Cálculo Infinitesimal

Universidad Nacional Autónoma De México

Facultad De Ciencias

TALLER DE MATEMÁTICAS:
ASESORÍAS DE CÁLCULO INFINITESIMAL

Ejercicios Propuestos & Soluciones.
Series.

PRESENTADO POR:

Lilia Araceli Guinea Domínguez.

Prólogo

El siguiente texto está dirigido a los estudiantes de las distintas licenciaturas que ofrece la Facultad de Ciencias, que estén cursando alguna materia relacionada con el cálculo y , que en ocasiones, necesiten un poco de apoyo, más allá del que el que pueden encontrar en los libros o en sus cursos de la asignatura.El artículo se centra en la resolución de ejercicios concernientes al tema de series. Este artículo tiene como objetivo lograr que el estudiante aprenda a realizar demostraciones con este tipo de conceptos matemáticos

Este documento es realizado sin fines comerciales y con el propósito de funcionar como material de apoyo en el **Taller de Matemáticas** de la **Facultad de Ciencias**.
El material presentado fue diseñado en el entorno de LaTeX y los ejercicios que aparecen en el mismo son una compilación de ejemplos que se desarrollaron para explicar algún contenido y otros tantos fueron incorporados de ejercicios que aparecen sugeridos en los libros de uso común de cálculo que aparecen en la bibliografía del texto.

Se invita al lector a utilizar este manual exclusivamente como material de apoyo o de respaldo, de alguno de sus libros de preferencia relacionados con la enseñanza del cálculo.

Ejercicios

Realiza los siguientes ejercicios, en caso de necesitar ayuda, revisa la solución de los mismos.

1. ¿ Es convergente o divergente la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{(1-n)}$?

   Solución.

   *E*scribimos el n-ésimo término de la serie en la forma ar^{n-1}:

   $$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{(1-n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (2^2)^n 3^{(n-1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{(n-1)}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 4(\frac{4}{3})^{(n-1)}$$

   Claramente puede observarse que esta serie es geométrica, pues identificamos $a = 4$ y $r = \frac{4}{3}$, además, como $r > 1$, la serie diverge.

2. Encuentre la suma de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, donde $|x| < 1$.

   Solución.

   Observemos que esta serie inicia con $n = 0$ y por eso el primer término es $x^0 = 1$. (En las series, se adopta la convención de que $x^0 = 1$ aún cuando x=0). De modo,

   $$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ...$$

   Esta es una serie geométrica con a = 1 y r = x. Puesto que $|r| = |x| < 1$, converge (por la definición 1.2)y se tiene que:

   $$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

3. ¿Para qué valores de p es la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ es convergente ?.

Solución.

Si $p < 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = \infty$

Si $p = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 1$

En cualquier caso el límite es distinto de cero, por lo que la serie dada es divergente de $a$cuerdo con la prueba de la divergencia.
si $p > 0$, entonces la función $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ $e$videntemente es continua, positiva, $d$ecreciente en $[1, \infty)$.

$\int_1^\infty \dfrac{1}{x^p}\, dx$ $c$onverge si $p > 1$ y diverge si $p \leqslant 1$. Se infiere de la prueba de la integral que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$converge si $p > 1$ y diverge si $0 < p \leqslant 1$.

4. Pruebe si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n - 1}$ es convergente o divergente.

Solución.

Aplique la prueba por comparación en el límite con $a_n = \frac{1}{2^n-1}$. *y con* $b_n = \frac{1}{2^n}$.

y obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2^n-1)}}{\frac{1}{2^n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2_n}{2_n - 1}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2_n}$$
$$= 1 > 0$$

Puesto que existe este límite y $\sum \dfrac{1}{2^n}$ *es una serie geométrica convergente, la serie dada converge de acuerdo con la prueba por comparación en el límite.*