Scholze el magnífico 1.

GGA, profesor jubilado de la FC-UNAM.

1 de agosto de 2021

Contents

Peter Scholze.

Part I

Parte I: Números y geometría.

Chapter 1

A la Peter Scholze.

1.1 Teoría de números y geometría.

Peter Scholze.

Fig. A sus 28 años, Peter Scholze descubre profundas conexiones entre la teoría de números y la geometría.

En *matemáticas* también hay *filtraciones de información* sobre todo dentro de su misma comunidad, se acostumbran los *rumores sorprendentes* como los circulados en los años 10 ya de este siglo vía la comunidad de *teoría de números,* llegando hasta los oidos vigilantes de *Jared Weinstein* de 34 años [1]. Algo alrededor de un estudiante ya graduado de la Univ. de Bonn en Alemania, que habría

[1] El Profesor Asociado de Matemáticas *Jared Weinstein* de la Universidad de Boston. jsweinst@math.bu.edu,

Enseñanza: ·Primavera de 2021: MA 842, Seminario de Algebra: El tópico es la *Conjetura de Mordell*

Algunos cursos y artículos previos

·On the Kottwitz conjecture for local shtuka spaces, conjunto conjunto con David Hansen y Tasho Kaletha. Updated May 2021.

·The smooth locus in infinite-level Rapoport - Zink spaces, conjunto con Alexander Ivanov. We show that each connected component of EL - type infinite-level Rapoport-Zink space is cohomologically smooth, once you remove the points with extra endomorphisms. Por aparecer en 'Compositio Mathematica'.

·Berkeley lectures on p-adic geometry, en conjunto con Peter Scholze (updated March 2020). A book based on Scholze's 2014 course on perfectoid spaces, diamonds, and shtukas. Por aparecer en: 'Annals of Mathematics Studies', Princeton University Press.

escrito un artículo [1] que reescribía el libro de "*Harris-Taylor*" [3] - que contiene *288 páginas,* dedicado a una sola prueba impenetrable e inentendible de la teoría de números- a tan sólo 37págs. El estudiante en ese entonces de *22 años*, *Peter Scholze*, halló una manera de eludir una de las partes más complicadas de dicha demostración, ahora con su método de una *conexión radical* entre la *teoría de números* y la *geometría*.

"*Fue tan impresionante para alguien tan joven haber hecho algo tan revolucionario*" (*Weinstein*- Universidad de Boston) "*Fue extremadamente humillante*" [2].

Su meteórico ascenso permitió que la Univ. de Bonn, lo nombrara *profesor titular* a sólo *2 años* de su publicación conscientes de su extraordinaria mente matemática. Después de publicar su artículo sobre la prueba de '*Harris-Taylor*', los expertos en teoría de números y geometría comenzaron también a fijarse en *Scholze*.

Peter Scholtz, foto Nyani Quarmyne

Desde entonces, *Scholze*, ahora de *28 años*, ha alcanzado una eminencia más amplia en la comunidad matemática. Las citas por premios ganados como el *premio Leibniz* lo han llamado "*ya uno de los matemáticos más influyentes del mundo*" (Premio *Sastra Ramanujan 2013*)"un *talento raro* que *sólo surge muy de vez encuando en décadas*". E incluso ya en ese entonces se le mencionaba como un posible favorito para la *Medalla Fields* del *2018*, y así resultó, obtuvo uno de los más altos honores en matemáticas.

Hasta ahora la *innovación clave* de *Scholze* - una *clase de estructuras fractales* que él llama *espacios perfectoides* - tienen poco tiempo, pero ya tiene ramificaciones de gran alcance en el campo de la geometría aritmética, donde la teoría de números y la geometría se unen. "El *trabajo* de *Scholze* tiene una

·Moduli of p-divisible groups, with Peter Scholze. Cambridge Journal of Mathematics 1, No. 2, 145-237, 2013. (2013). We prove that Rapoport-Zink spaces at infinite level are perfectoid spaces, and give a description of these spaces purely in terms of p-adic Hodge theory.

·Maximal Varieties and the local Langlands correspondence for GL(n), conjunto con Mitya Boyarchenko. J. Amer. Math. Soc. 29 (2016), No. 1, 177-236. Donde se computa la función zeta de una variedad muy inusual sobre un campo finito, el cual tiene el número máximo de puntos racionales relativos a su topología. This variety appears as the reduction of an open affinoid subset of the Lubin-Tate tower at infinite level.

On the computation of local components of a newform, with David Loeffler. Math. Comp. 81 (2012) 1179-1200. We present an algorithm for computing the p-components of the automorphic representation arising from a cuspidal newform, even at those primes p dividing the level more than once.

[2] Todas las declaraciones y entrevistas fueron tomadas de [4].

cualidad premonitoria" (Weinstein) "*Él alcanza a ver los desarrollos antes de que siquiera comiencen*".

Muchos *matemáticos reaccionan* ante *Scholze* con "una *mezcla* de *asombro*, *miedo* y *euforia*" (*Bhargav Bhatt* - matemático de la Univ. de Michigan quien ha *escrito artículos conjuntos* con *Scholze*). Eso *no* se *debe* a su *personalidad*, que los *colegas describen* uniformemente *como fundamentada* y *generosa*. "*Nunca* te *hace sentir* que está, bueno, de alguna manera *tan por encima de ti*" (*Eugen Hellmann*- colega en la Univ. de Bonn)

Bhargav Bhatt.

Eugen Hellmann.

Ana Caraiani.

En cambio, es debido a su desconcertante capacidad para ver profundamente en la naturaleza de los fenómenos matemáticos. A diferencia de muchos matemáticos, a menudo comienza no con un problema en particular que quiere resolver, sino con algún concepto esquivo que quiere entender por su propio bien. Pero (*Ana Caraiani* - una teórica de la Teoría de Números de la Univ. de Princeton, colaboradora de *Scholze*), luego las estructuras que crea "*resultan* tener múltiples *aplicaciones* en *otras direcciones* que *no se predijeron* en ese momento, *solo* porque *eran los objetos correctos para pensar*".

1.1.1 Aprendiendo Aritmética

Scholze comenzó a *enseñarse a sí mismo matemáticas a nivel universitario* a la edad de *14 años*, mientras asistía al *Heinrich Hertz Gymnasium*, una escuela de nivel medio superior en Berlín *especializada en matemáticas* y *ciencias*. En Heinrich Hertz, *Scholze* dijo, "*Usted no resulta siendo un fuereño, si estaba interesado en las matemáticas*"

A los *16 años*, *Scholze* se enteró de que una *década* antes *Andrew Wiles* había probado el famoso problema del siglo XVII conocido como el *último teorema de Fermat*, que dice que la ecuación éxtasis $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones en números enteros distintos de cero, si n es mayor que dos. *Scholze* estaba ansioso por *estudiar la prueba*, pero rápidamente descubrió que a pesar de la *simplicidad* del problema, su *solución* utilizaba algunas de las *matemáticas* más vanguardistas. "*No entendí nada, pero fue realmente fascinante*", dijo.

Es así que *Scholze* trabajó *hacia atrás*, descubriendo lo que *necesitaba aprende*r para dar *sentido a la prueba*. "*Hasta el día de hoy, esí es* en gran medida *como aprendo*" (*Scholze*) "*Nunca aprendí realmente las cosas básicas como el álgebra lineal, en realidad, solo lo asimilé a través del aprendizaje de algunas otras cosas*".

A medida que *Scholze* se adentraba en la *prueba*, quedó *cautivado* por los *objetos matemáticos* involucrados, *estructuras* llamadas *formas modulares*[3] y *curvas elípticas*[4] que *misteriosamente unifican* áreas muy dispares de la *teoría de números*, del *álgebra*, de la *geometría* y el *análisis. Leer* sobre los *tipos de objetos involucrados* fue quizás aún *más fascinante* que *el problema en sí* (*Scholze*).

Los *gustos matemáticos* de *Scholze* iban tomando forma. *Hoy en día*, todavía *gravitan hacia problemas* que tienen sus *raíces* en *ecuaciones básicas* sobre los *números enteros.* Esas *raíces* muy *tangibles* hacen que *incluso las estructuras matemáticas esotéricas* se sientan *concretas para él.* "*Me interesa, al fin, la aritmética*" (*Scholze*) Es más *feliz*, dijo, cuando *sus construcciones abstractas* lo regresan de vuelta a *pequeños descubrimientos* sobre *números enteros ordinarios.*

Después de la escuela secundaria (bachillerato), *Scholze* continuó *persiguiendo* este *interés* en la *teoría de números* y la *geometría* en la *Universidad de Bonn.* En sus *clases* de *matemáticas presenciales*, *nunca tomó notas*, así lo recuerda *Hellmann*, su compañero de clase. *Scholze podía entender* el material del curso *en tiempo real*, (*Hellmann*) "No solo *entender*, sino realmente *aprehender* en algún *nivel profundo*, para que *él tampoco olvidara*".

Es así como *Scholze* comenzó a *investigar* en el campo dela *geometría aritmética*, que usa *herramientas geométricas* para *comprender soluciones en números enteros* de *ecuaciones polinómicas*, ecuaciones como $xy^2 + 3y = 5$ que involucran solo *números*, *variables* y *exponentes.* Para algunas ecuaciones de este tipo, es fructífero estudiar si tienen *soluciones* entre *sistemas numéricos alternativos* llamados *números p-ádicos*, que, al *igual* que los *números reales*, se construyen *rellenando los huecos* entre *números enteros* y *fracciones.* Pero estos *sistemas* se basan en una *noción* no estándar de *dónde* se encuentran *las brechas* y *qué números están cerca uno del otro* En *un sistema numérico p-ádico*, *2 números* son *cercanos no si la diferencia entre ellos es pequeña*, sino si esa *diferencia* es *divisible muchas veces por p.*

Es un *criterio extraño*, pero *útil.* Los números *3-ádicos*, por ejemplo, proporcionan una *forma natural* de estudiar ecuaciones como $x^2 = 3y^2$, en el que los factores de 3 son clave.

Los *números p -ádicos* están "*muy alejados de nuestras intuiciones cotidianas*" (*Scholze*). *Con los años*, sin embargo, *ha llegado a sentirlos muy naturales para él.* "Ahora encuentro a los *números reales* mucho, pero mucho *más confusos* que los números *p-ádicos.* Me he *acostumbrado tanto a ellos,* que ahora los *números reales* los siento *muy extraños*".

Los matemáticos ya habían notado en la década de los 70 del siglo pasado que *muchos problemas* relacionados con los *números p-ádicos* se vuelven más fáciles si se *expanden* tales números p-ádicos creando una torre infinita de sis-

[3] En matemáticas,una *forma modular* es una función analítica (compleja) en el *semiplano superior* que satisface un cierto tipo de *ecuación funcional* con *respecto* a la *acción grupal del grupo modular*,y también *satisface* una *condición de crecimiento.*

[4] En matemáticas, las curvas elípticas se definen mediante ecuaciones cúbicas (tercer grado). Se han utilizado para probar el último teorema de Fermat y también se utilizan en criptografía

temas numéricos en los que cada uno se envuelve alrededor del que está por debajo de él *p veces*, con los *números p-ádicos* en la parte inferior de la torre. Y en la "*parte superior*" de *esta torre infinita* se encuentra *el espacio envolvente definitivo*, un objeto fractal que es el *ejemplo más simple* de los *espacios perfectoides* que *Scholze desarrollaría* más tarde.

Crdito: Olena Shmahalo.

Él mismo se propuso *resolver* el *por qué* tal *construcción envolvente infinita facilita* la resolución de tantos problemas sobre los *números* y *polinomios p-ádicos*. "Estaba tratando de *entender el núcleo de este fenómeno*" (*Scholze*) "*No había un formalismo general que pudiera explicarlo*".

Con el tiempo se *percató* de que *es posible construir espacios perfectoides* para una *amplia variedad de estructuras matemáticas*. Y *mostró*, que estos *espacios perfectoides*, permiten *deslizar preguntas sobre polinomios del mundo p-ádico* a un *universo matemático* diferente en el que *la aritmética* es mucho *más simple* (por ejemplo, en el que *no hay necesidad* de llevar a cabo *la adición*). "La *propiedad más extraña* sobre los *espacios perfectoides* es que *pueden moverse mágicamente* entre los *dos sistemas numéricos*" (Weinstein)

Esta *idea* permitió a *Scholze probar parte* de una *complicada afirmación* sobre las *soluciones p-ádicas* a los *polinomios, llamada conjetura peso-monodromía*, que *se convirtió* en su *tesis doctoral* de *2012* [5] [5]. La *tesis* "tuvo *tales implicaciones* que fue el *tema de estudio de los grupos de especialistas en el mundo*" (*Weinstein*).

Es así como Scholze "*encontró en forma precisa la manera correcta y limpia de incorporar todo el trabajo realizado anteriormente* y *halló una formulación elegante para eso*, y luego, porque encontró realmente el marco correcto, *fue mucho más allá de los resultados conocidos*" (*Hellmann*)

1.1.2 Volando sobre la selva

No obstante la complejidad de los espacios perfectoides, *Scholze* es *conocido por la claridad de sus conferencias y documentos*. "Realmente *no entiendo nada hasta* que *Peter* me *lo explica*" (*Weinstein*)

Él *logra al tratar* de explicar *sus ideas a un nivel* que *incluso* los *estudiantes principiantes de posgrado pueden seguirlo* (*Caraiani*) "Hay un sentido de

[5] En esa tesis se introduce una cierta *clase* de los llamados *anillos* y *espacios perfectoides*, que dan un marco natural para el teorema de la casi pureza de Faltings, y para los cuales hay una *operación* de *inclinación natural* que intercambia la *característica 0* y *la característica p*. Se logra reducir la conjetura peso - monodromía a ciertos casos por reducción a igual característica.

apertura y generosidad en términos de ideas" (*Caraiani*) "Y *no solo* lo hace *con pocas personas mayores*, sino que realmente, *muchos jóvenes tienen acceso a él*". El *comportamiento amistoso* y *accesible* de *Scholze* lo convierte en un *líder ideal en su campo* (*Caraiani*) Cuenta que estando en una caminata difícil con un grupo de matemáticos, "él era el que corría asegurándose de que todos lo hicieran correctamente y revisando que todos estuvieran bien".

Pero, incluso con el beneficio de las explicaciones de *Scholze*, los *espacios perfectoides* son *difíciles* de *comprender* para *otros investigadores* (*Hellmann*) "*Si te alejas* un poco *del camino,* o de la *forma que él prescribe*, entonces estás en medio de la selva y en realidad resulta ser muy difícil". Pero el propio *Scholze*, afirma *Hellmann*, "*nunca se perdería en la selva*, porque *nunca trata de luchar contra la selva. Siempre* está *buscando* dentro de la *visión general*, *algún concepto claro*".

En forma permanente *Scholze evita enredarse en las enredaderas de la selva obligándose a volar por encima de ellas*: *Como* en la *universidad*, *prefiere* trabajar *sin escribir nada.* Eso *significa* que debe *formular* sus *ideas* de la manera *más limpia posible* (*Hellmann*) "Solo *tienes* algún tipo de *capacidad limitada* en tu *cabeza*, por lo que *no puedes hacer cosas demasiado complicadas*".

Mientras que *otros matemáticos* ahora están *empezando* a *lidiar* con *espacios perfectoides*, algunos de los *descubrimientos de mayor alcance* sobre ellos, *no es sorprendente*, han *venido de Scholze y sus colaboradores.* En *2013*, *un resultado* que *publicó en línea* "realmente sorprendió a la comunidad" (*Weinstein*) "*No teníamos idea de que tal teorema estaba en el horizonte*".

El *resultado de Scholze amplió* el *alcance* de las *reglas* conocidas como *leyes de reciprocidad*, que *rigen el comportamiento* de los *polinomios* que utilizan la *aritmética del reloj* (aunque *no necesariamente con 12 horas*). La *aritmética del reloj* (en la que, *por ejemplo*, $8+5=1$ *si* el *reloj* tiene *12 horas*) son los *sistemas de números finitos más naturales* y ampliamente *estudiados en matemáticas.*

Las *leyes de reciprocidad* son *generalizaciones* de la *ley de reciprocidad cuadrática* de hace *200 años*, *piedra angular* de la *teoría de números* y uno de los *teoremas personales favoritos* de *Scholze.* La *ley establece* que *dados dos números primos* p y q, en la *mayoría de los casos* p es un *cuadrado perfecto* en un *reloj* con q *horas exactamente cuando* q es un *cuadrado perfecto* en un *reloj* con p *horas.* Por ejemplo, 5 es un *cuadrado perfecto* en un *reloj con* 11 *horas*, ya que $5 = 16 = 4^2$, y 11 es un *cuadrado perfecto* en un *reloj* con 5 horas, ya que $11 = 1 = 1^2$.

"*Me parece muy sorprendente*" (*Scholze*) "*A primera vista, estas dos cosas parecen no tener nada que ver entre sí*".

"*Se puede interpretar una gran cantidad de teoría algebraica de números moderna como un intento de generalizar esta ley*" (*Weinstein*) A *mediados* del *siglo XX*, los *matemáticos descubrieron* un *vínculo asombroso* entre las *leyes de reciprocidad* y lo que *parecía* un *tema completamente diferente*: la "*geometría hiperbólica*" de *patrones como* el *famoso mosaico* de *ángeles-diablos* de *M.C.*

Escher en un disco:

ngeles-diablos de Escher

Este *vínculo* es una *parte central* del "*programa de Langlands*", una *colección* de *conjeturas* y *teoremas interconectados* sobre la *relación* entre la *teoría de números*, la *geometría* y el *análisis*. Cuando estas *conjeturas* pueden ser *demostradas*, a menudo son *enormemente poderosas*: Por ejemplo, la *prueba* del *Último Teorema de Fermat* se *redujo* a resolver una *pequeña* (*pero* altamente *no trivial*) *sección del programa de Langlands*.

Los matemáticos se han dado cuenta gradualmente de que el programa de Langlands se extiende mucho más allá del disco hiperbólico; también se puede estudiar en espacios hiperbólicos de dimensiones superiores y toda una variedad de otros contextos. Ahora, *Scholze* ha *demostrado* cómo *extender* el *programa de Langlands* a una amplia gama de estructuras en el "*triple espacio hiperbólico*" -un *análogo tridimensional del disco hiperbólico*- y más aún. Al *construir* una *versión perfecta* del *triple espacio hiperbólico*, *Scholze* ha descubierto *un conjunto totalmente nuevo* de *leyes de reciprocidad*.

"*El trabajo de Peter realmente ha transformado por completo lo que se puede hacer, a lo que tenemos acceso*" (*Caraiani*)

El *resultado* de *Scholze* (*Weinstein*), muestra que el *programa de Langlands* es "*más profundo* de lo que *pensábamos* ... es *más sistemático*, está *siempre presente*".

1.1.3 Avance rápido.

Fig. Por su trabajo en espacios perfectoides, Scholze, de 28 años, ha sido llamado "uno de los matemáticos más influyentes del mundo" y al parecer no exageraban. crédito: Nyani Quarmyne.

Discutir de matemáticas con *Scholze* es como consultar al "*oráculo de la verdad*", (*Weinstein*) "Si afirma: '*Sí, va a funcionar*', puedes estar seguro de ello; si él dice: *no*, debe darse por vencido; y si él dice que *no lo sabe* - lo cual ocurre - entonces, tienes suerte, ante ti hay *un problema interesante en tus manos*".

Sin embargo, *colaborar* con *Scholze no* es una *experiencia tan intensa* como cabría esperar (*Caraiani*) Al trabajar con *Scholze*, nunca hubo una *sensación de prisa*. "*Se sentía como* si de alguna forma siempre se *estuviera haciendo las cosas de la manera correcta*, *demostrando* de alguna manera *el teorema más general* que se pudiera, de la mejor manera, *hacer las construcciones correctas* que *iluminarán las cosas*"

Sin embargo *hubo una ocasión*, cuando el propio *Scholze* se apresuró, mientras intentaba *terminar un artículo* a finales de *2013*, *poco antes del nacimiento de su hija*. Fue algo bueno que se empujó a sí mismo entonces, dijo. "Después *no hice mucho*".

"*Convertirse* en *padre* le ha *obligado* a ser más *disciplinado* como usa su tiempo, (Scholze), Pero él *no tiene que hacer un bloqueo del tiempo para* la *investigación* - "*la matemática* simplemente *llena todos los espacios* entre sus *otras obligaciones*". "*Las matemáticas son mi pasión, supongo*", dijo. "*Siempre quiero pensar en ella*".

Sin embargo, no está en *absoluto inclinado a romantizar esta pasión. Cuando se le preguntó* si sentía que estaba *destinado a ser un matemático, se opuso.* "*Eso suena demasiado filosófico*".

Como *persona privada*, se siente *algo incómodo* con su *creciente celebridad* (en marzo, por ejemplo, cuando se convirtió en el *ganador* más joven de la historia del prestigioso *Premio Leibniz* de Alemania, que otorga 2.5 *millones de euros* para ser utilizados en *futuras investigaciones*). "*A veces es un poco abrumador*", dijo. "*Trato* de *no dejar que mi vida diaria* se deje *influenciar por lo abrumador*".

Scholze continúa explorando los *espacios perfectoides*, pero se ha ramificado a otras áreas de las matemáticas tocando la *topología algebraica*, la cual *usa el álgebra para estudiar las formas*. "*En el transcurso del último año y medio, Peter se ha convertido en un maestro completo del tema*" (*Bhatt*) "*Cambió la forma en que [los expertos] lo piensan*".

Puede ser aterrador, *pero también emocionante* para *otros matemáticos* cuando *Scholze* entra en su campo (Bhatt) "Significa que el *tema* realmente *se va a mover rápido*. Estoy *extasiado* de que *esté trabajando* en un área que está cerca de la mía, así que realmente *veo que las fronteras del conocimiento avanzan*".

Sin embargo, para *Scholze*, su trabajo *hasta ahora es solo un calentamiento*. "Todavía *estoy en la fase* en la que *estoy tratando de aprender lo que hay allí*, y tal *vez reformularlo en mis propias palabras*", dijo. "*No siento* que realmente *haya empezado a investigar*".