b_{n+1} - b_n b_{n+1} - b_n^2) = (-1)(b_{n+1}(b_{n+1} - b_n) - b_n^2) = (-1)(b_{n+1} b_{n-1} - b_n^2)$,

   por hipótesis: $= (-1)(-1)^n = (-1)^{n+1}$.

$$\therefore \text{ La afirmación es cierta para n.}$$

*Obs.
Por definición: $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$, $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ y $b_{n-1} = b_{n+1} - b_n$
y además $b_n \geq n$ si $n > 4$ pues sea $n = 5 \Rightarrow b_5 = b_4 + b_3 = 3 + 2 = 5 \geq 5$
Supongamos que $b_{n-1} \geq n - 1$ demostremos que $b_n \geq n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow b_n = b_{n-1} + b_{n-1} &\geq n - 1 + b_{n-2} \text{ como } n - 1 > n - 2 \\ &\geq n - 1 + n - 2 \geq 2n - 3 \geq n \text{ para } n > 4 \end{aligned}$$

En consecuencia (notemos que $b_n \neq 0$ para toda n)
$\Rightarrow |a_{n+1} - a_n| = \left|\dfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}} - \dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\dfrac{b_n b_{n+2} - b_{n+1}^2}{b_{n+1}b_n}\right| = \left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{b_{n+1}b_n}\right| \leq \dfrac{1}{n(n+1)} < \dfrac{1}{n^2}$
si $n > 4$.

Así, $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy, i.e. $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, digamos que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1 \Rightarrow$ como $b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$, tenemos que:

$$\tfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = \tfrac{b_n}{b_{n+1}} + 1 \text{ (notemos que } L \geq 1 \text{ pues } a_n \geq 1 \text{ para toda } n)$$
$$\Rightarrow L = {}^1\!/_L + 1 \Leftrightarrow L = \tfrac{1+L}{L} \Leftrightarrow L^2 = 1 + L \Leftrightarrow L^2 - L - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$L = \tfrac{1\pm\sqrt{s}}{2}$$

$$\therefore L = \tfrac{1+\sqrt{s}}{2} \text{ pues } L \geq 1$$

9. Demostrar que el producto de Cauchy de dos series absolutamente convergentes, converge absolutamente.
Demostración. Sean $\sum a_n = A$ y $\sum b_n = B$ dos series absolutamente convergentes y definamos $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Llamemos: $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$; $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$ y $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k$ (El producto de Cauchy de $\sum a_n$ y $\sum b_n$). Sean $d_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k - B_n$, y $e_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k d_{n-k}$. Entonces

$$C_p = \sum_{k=0}^{p} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{p} a_k \sum_{n=k}^{p} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{p} a_k \sum_{n=k}^{p} b_{n-k} = \sum_{k=0}^{p} a_k \sum_{m=0}^{p-k}$$

$$b_m = \sum_{k=0}^{p} a_k B_{p-k} = \sum_{k=0}^{p} a_k (B - d_{p-k}) = BA_p - e_p.$$

Vamos a demostrar que $\lim\limits_{p\to\infty} e_p = 0$

Sea $\epsilon > 0$

$$|e_p| = \left|\sum_{k=0}^{p} a_k d_{p-k}\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k d_{p-k}| = \sum_{k=0}^{N} |a_k d_{p-k}| + \sum_{k=N+1}^{p} |a_k dp - k| = \sum_{k=0}^{N} |a_k||d_{p-k}| + \sum_{k=N+1}^{p} |a_k d_{p-k}|$$

Como $\sum b_n$ es convergente entonces $d_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k - B_n$ está acotada, digamos por M y más aún $d_n \to 0$, entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|d_n| < \epsilon/2K$ con $K = \sum_{0}^{\infty} |a_k|$

$\Rightarrow \ |e_p| \ = \ \sum_{k=0}^{N} |a_k||d_{p-k}| + \sum_{k=N+1}^{p} |a_k d_{p-k}| \ \leq \ \dfrac{\epsilon}{2K} \sum_{k=0}^{N} |a_k| + M \sum_{k=N+1}^{p} |a_k| \ \leq \ \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + M \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \dfrac{\epsilon}{2K} K + M \dfrac{\epsilon}{2M} = \epsilon$

Entonces $C_p = BA_p - e_p$ cuando $p \to \infty$ implica que $C = BA$

$$\therefore C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \text{ converge}$$

■

10. Demostrar que l es punto de acumulación de $\{x_n\}$ si y sólo si existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ que converge a l.
Demostración.
$\Rightarrow$)
Como l es punto de acumulación de $\{x_n\}$ entonces para todo $\epsilon > 0$ $B_\epsilon(l) \cap \{x_n\} \neq \varnothing$.
Sea $\{x_{n_j}\}$ subsucesión de $\{x_n\}$ tal que $x_{n_j} \in B_\epsilon(l) \cap A$. Sea $\epsilon = 1/n_j$ entonces

$$d(x_{n_j}, l) < \epsilon = 1/n_j$$

$\Leftarrow$)
Sea $\{x_{n_j}\}$ subsucesión de $\{x_n\}$ que converge a l, entonces dada $\epsilon > 0$ existe N tal que $n \geq N$

$$\text{se tiene que } d(x_{n_j}, l) < \epsilon, \text{ es decir, que } x_{n_j} \in B_\epsilon^l$$

$$\therefore B_\epsilon^l \cap \{x_n\} \neq \varnothing$$

11. Sea E un conjunto de números reales positivos. Definimos $\sum_{x \in E} x = \sup_{F \in \mathcal{F}} s_F$ donde $\mathcal{F}$ es la colección de subconjuntos finitos de E y s_F es la suma finita de los elementos de F.
    a) Demostrar que $\sum_{x \in E} x < \infty$ sólo si E es finito.
    b) Demostrar que si E es numerable y $\{x_n\}$ es un mapeo uno a uno de $\mathbb{N}$ en E, entonces $\sum_{x \in E} x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$

Demostración.
(a) Supongamos que E es infinito. Entonces $\mathcal{F}$ tiene una cantidad infinita de subconjuntos finitos de E, entonces $\nexists F \in \mathcal{F}$ tal que $s_F \geq s_G \; \forall G \in \mathcal{F}$ pues, de existir, siempre podemos encontrar un elemento $s_{F'}$ que fuera una cota superior de s_F

Entonces $\sum\limits_{x \in E} x = \infty$

$\therefore E$ es finito

(b) Sabemos que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \mathcal{F} \; \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} s_n \leq \sup\limits_{F \in \mathcal{F}} s_n$. Además, dado $F \in \mathcal{F}$ y por ser $\{x_n\}$ un mapeo uno a uno de $\mathbb{N}$ en E $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\sup\limits_{F \in \mathcal{F}} s_n \leq \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} s_n$

$$\therefore \sum_{x \in E} x = \sup_{F \in \mathcal{F}} s_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

$\blacksquare$

12. Sea $a_n = \frac{n^n}{n!}$. Probar que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$$

y que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} = e$$

Demostración.

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{n!(n+1)^{n+1}}{(n+1)!n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = (1 + \frac{1}{n})^n$

$$\text{entonces } \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

- $\frac{n}{(n!)^{1/n}} = e^{\ln\left(\frac{n}{(n!)^{1/n}}\right)}$

Desarrollando el exponente:

$$\ln\left(\frac{n}{(n!)^{1/n}}\right) = \ln(n) - \ln(n!)^{1/n} = \ln(n) - \frac{1}{n}\ln(n!)$$

Para n suficientemente grande, la fórmula de Stirling nos dice que:

$$\ln(n!) \approx n\ln(n) - n$$

Como vamos a tomar el límite cuando n tiende a infinito, podemos usarla.

$\ln(n) - \frac{1}{n}\ln(n!) \approx \ln(n) - \frac{1}{n}(n\ln(n) - n) = \ln(n) - \ln(n) + 1 = 1$

$$\text{entonces: } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n!)^{1/n}}\right)\lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\frac{n}{(n!)^{1/n}}\right)} = e^{(1)} = e$$

13. Sea $a_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$. Probar que la sucesión $\{x_n\}$ converge hacia un límite p en el intervalo $1 < p < 2$.

* $a_{n+1} - a_n = 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Como

$$\begin{aligned}(n+\tfrac{1}{2})^2 = n^2+n+\tfrac{1}{4} \quad &\Rightarrow n^2+n+\tfrac{1}{4} > n^2+n\\ &\Rightarrow n+\tfrac{1}{2} > \sqrt{n(n+1)}\\ &\Rightarrow (n+1) - \sqrt{n(n+1)} > \tfrac{1}{2}\\ &\Rightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > \tfrac{1}{2\sqrt{n+1}}\\ &\Rightarrow 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - \tfrac{1}{\sqrt{n+1}} > 0\\ &\Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0\end{aligned}$$

$\therefore a_{n+1} > a_n$

$\therefore \{a_n\}$ es creciente

** Además,

$1 = (k+1) - k = (\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \Rightarrow \sqrt{k+1} - \sqrt{k} =$

$$\tfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \leq \tfrac{1}{2\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}} \text{ y } < \sum_{k=1}^{n-1}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

es telescópica

$$\Rightarrow \sqrt{n} - 1 < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{k} - 2 < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < 2$$

$$\therefore \{a_n\} \text{ está acotada.}$$

Por * y ** $\{a_n\}$ converge a algún p tal que $p \leq 2$ y como es creciente, $a_n > a_1$ para toda $n \in \mathbb{N}$;

$$a_1 = 2\sqrt{1} - \tfrac{1}{\sqrt{1}} = 2 - 1 = 1 \Rightarrow a_n > 1 \text{ para toda } n \in \mathbb{N}$$

$$\therefore \text{ el límite está en el intervalo } 1 < p < 2$$

$\blacksquare$

14. Si $s_1 = \sqrt{2}$ y $s_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{s_n}}$ $n = 1, 2, 3, \ldots,$
    Demostrar que $\{s_n\}$ converge, y que $s_n < 2$ para $n = 1, 2, 3, \ldots,$
    Demostración.
    Como $\sqrt{2} < 2$, entonces si $s_n < 2$ entonces $s_{n+1} < \sqrt{2+2} = 2$, en consecuencia, se sigue por inducción que $\sqrt{2} < s_n < 2$ para toda n pues para $n = 1$:

    $$\sqrt{2} < s_1 < 2, \;\; s_1 = \sqrt{2} \quad \therefore \sqrt{2} < 2.$$

    Supongamos que $\sqrt{2} < s_n < 2$ y demostremos que se cumple para $n + 1$.

    $$\Rightarrow s_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{s_n}} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{2 + 2} = 2$$
    $$\Rightarrow s_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{s_n}} > \sqrt{2 + \sqrt[4]{2}} < \sqrt{2}$$

    En vista de este hecho, se sigue también que $(s_n - 2)(s_n + 1) < 0$ para toda $n > 1$, i.e. $s_n > s_n^2 - 2 = s_{n-1}$. En consecuencia, obtenemos una sucesión creciente que está acotada superiormente (por 2) y entonces converge.
    Como el límite s satisface $s^2 - s - 2 = 0$, se sigue que el límite es 2.

15. Si $\sum a_n$ converge y $\{b_n\}$ es monótona y acotada, $\sum a_n b_n$ converge.

    Demostración. Definamos $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ y veamos que $C_n =< \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) A_k + b_n A_n$

    $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = b_1 A_1 + b_2 (A_2 - A_1) + \ldots + b_n (A_n - A_{n-1})$
    $= A_1 (b_1 - b_2) + A_2 (b_2 - b_3) + \ldots + A_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + A_n b_n$

    $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) A_k + b_n A_n.$

    Ahora, hagamos $c_n = (b_n - b_{n+1}) A_n$ y consideremos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ y vamos a demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es absolutamente convergente.
    Sabemos que $\sum a_n$ converge, por lo que $\{A_n\}$ es acotada y por definición $\exists K > 0$ tal que $\|A_n\| \leq K \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \|c_k\| = \sum_{k=1}^{n} \|(b_k - b_{k+1})A_k\| = \sum_{k=1}^{n} |(b_k - b_{k+1})| \|A_k\|$$

$$\leq K \sum_{k=1}^{n} |(b_k - b_{k+1})|$$

Como $\{b_n\}$ es monótona, podemos decir que $\sum_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1})| = |b_1 - b_{n+1}|$, por ser $\{b_n\}$ monótona y acotada, entonces $\exists b \in X$ tal que $b_{n \to \infty} \to b$, de aquí se sigue que $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|b_n - b| < \epsilon$, por lo que $|b_1 - b_{n+1}| \leq |b_1 - b| + |b - bn + 1| < |b_1 - b| + \epsilon$ y por ser $\forall \epsilon > 0$ concluimos que $|b_1 - b_{n+1}| \leq |b_1 - b|$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \|c_k\| \leq K|b_1 - b| \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, $\sum_{k=1}^{\infty} \|c_k\|$ es convergente, pues todas sus sumas parciales están acotadas y por lo tanto $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ es absolutamente convergente.

Ya demostramos que $\sum_{k=1}^{\infty} c_n$ es absolutamente convergente, entonces $\exists l \in X$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1})A_k = l$$

Como ya habíamos dicho, por ser $\{b_n\}$ monótona y acotada, entonces $\exists b \in X$ tal que $b_{n \to \infty} n \to b$. Al ser $\sum a_n$ convergente, existe A = $\lim_{n \to \infty} A_n$.

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1})A_k + b_n A_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1})A_k + \lim_{n \to \infty} b_n A_n = l + bA$

$\therefore \sum a_n b_n$ converge

■