Geometría Analítica

Universidad Nacional Autónoma De México

Facultad De Ciencias

TALLER DE MATEMÁTICAS:
ASESORÍAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Ejercicios Propuestos & Soluciones.
Planos, Matrices y Producto Cruz.

PRESENTADO POR:

Lilia Araceli Guinea Domínguez.

Prólogo

El siguiente texto está dirigido a los estudiantes de las distintas licenciaturas que ofrece la Facultad de Ciencias, que estén cursando alguna materia relacionada con la geometría analítica y , que en ocasiones, necesiten un poco de apoyo, más allá del que el que pueden encontrar en los libros o en sus cursos de la asignatura. El artículo se centra en resolver ejercicios, que me he percatado, se repiten de manera constante en los cursos de geometría analítica, e incluso en los de álgebra lineal. El artículo tiene como objetivo lograr que el estudiante aprenda a interpretar , de manera geométrica , el concepto de 'producto cruz' , a construir planos y a utilizar el álgebra matricial.

Este documento es realizado sin fines comerciales y con el propósito de funcionar como material de apoyo en el **Taller de Matemáticas** de la **Facultad de Ciencias**.
El material presentado fue diseñado en el entorno de LaTeX y los ejercicios que aparecen en el mismo son una compilación de ejemplos que se desarrollaron para explicar algún contenido y otros tantos fueron incorporados de ejercicios que aparecen sugeridos en los libros de uso común de geometría analítica.

Se invita al lector a utilizar este manual exclusivamente como material de apoyo o de respaldo, de alguno de sus libros de preferencia relacionados con la enseñanza de la geometría analítica.

Ejercicios

Realiza los siguientes ejercicios, en caso de necesitar ayuda, revisa la solución de los mismos.

1. Sean $\mathcal{P} = \{p_0 + tu + rv | t, r \in \mathbb{R}\}$ y $q_0 \in \mathbb{R}^3$.

   Prueba que: $d(\mathcal{P}, q_0) = \left| \frac{(q_0 - p_0) \cdot (u \times v)}{\|u \times v\|} \right|$

   Solución.

   Sabemos que $\cos\theta = \frac{D}{\|\overline{p_0 q_0}\|}$ *si y solo si* $\|\overline{p_0 q_0}\| \cos\theta = D$

   Sea $\overline{n}$ *el vector normal a* $\mathcal{P}$ *entonces* $\overline{n} = u \times v$ *, por otro lado,*

   $$\cos\theta = \frac{(\overline{p_0 q_0}) \cdot (\overline{n})}{\|\overline{p_0 q_0}\| \|\overline{n}\|}$$

   Sustituyendo:
   $D = \|\overline{p_0 q_0}\| \frac{(\overline{p_0 q_0}) \cdot (\overline{n}}{\|\overline{p_0 q_0}\| \|\overline{n}\|})$
   Simplificando:

   $D = \frac{(\overline{p_0 q_0}) \cdot (\overline{n})}{\|\overline{n}\|}$, *donde,* $\overline{p_0 q_0} = q_0 - p_0$

   De esta manera obtenemos que:

   $$d(\mathcal{P}, q_0) = D = \left| \frac{(q_0 - p_0) \cdot (u \times v)}{\|u \times v\|} \right|$$

2. Sean $\mathcal{P} = \{p_0 + tu + rv | t, r \in \mathbb{R}\}$ y $q_0 \in \mathbb{R}^3$.

Usa **1.** para probar que si $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz + d = 0\}$ y $q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ entonces $d(\mathcal{P}, q_0) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Solución.

Por ***a)*** *sabemos que* $d(\mathcal{P}, q_0) = \left| \dfrac{(q_0 - p_0) \cdot (u \times v)}{\|u \times v\|} \right|$

Entonces, Sea $p_0 = (x_1, y_1, z_1)$

$q_0 - p_0 = (x_0, y_0, z_0) - (x_1, y_1, z_1) = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$

Por otro lado, sabemos que:

$\overline{n} = (u) = (a, b, c)$

entonces

$\overline{n} \cdot (q_0 - p_0) = (a, b, c) \cdot (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$

$= ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_1 + by_1 + cz_1)$

Pero, de la ecuación del plano, podemos observar que:

$d = -ax - by - cz$ si y solo si $d = -(ax + by + cz)$

Entonces,

$$\overline{n} \cdot (q_0 - p_0) = ax_0 + by_0 + cz_0 + d \tag{1}$$
$$\|u \times v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \tag{2}$$

Sustituyendo (1) y (2) en la expresión obtenida en a), nos queda que:

$d(\mathcal{P}, q_0) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

3. Demuestre que $\|\alpha \times (\alpha \times \beta)\| = \|\alpha\|\|\alpha \times \beta\|$.

Solución.

Sabemos que:

$\|\alpha \times \beta\| = A(\alpha, \beta) = \|\alpha\|\|\beta\| \sin\theta$

Por lo tanto:

$\|\alpha \times (\alpha \times \beta)\| = \|\alpha\|\alpha \times \beta\| \sin\theta_1$

Pero α y $\alpha \times \beta$ son ortogonales.

Por tanto, $\theta_1 = \dfrac{\Pi}{2}$ *y esto implica que:*

$\|\alpha\|\alpha \times \beta\| \sin\dfrac{\Pi}{2} = \|\alpha\|\alpha \times \beta\|$

En consecuencia,

$\|\alpha \times (\alpha \times \beta)\| = \|\alpha\|\|\alpha \times \beta\|$.

4. Demuestre que $\alpha \times (\beta \times \gamma) + \beta \times (\gamma \times \alpha) + \gamma \times (\alpha \times \beta) = 0$

Solución.

Como:

$\alpha \times (\beta \times \gamma) = (\alpha \cdot \gamma)\beta - (\alpha \cdot \beta)\gamma$

$\beta \times (\gamma \times \alpha) = (\beta \cdot \alpha)\gamma - (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta)\gamma - (\beta \cdot \gamma)\alpha$

$\gamma \times (\alpha \times \beta) = (\gamma \cdot \beta)\alpha - (\gamma \cdot \alpha)\beta = (\beta \cdot \gamma)\alpha - (\alpha \cdot \gamma)\beta$

Al sustituir las expresiones anteriores en :

$\alpha \times (\beta \times \gamma) + \beta \times (\gamma \times \alpha) + \gamma \times (\alpha \times \beta)$

Tenemos que:

$\alpha \times (\beta \times \gamma) + \beta \times (\gamma \times \alpha) + \gamma \times (\alpha \times \beta)$

$= (\alpha \cdot \gamma)\beta - (\alpha \cdot \beta)\gamma + (\alpha \cdot \beta)\gamma - (\beta \cdot \gamma)\alpha + (\beta \cdot \gamma)\alpha - (\alpha \cdot \gamma)\beta$

$= (\alpha \cdot \gamma)(\beta - \beta) + (\alpha \cdot \beta)(\gamma - \gamma) + (\beta \cdot \gamma)(\alpha - \alpha)$

$= (\alpha \cdot \gamma)(0) + (\alpha \cdot \beta)(0) + (\beta \cdot \gamma)(0)$

$= 0$

En consecuencia,

$\alpha \times (\beta \times \gamma) + \beta \times (\gamma \times \alpha) + \gamma \times (\alpha \times \beta) = 0$

5. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -x + y - z &= 2 \\ -x - y - z &= 3 \end{aligned}$$

a) Expresa en forma matricial MX=α

Solución.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) Determina si M es invertible, y en tal caso calcula M^{-1}.

Solución.

M es invertible si y solo si $\det(M)$ es distinto de 0.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(M) = 1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\det(M) = [(-1 - 1) - (1 - 1) - (1 + 1)]$

$= [-2 - 2] = -4]$

Por tanto, como $\det(M) = -4$ *entonces* M *es invertible.*

$$M^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} (-1-1) & -(-1-1) & (-1+1) \\ -(1-1) & (-1-1) & -(-1-1) \\ (1+1) & -(-1+1) & (1+1) \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

En consecuecia:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

c) Encuentra la solución al sistema por medio de M^{-1}.

Solución.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

En consecuecia:

$x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = -2$