Scholze el magnífico 3

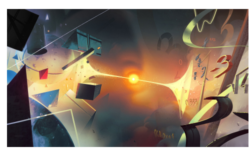
GGA, profesor jubilado de la FC-UNAM.

1 de agosto de 2021

Contents

I Parte III: Programa de Langlands. **2**

1 Un nuevo enfoque abre 'agujero de gusano' entre números y la geometría.



Crdito: Moatteo Bassini.

3

1.1 **Laurent Fargues y *Peter Scholze* encontrarón una nueva y más poderosa forma de conectar la teoría de números y la geometría, como parte del programa de Langlands.** . . 3

1.1.1 **Cosechando raíces**. 5

1.1.2 **Números de formas.** 7

1.1.3 **Un Tour de Force de Scholze** 8

1.1.4 **Teniendo la curva, se puede viajar.** 10

1.1.5 **Una correspondencia local.** 11

1.1.6 **Los cimientos del edificio.** 12

1.1.7 **El final del inicio.** 14

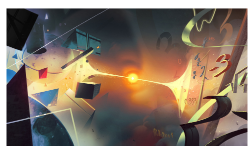
1.2 **REFERENCIAS.** 15

Part I

Parte III: Programa de Langlands.

Chapter 1

Un nuevo enfoque abre ‘agujero de gusano’ entre números y la geometría.



Crdito: Moatteo Bassini.

1.1 Laurent Fargues y *Peter Scholze* encontrarón una nueva y más poderosa forma de conectar la teoría de números y la geometría, como parte del programa de Langlands.

El proyecto más grande de la matemática actúal (*programa de Langlands*) recibió un *extraño regalo* en 2001 [1], en la forma de un gigantesco documento de más de 300 págs. La primera gran simplificación la produjo *Scholze* [2] con un documento de sólo 38 pags., aunque recientemente de nuevo aparece un *nuevo regalo raro* también en la forma de otro gigantesco documento de 348 págs., publicado recien en febrero de 2021 [3] [1] que cambiará la forma en que los

[1] El artículo “Geometrization de la correspondencia local de Langlands” de *Laurent Fargues, y Peter Scholze* de 348 páginas; Siguen la idea de *L. Fargues* (“Geometrization of the

investigadores de todo el mundo plantearán y estudiarán algunas de las *preguntas más profundas* sobre este campo de las matemáticas. La obra crea y aplica un nuevo ente geométrico (*la curva de Fargues-Fontaine*) que cumple un sueño audaz, alguna vez fantasioso, sobre la relación entre la geometría y los números.

"*Esto realmente abre una enorme cantidad de posibilidades. Sus construcciones y métodos son tan nuevos que están a la espera de ser explorados*" (*Tasho Kaletha* de la Universidad de Michigan)

Tasho Kaletha.

Laurent Fargues.

Jean-Marc Fontaine.

El trabajo es una colaboración entre *Laurent Fargues* del Instituto de Matemáticas de Jussieu en París y *Peter Scholze* de la Universidad de Bonn. *Abre* un *nuevo frente* en el "*programa langlands*" de *larga duración*, que busca *vincular ramas dispares de las matemáticas*, como el *Cálculo* y la *Geometría*, para *responder* a algunas de las *preguntas* más *fundamentales* sobre los *números*.

Su *artículo* se da cuenta de *esa visión*, *dando* a los *matemáticos* una forma *completamente nueva* de pensar sobre esas *preguntas* que los han *inspirado* y *confundido* durante siglos.

En el *centro* de la *obra* de *Fargues y Scholze* hay un *objeto geométrico revitalizado* llamado *curva de Fargues-Fontaine*. Fue desarrollado por primera vez alrededor de *2010* por *Fargues* y *Jean-Marc Fontaine*, este último, quien fue profesor en la Univ. de París-Sud hasta su muerte (por cáncer) en *2019*. Esta *curva recién* ahora está *alcanzando* su *forma más acabada*.

"En *ese entonces* sabían que la *curva Fargues-Fontaine* era algo *interesante* e *importante*, pero *no se entendían de qué manera*" (*Eva Viehmann*, de la Universidad Técnica de Múnich)

Eva Viehmann.

local Langlands correspondence: an overview", arXiv:1602.00999, 2016), donde desarrollan los fundamentos del programa geométrico de Langlands en la curva de *Fargues-Fontaine*. Citar como: arXiv:2102.13459 [matemáticas. RT] (o arXiv:2102.13459v1 [matemáticas. RT] para esta versión)

La *curva* podría haber *permanecido confinada* en algún *rincón técnico* de las *matemáticas* donde se inventó, *pero en 2014* los *eventos* que involucraron a *Fargues* y *Scholze* la *impulsaron al centro del campo*. Durante los *siguientes siete años* elaboraron los detalles fundamentales necesarios para *adaptar* la *curva de Fargues* a la *teoría de Scholze*. El *resultado final no tanto* los *números* del puente y la *geometría* como *el colapso del suelo* entre ellos.

"*Es una especie de agujero de gusano entre dos mundos diferentes*" (*Scholze*) "Realmente, *se convierten en lo mismo* de alguna manera a través de una *lente diferente*".

1.1.1 Cosechando raíces.

El *programa de Langlands* es *una visión de investigación* en expansión que *comienza* con una *preocupación simple*: *encontrar soluciones a ecuaciones polinómicas* como $x^2 - 2 = 0$ y $x^4 - 10x^2 + 22 = 0$. *Resolverlas* significa *encontrar* las "*raíces*" del polinomio - los *valores* de x que hacen que el *polinomio* sea idénticamente igual a cero ($x = \pm\sqrt{2}$ para la primera, y $x = \sqrt{\pm 5 \pm \sqrt{3}}$ para la 2da.)

Por allá de la década de *1500* los matemáticos habían descubierto fórmulas ordenadas para calcular las raíces de polinomios con potencias hasta *4*. Luego buscaron formas de identificar las raíces de los polinomios con variables elevadas a la potencia de 5 y más. Pero en *1832* el joven matemático *Évariste Galois* descubrió que la búsqueda era infructuosa, demostrando que no hay métodos generales para calcular las raíces de los polinomios de potencias ≥ 5.

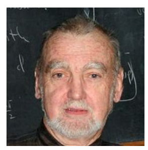
varist Galois.

Sin embargo, Galois no se detuvo ahí. En los meses anteriores a su muerte en un absurdo duelo en *1832* a la edad de *20* años, *Galois presentó* una *nueva teoría de soluciones polinómicas*. En lugar de *calcular las raíces con presición* , lo que *no se puede hacer en la mayoría de los casos* , *propuso estudiar* las *simetrías* entre las *raíces*, que *codificó* en un *nuevo objeto matemático* eventualmente llamado el *grupo de Galois*.

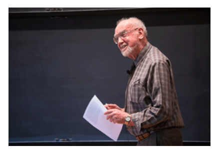
Digamos en el ejemplo $x^2 - 2$, en lugar de *explicitar las raíces*, el *grupo de Galois* enfatiza que las *dos raíces* (cualesquiera que sean) *son imágenes especulares* una de la otra, *respecto a las leyes del álgebra*.

"*Los matemáticos tuvieron que alejarse de las fórmulas porque generalmente no había fórmulas*" (*Brian Conrad*, de la Universidad de Stanford) "*Calcular el grupo de Galois es una medida de computar las relaciones entre las raíces*".

A lo largo del siglo XX *los matemáticos idearon nuevas formas* de estudiar los *grupos de Galois*. Una *estrategia principal* consistía en *crear un diccionario* de *traducción* entre los *grupos* y *otros objetos* - a menudo *funciones* provenientes del Cálculo - e *investigarlas* como un '*proxy*' para trabajar con *grupos de Galois directamente*. Esta es la *premisa básica* del *programa de Langlands*, que es una *visión amplia* para *investigar los grupos de Galois* - y realmente los *polinomios* - a través de este tipo de *traducciones*.



Robert Langlands.



El *programa langlands* [2]comenzó en *1967*, cuando *Robert Langlands*, escribiera una carta al famoso matemático *André Weil*. Langlands *proponía* que *debería* haber una *manera* de hacer *coincidir cada grupo de Galois* con un *objeto* llamado *forma automórfica*. *Mientras* que los *grupos de Galois* surgen en el álgebra (*reflejando* la forma en que se *usa el álgebra* para *resolver ecuaciones*), las *formas automórficas provienen* de una *rama muy diferente de las matemáticas* llamada *Análisis* (forma mejorada del *Cálculo*) Los *avances matemáticos* de la primera mitad del siglo XX habían *identificado suficientes similitudes* entre los dos para hacer a *langlands sospechar* un *vínculo* mucho *más completo*.

"*Es notable que estos objetos de una naturaleza tan diferente de alguna manera se comuniquen entre sí*" (*Ana Caraiani* del Imperial College de Londres)

Si los *matemáticos* pudieran *probar* lo que llegó a llamarse *la correspondencia de Langlands*, podrían *investigar con confianza todos* los *polinomios* utilizando las *poderosas herramientas del Cálculo*. La *relación conjeturada* es tan *fundamental* que su *solución* también *puede tocar* muchos de los *mayores problemas abiertos* en la *teoría de números*, incluyendo *tres* de los *problemas del Millón* de Dólares del Premio del Milenio: la *hipótesis de Riemann*,la *conjetura de BSD* y la *conjetura de Hodge*.

Dado lo que está en juego, *generaciones de matemáticos* han sido motivados para unirse al esfuerzo, *desarrollando las conjeturas iniciales de Langlands* en lo que es casi con seguridad *el proyecto más grande y expansivo en el campo* hoy en día.

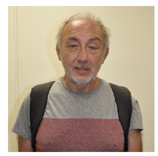
"*El programa de Langlands es una red de conjeturas que tocan casi todas las áreas de las matemáticas puras*" (*Caraiani*)

[2]Robert Phelan Langlands, Visionario Matemático canadiense, quien propuso el ahora llamado *Programa Langlands*. Ganó el Premio Abel el 20 de marzo de 2018.

1.1.2 Números de formas.

A principios de la *década de 1980* los soviéticos *Vladimir* *Gershonovich* *Drinfeld* [3] y más tarde *Alexander* *Alexandrovich* *Beilinson* [4] propusieron que *debería haber una manera* de *interpretar* las *conjeturas de Langlands* en *términos geométricos*. La *traslación* entre *números y geometría* es a menudo *difícil*, pero *cuando funciona abre* los *problemas* como puertas de par en par.

Vladimir Drinfeld



Alexander Beilinson

Solo para ilustrar con un ejemplo, una pregunta básica sobre un número es si tiene algún factor primo repetido. El número 12 lo tiene: Se factoriza en $2 \times 2 \times 3$, con el 2 repetido dos veces. Pero el número 15 no los tiene (con los factores 3×5)

[3]En *1974*, a la edad de veinte años, *Drinfeld* anunció una *prueba de las conjeturas de Langlands* para *GL2* sobre un campo global de características positivas. En el curso de la prueba de las conjeturas, *Drinfeld* introdujo una nueva clase de objetos que llamó *"módulos elípticos"* (ahora conocidos como *módulos de Drinfeld*). Más tarde, en *1983*, *Drinfeld* publicó un breve artículo *que amplió el alcance de las conjeturas de Langlands.* Las conjeturas de Langlands, cuando se publicaron en 1967, podrían verse como una especie de teoría de campos de clases no abeliana. Postuló la existencia de una correspondencia natural uno a uno entre las representaciones de Galois y algunas formas automórficas. La "naturalidad" está garantizada por la coincidencia esencial de las funciones L. Sin embargo, esta condición es puramente aritmética y no se puede considerar para un campo de función unidimensional general de una manera sencilla. Drinfeld señaló que en lugar de formas automórficas se pueden considerar poleas perversas automórficas o módulos Dautomórficos. La "automorfisis" de estos módulos y la correspondencia de Langlands podría entenderse entonces en términos de la acción de los operadores de Hecke.

Drinfeld también ha hecho mucho trabajo en física matemática. En colaboración con su asesor Yuri Manin,construyó el espacio moduli de los instantones yang-mills, un resultado que fue probado independientemente por Michael Atiyah y Nigel Hitchin. Drinfeld acuñó el término "*grupo cuántico*" en referencia a las álgebras de Hopf que son deformaciones de álgebras de Lie simples,y las conectó con el estudio de la *ecuación de Yang-Baxter*,que es una condición necesaria para la resolubilidad de los modelos mecánicos estadísticos. También generalizó las álgebras de Hopf a las álgebras cuasi-Hopf e introdujo el estudio de los *giros de Drinfeld*,que se pueden utilizar para factorizar la matriz R correspondiente a la solución de la ecuación de Yang-Baxter asociada con un álgebra de Hopf cuasitriangular.

Drinfeld también ha colaborado con *Alexander Beilinson* para reconstruir la teoría de las álgebras de vértices en una forma libre de coordenadas, que se han vuelto cada vez más importantes para la teoría de campos conformes bidimensionales,la teoría de cuerdas y el programa geométrico de Langlands. Drinfeld y Beilinson publicaron su trabajo en 2004 en un libro titulado"Álgebras quirales".

[4]Beilinson, A. A.; Drinfeld, V. (2004). Chiral Algebras. American Mathematical Society. ISBN 978-0-8218-3528-9.

En general, *no hay* una *forma rápida* de *saber si un número arbitrario* tiene un *factor múltiplo*. Pero *hay* un *problema geométrico análogo* que es mucho *más fácil*. Los *polinomios tienen* muchas de las *mismas propiedades* que *los números*: pueden *sumarse, restarse, multiplicarse* y *dividirse*. Incluso hay *la noción* del significado que *un polinomio* sea "*primo*". Pero *a diferencia* de los *números*, los *polinomios* tienen una clara *apariencia geométrica*. Se puede *graficar sus soluciones* y *estudiar* sus *gráficas* para *obtener información sobre ellas*.

Por ejemplo, *si la grafica* de un *polinomio* es *tangente* al *eje* horizontal x en algún punto, se puede *deducir* que el *polinomio* tiene un *factor* repetido o *múltiplo* (indicado exactamente *en el punto de tangencia*). Es solo un ejemplo de cómo una *pregunta aritmética turbia adquiere* un *significado visual* al *convertirse* en su análogo polinomial

"*Los polinomios se pueden graficar. No se puede graficar un número (se trivializa)Y al graficar un [polinomio] te da ideas*" (*Conrad*) "*Con un número solo tienes el número*"

El *programa* "*geométrico*" *de Langlands*, como se llegó a llamar, tenía por objetivo *encontrar objetos geométricos con propiedades* que pudieran sustituir a los *grupos de Galois* y las *formas automórficas* en las *conjeturas de Langlands*. *Demostrar* una tal *correspondencia análoga* en este *nuevo entorno* mediante *el uso de herramientas geométricas* podría dar a los *matemáticos más confianza* en las *conjeturas originales de Langlands* y tal vez *sugerir formas útiles de pensar* sobre ellas. Fue una *visión agradable*, pero también *algo en el aire*, un poco como decir que *podrías cruzar el universo si solo tuvieras una máquina del tiempo*.

"*Hacer objetos geométricos que cumplan un papel similar en el ajuste a los números es algo mucho más difícil de hacer*" (*Conrad*)

Así que *durante décadas* el *programa geométrico de Langlands* se mantuvo *a una distancia del original*. Los *dos estaban animados por el mismo objetivo*, pero *involucraban objetos tan fundamentalmente diferentes* que no había una manera real *de hacerlos hablar entre sí*.

"*La gente aritmética parecía desconcertada por [el programa geométrico de Langlands]*. Dijeron que *está bien y es bueno*, pero que *no tiene nada que ver con nuestra preocupación*" (*Kaletha*)

·El *nuevo trabajo de Scholze y Fargues* [3], sin embargo, finalmente *cumple* con las *esperanzas depositadas en el programa geométrico de Langlands*, al *encontrar* la *primera forma* cuyas *propiedades* se *comunican directamente* con las *preocupaciones originales de Langlands*.

1.1.3 Un Tour de Force de Scholze

En septiembre de 2014, *Scholze* ya *enseñaba* un *curso especial* en la Universidad de California, *Berkeley*. A pesar de tener sólo 26 años, ya aparecía como una leyenda en el mundo de las matemáticas. Dos años antes había completado su *tesis doctoral*, en la que *articuló una nueva teoría geométrica basada* en *objetos* que había *inventado* llamados *espacios perfectoides*. Luego usó este marco para resolver parte de un problema en la teoría de números llamado la *conjetura de peso monodromía*.

Pero *más importante que el resultado particular fue el sentido de posibilidad que lo rodeaba*: no se podía decir *cuántas otras preguntas en matemáticas podrían ceder a esta nueva perspectiva incisiva*.

El *tema del curso* de *Scholze* fue una *versión aún más expansiva* de *su teoría* de los *espacios perfectoides*. Los matemáticos *llenaron* los *asientos* de la pequeña sala del seminario, *se alinearon* a lo largo de las *paredes* y se *derramaron en el pasillo* para *escucharlo hablar*.

"*Todo mundo quería estar allí porque sabíamos que era algo revolucionario*" (*David Ben-Zvi* - Universidad de Texas, Austin)

A portrait of the mathematician Peter Scholze, quien ayudó a abrir un nuevo frente en el "programa Langlands", con un colapso del terreno entre los mundos de los números y la geometría (Barbara Frommann - Hausdorff Center for Mathematics, Universidad de Bonn)

La *teoría* de *Scholze* se *basaba* en *sistemas numéricos especiales* llamados *p-ádicos*. La '*p*' en *p-ádico* significa '*primo*', como en los números primos. Para cada número primo, hay un sistema único de números *p-ádicos*: los 2-ádicos, los 3-ádicos, los 5-ádicos, etc. Los números *p-ádicos* han sido *una herramienta central* en *matemáticas* durante más de *un siglo*. Son *útiles* como *sistemas numéricos más manejables* en los que se investigan las preguntas que se plantéan en los *números racionales* (números que se pueden escribir como una relación de números enteros positivos o negativos), que comparados son difíciles de manejar.

La virtud de los números *p-ádicos* es que *cada uno de ellos* se basa en *un solo primo*. Esto los *hace más sencillos*, con *una estructura más obvia*, que los *racionales*, *que tienen una infinitud de primos sin patrón obvio entre ellos*. Los *matemáticos* a menudo *tratan de entender* las *preguntas básicas* primero sobre *los números p-ádicos* y luego toman esas enseñanzas de nuevo en su investigación sobre los racionales.

"*Los números p-ádicos son una pequeña ventana a los números racionales*" (*Kaletha*)

Todos los *sistemas numéricos* tienen una *forma geométrica* - los números reales, por ejemplo, *toman la forma* de una *línea recta*. Los *espacios perfectoides* de *Scholze* dieron una *forma geométrica nueva* y *más útil* a los *números p-ádicos*. Esta *geometría mejorada* hizo de los *p-ádicos*, *vistos* a través de sus *espacios perfectoides*, una *forma aún más efectiva de sondear fenómenos teóricos* de *números básicos*, como *preguntas sobre las soluciones* de *ecuaciones polinómicas*.

"*Reimaginó el mundo p-ádico y lo convirtió en geometría*" (*Ben-Zvi*) "*Debido a que son tan fundamentales, esto conduce a muchos y muchos éxitos*".

En su *curso de Berkeley*, *Scholze presentó* una *versión más general de su teoría de los espacios perfectoides, construida sobre objetos aún más nuevos que había ideado llamados diamantes*. La *teoría prometía ampliar* aún más los *usos de los números p-ádicos*. Sin embargo, cuando *Scholze comenzó* a *enseñarlo*, *ni siquiera había terminado de resolverlo*.

"*Él estaba dando el curso a medida que desarrollaba la teoría. Estaba ideando ideas por la noche y presentándolas frescas de su mente por la mañana*" (*Kaletha*)

Fue una *exhibición virtuosa*, y una de las *personas presentes* en la sala para escucharlo fue *Laurent Fargues*.

1.1.4 Teniendo la curva, se puede viajar.

Al unísono que *Scholze* estaba *dando sus conferencias*, *Fargues* asistía un *semestre especial* al Instituto de Investigación de Ciencias Matemáticas (MSRI). También había pensado mucho en los números *p-ádicos*. Durante la *última década* había *trabajado* con *Jean-Marc Fontaine* en un área de las matemáticas llamada *teoría p-ádica de Hodge*, la cual *se centra* en *cuestiones aritméticas básicas sobre estos números*. Durante ese tiempo, *él y Fontaine* habían *ideado* su propio nuevo objeto geométrico. Ese ente geométrico era una curva - la *Curva de Fargues-Fontaine* - cada uno de cuyos puntos *representaba una versión de un objeto* importante llamado *anillo p-ádico*.

Fargues necesitaba *una geometría* que *no existía*. Pero resultaba que *Scholze* en ese mismo momento la estaba desarrollando (*Tasho Kaletha*)

Tal *como se concibió originalmente*, era una *herramienta estrechamente útil* en *una parte técnica de dichas matemáticas*, *no algo* que probablemente *sacudiera todo el campo*.

"*Es un principio organizador en la teoría p-ádica de Hodge*, *así es como lo pienso*. *Para mí* era *imposible hacer un seguimiento* de todos *estos anillos* antes de que *esta curva aparecíera*" (*Caraiani*)

Pero como *Fargues* se sentó a *escuchar a Scholze*, *imaginó un papel aún mayor para esta curva en las matemáticas*. El *objetivo* aún *no alcanzado* del *programa geométrico de Langlands* era *encontrar un objeto geométrico que codificara las respuestas a las preguntas en teoría de números*. *Fargues* percibió *cómo su curva*, *fusionada con la geometría p-ádica de Scholze*, y podía servir exactamente para ese papel. A mediados del semestre arribó a *Scholze* y compartió su plan naciente. *Scholze* se mostró escéptico. "*Me mencionó esta idea durante una pausa para el café en el MSRI*" (*Scholze*) "*No fue una conversación muy larga. Al principio pensé que no podía ser bueno*".

Pero *tuvieron más conversaciones*, y *Scholze pronto* se dio cuenta de que el *enfoque podría funcionar*. El 5 de diciembre de 2014, cuando el semestre terminó, *Fargues* dio una *conferencia* en *MSRI* en la que *introdujo una nueva visión* para el *programa geométrico langlands*. Propuso que *debería ser posible redefinir la curva de Fargues-Fontaine* en términos de la *geometría p-ádica de Scholze*, y *luego usar ese objeto redefinido para probar una versión de la correspondencia de Langlands.* La *propuesta de Fargues* fue un *giro final e inesperado* en lo que ya *había sido una emocionante temporada de matemáticas.*

"*Así fue como concluyó el semestre [de 2014]. Recuerdo que quedé en shock*" (*Ben-Zvi*)

Ana Caraiani.

Tasho Kaletha.

David Dror Ben-Zvi

1.1.5 Una correspondencia local.

Las *conjeturas originales de Langlands tratan* sobre la *coincidencia* de las *representaciones de los grupos de Galois de los números racionales* con *formas automórficas.* Los *p-ádicos* son *un sistema numérico diferente*, y también *hay una versión de las conjeturas de Langlands.* (*Ambos* todavía están *separados* del *programa geométrico de Langlands*) También *implica* un *tipo de coincidencia*, aunque en este caso es *entre representaciones* del *grupo de Galois* de los *números p-ádicos* y las *representaciones de grupos p-ádicos.*

Si bien *sus objetos son diferentes*, el *espíritu de las dos conjeturas es el mismo*: *estudiar soluciones de polinomios* — en *términos de números racionales* en un caso y en *términos de números p-ádicos* en el otro — *relacionando dos tipos de objetos aparentemente no relacionados.* Los *matemáticos se refieren a la conjetura de Langlands para los números racionales* como la *correspondencia* "*global*" *de Langlands*, *porque* los *racionales contienen a todos los primos*, y la *versión* para los *números p-ádicos* como la *correspondencia de Langlands* "*local*", ya que los *sistemas de números p-ádicos tratan* con un *número primo a la vez.*

Fargues, en su *conferencia* de *diciembre de 2014* en el *MSR*I, *propuso probar la conjetura local de Langlands usando la geometría de la curva de Fargues-Fontaine. Pero debido* a que *él y Fontaine* habían *desarrollado la curva para una tarea completamente diferente* y *más limitada*, *su definición requería una geometría más poderosa* que *pudiera proporcionar la estructura y la complejidad que la curva necesitaría* en última instancia *para apoyar estos planes ampliados.*

La *situación* era *similar* a *cómo se podía llegar a una forma de tres lados que es independiente de cualquier teoría geométrica en particular*, *pero* si se *combina* esa *forma con la teoría de la geometría euclidiana*, de repente *adquiere una vida más rica*: se *obtiene la trigonometría*, el *teorema de Pitágoras* y *nociones bien definidas de simetría.* Se convierte en un triángulo con todas las reglas.

"[Fargues] estaba *tomando la idea de la curva* y *usando la poderosa geometría que Scholze desarrolló* para *darle cuerpo a esa idea*" (*Kaletha*) "*Eso le permite* *declarar formalmente las hermosas propiedades* de la *curva*".

La *estrategia diseñada* por *Fargues* llegó a ser conocida como la "*geometrización de la correspondencia local de Langlands*". Pero en el momento en que lo hizo, *las matemáticas existentes no tenían las herramientas* que *necesitaba para llevarlo a cabo*, y las *nuevas teorías geométricas no aparecen todos los días.* Por suerte, la *historia estuvo de su lado.*

"[La conjetura de Fargues] era una idea audaz porque *Fargues necesitaba geometría que no existía.* Pero resultó que *Scholze* en ese *mismo momento la estaba desarrollando*" (*Kaletha).*

1.1.6 Los cimientos del edificio.

Después de su tiempo juntos en Berkeley, *Fargues* y *Scholze* pasaron *los siete años siguientes estableciendo una teoría geométrica* que les permitiría *reconstruir la curva de Fargues-Fontaine en una forma adecuada para sus planes.*

"*En 2014* ya *estaba claro* básicamente *cuál debía ser el panorama general y cómo debía encajar todo.* Sólo que *el todo estaba completamente mal definido. No había cimientos para hablar de nada de eso*" (*Scholze*)

El *trabajo* se llevó a cabo *en varias etapas. En 2017*, *Scholze completó el artículo "Étale Cohomology of Diamonds"* [4], que *formalizó* muchas de las *ideas* más *importantes* que había *introducido* durante sus *conferencias* en *Berkeley. Combinó ese artículo* con otro *trabajo* masivo que *él y* el coautor *Dustin Clausen*[5] de la Univ. de Copenhague publicaron como una *serie de conferencias en 2020*[6]. Ese *material* -las *352 páginas* del mismo- eran *necesarias* para *sentar las bases* de algunos *puntos concretos* que habían surgido en la obra de *Scholze*

[5] **Dustin Clausen**, es un profesor asociado miembro del nuevo Centro de Geometría y Topología de la Universidad de Copenhague.

Obtuvo su doctorado en el MIT bajo la dirección de *Jacob Lurie*, y principalmente ha investigado en *teoría K algebraica*, en conexiones con la *teoría de números* y la *teoría de homotopía.* Después de su postdoctorado en *ucph*, fui a Bonn durante dos años, primero en la Universidad de Bonn y luego en el Instituto Max Planck de Matemáticas. Allí estubo trabajando con *Peter Scholze* en las nuevas bases para una nueva geometría.

Puede encontrar Dustin en la oficina 04.1.09

[6] El curso llamado "Clases Magistrales en 'Matemáticas Condensadas'" de la Univ. de Copenhague, 9 - 13 de noviembre de 2020. El curso presentó las "Matemáticas condensadas" que actualmente están desarrollando *Dustin Clausen* y *Peter Scholze.* Esta teoría tiene la promesa de expandir enormemente el alcance de los métodos geométricos y analíticos en un marco amplio que, además de la *geometría p-ádica*, incluye *geometría* y *análisis complejos.* Tal *unificación* es completamente *nueva* y bien puede proporcionar la base geométrica para que sea posible atacar algunas de las*conjeturas* más importantes en matemáticas.

Los videos de las conferencias se subieron al canal de *YouTube* del *Centro GeoTop* de la Universidad de Copenhague.

sobre los ‘*diamantes*’.

Dustin Clausen.

Hay que *reconstruir* muchos *cimientos de geometría* en este *tipo de marco*, y me *sorprendió* mucho que eso *fuera posible* (*Peter Scholze*)

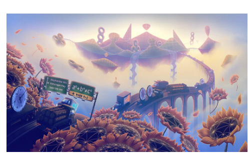
“*Scholze* tuvo que *idear otra teoría que estaba ahí* para *ocuparse de ciertos problemas técnicos que surgieron* en las *últimas* 3 *páginas de su artículo* [4]” (*Kaletha*)

En su conjunto, *estos y otros documentos permitieron* a *Fargues* y *Scholze idear* una forma *completamente nueva* de definir *un objeto geométrico*. Se puede *imaginar* que *comienzas* con una *colección desorganizada de puntos*, una “*nube de polvo*”, en *palabras de Scholze*, que *quieres pegar juntos* de la *manera correcta* para *ensamblar* el *objeto que estás buscando*. La *teoría* que *Fargues* y *Scholze desarrollaron proporciona direcciones matemáticas precisas* para *realizar ese pegado* y *certificar* que, *al final*, se obtendrá *la curva de Fargues-Fontaine*. Y esta vez, *se define* de la *forma correcta* para la *tarea propuesta*: *abordar la correspondencia local de Langlands*

“*Esa es técnicamente la única manera de tenerla en nuestras manos*” (Scholze) “*Hay que reconstruir muchos cimientos de geometría* en este *tipo de marco, y fue muy sorprendente para mí que eso fuera posible*”.

Después de haber definido la curva de Fargues-Fontaine, *Fargues* y *Scholze* se emboletaron en la siguiente etapa: *equiparla* con las *características necesarias* para *probar* una *correspondencia entre las representaciones de los grupos de Galois y las representaciones de los grupos p-ádicos.*

Para *entender estas características*, primero *se considera un objeto geométrico más simple*, como *un círculo*. En *cada punto del círculo* es posible *colocar una recta tangente a la forma exactamente en ese punto*. *Cada punto* tiene una *recta tangente única*. Se pueden *recopilar todas esas muchas rectas juntas en un objeto geométrico auxiliar,* llamado *fibrado tangente*, que *está asociado al objeto geométrico subyacente, el círculo.*



El programa de Langlands: El ‘increíble’ puente matemático se extendió más allá del último teorema de Fermat.

En su *nuevo trabajo*, *Fargues* y *Scholze hacen algo similar para la curva Fargues - Fontaine*. Pero ahora *en lugar de planos tangentes y haces*, *definen formas de construir muchos objetos geométricos más complicados*. Un *ejemplo*, llamado *poleas*, se *puede asociar* naturalmente *a puntos en la curva de Fargues-Fontaine* de manera que las *líneas tangentes se puedan asociar a puntos en un círculo*.

Las *poleas fueron desarrolladas* sustancialmente en la *década de 1950* por *Alexander Grothendieck*, y realizan *un seguimiento* de cómo *las características algebraicas y geométricas* del *objeto geométrico subyacente interactúan entre sí*. Durante *décadas*, los *matemáticos* han *sospechado* que *podrían ser los mejores objetos* para centrarse en el *programa geométrico de Langlands*.

"*Se reinterpreta la teoría de las representaciones de grupos de Galois* en términos de *gavillas*" (Conrad)

Hay *versiones locales* y *globales* del *programa geométrico langlands*, al igual que hay para el *original*. Las *preguntas* sobre las *gavillas* se *relacionan con el programa geométrico global*, que *Fargues sospechaba* que *podría conectarse con la correspondencia local de Langlands*. El *problema era* que los *matemáticos no tenían los tipos correctos de gavillas definidas* en el *tipo correcto de objeto geométrico* para *pasar el día*. Ahora *Fargues* y *Scholze* los *han proporcionado*, a través de la *curva Fargues-Fontaine*.

1.1.7 El final del inicio.

Específicamente, se les produjeron dos tipos diferentes: *Gavillas coherentes* que corresponden a *representaciones de grupos p-ádicos*, y *gavillas étale* que corresponden a *representaciones* de *grupos de galois*.

En su nuevo artículo, *Fargues* y *Scholze* [3] demuestran que *siempre* hay una *manera de hacer coincidir* una *gavilla coherente* con una *gavilla étale*, y como *resultado hay siempre* una *manera de hacer coincidir* una *representación de un grupo p-ádico con una representación de un grupo de Galois*.

De esta manera, *finalmente probaron en una dirección la correspondencia local de Langlands*. Pero *la otra dirección sigue estando como un problema abierto*.

"*Resuelve en la dirección, de cómo pasar de una representación de un grupo p-ádico a una representación de un grupo de Galois, pero no cómo regresar*" (*Scholze*)

Este trabajo es *uno de los mayores avances* hasta ahora *en el programa Langlands*, a menudo mencionado al unísono que el trabajo de *Vincent Lafforgue* [6] del Instituto Fourier en Grenoble, Francia, sobre un *aspecto diferente* de la *correspondencia de Langlands* de 2018 [6]. También es *la evidencia más tangible* hasta ahora de que *los matemáticos anteriores* no fueron ingenuos al intentar el *programa de Langlands* por *medios geométricos*.

"*Estas cosas son una gran reivindicación al trabajo que muchas personas estaba haciendo en langlands geométricos durante décadas*" (*Ben-Zvi*)

Para las matemáticas en su conjunto, hay una sensación de *asombro* y *posibilidad* en la recepción de esta nueva obra [3]: *asombro* por la forma en que

Scholze ha estado *construyendo* desde la escuela de posgrado *una teoría de la geometría p-ádica* que se *manifiesta* en la *curva de Fargues-Fontaine*, y *posibilidad* porque *esa curva abre dimensiones completamente nuevas e inexploradas* del *programa de Langlands.*

"*Realmente lo ha cambiado todo. Estos últimos cinco u ocho años, en efecto ha cambiado todo este campo*" (*Viehmann*)

El siguiente *paso* evidente es *terminar ambos lados* de la *correspondencia local de Langlands*, para *demostrar* que *es una avenida de doble sentido*, en lugar de la carretera de un solo sentido que *Fargues* y *Scholze* han *pavimentado hasta ahora.*llllll

Más allá de eso, está la correspondencia global de Langlands en sí. No hay una manera obvia de traducir la geometría de Fargues y Scholze de los números p-ádicos en construcciones correspondientes para los números racionales. Pero también es imposible mirar este nuevo trabajo y no preguntarse si podría haber una manera.

"Es una dirección en la que realmente espero dirigirme", dijo Scholze.

Corrección: 26 de julio de 2021

Alexander Grothendieck no fue el primero en definir gavillas, aunque sí las desarrolló sustancialmente. El artículo ha sido revisado en consecuencia.

1.2 REFERENCIAS.

Bibliography

[1] *Peter Scholze;* **The Local Langlands correspondence for $\GL_n$ over p-adic fields;** [Submitted on 7 Oct 2010], arXiv:1010.1540, (or arXiv:1010.1540v1 [math.AG] para esta version), 37 pages, Algebraic Geometry (math.AG), Number Theory (math.NT), Representation Theory (math.RT); Classes MSC: -11S37, 11R39, 11F55, 14G35, 11G18.

En este artículo se vuelve a probar la correspondencia local de *Langlands* por GL_n mediante *campos p-adicos* así como la *existencia de representaciones l-ádicas de Galois* agregadas a (la mayoría) las representaciones conjugadas, algebraicas, regulares auto-duales de tipo automórfica cuspidal, para las cuales se demuestra una afirmación de compatibilidad local - global como en el libro de *Harris-Taylor* [3].

En contraste con las pruebas de la *Correspondencia Local langlands* dada por *Henniart* [2] y *Harris-Taylor* [3] la prueba aportada *pasa completamente por alto* la *correspondencia numérica local Langlands de Henniart* [2]. En su lugar, se hace uso de un resultado anterior que describe los ciclos cercanos invariantes por inercia en ciertas situaciones regulares.

[2] *G. Henniart.* **Une preuve simple des conjectures de Langlands pour GL(n) sur un corps p-adique**; *Invent. Math., 139(2):439–455, 2000.*

[3] *M. Harris* and *R. Taylor*. **The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties**; *Annals of Mathematics Studies, volume 151 of Princeton, NJ, 2001. Princeton University Press.* Con un apéndice de Vladimir G. Berkovich.

[4] *Erica Klarreich*; ; Quanta Magazine, junio 28, 2016,

[5] *Peter Scholze*; **Perfectoid spaces**; arXiv:1111.4914 [math.AG] (or arXiv: 1111.4914v1 [math.AG] for this version), [Submitted on 21 Nov 2011], -51 pages, 2 figures, MSC classes:-14G10, 14G17, 14G20, 14G22, 11S15, 12J25.

[6] *Erica Klarreich*; **Medalla Fields 2018 y Premio Nevanlinna en geometría aritmética**; Quanta Magazine, serie Fields Medalls, agosto 1, 2018.

[7] *Erica Klarreich*; **The Oracle of Arithmetic Works Best Without Writing**

[8] *M. Harris* and *R. Taylor*. **The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties**; *Annals of Mathematics Studies, volume 151 of Princeton, NJ, 2001. Princeton University Press*. Con un apéndice de Vladimir G. Berkovich.

[9] *Peter Scholze;* **The Local Langlands correspondence for $\mathbf{GL_n}$ over p-adic fields;** [Submitted on 7 Oct 2010], arXiv:1010.1540, (or arXiv:1010.1540v1 [math.AG] para esta version), 37 pages, Algebraic Geometry (math.AG), Number Theory (math.NT), Representation Theory (math.RT); Classes MSC: -11S37, 11R39, 11F55, 14G35, 11G18.

[10] *Laurent Fargues, Peter Scholze*; **Geometrization of the local Langlands correspondence**; *[Submitted on 26 Feb 2021 (this version), latest version 27 May 2021 (v2)], Comments: 348 pages, comments welcome!, Subjects: Representation Theory (math.RT); Algebraic Geometry (math.AG); Number Theory (math.NT), MSC classes: 11S37, 14D24, 22E57, 11F77, 11F85, 14G45, Cite as: - arXiv: 2102.13459 [math.RT] (or arXiv:2102.13459v1 [math.RT] for this version)*

[11] *Peter Scholze*; **Etale cohomology of diamonds;** Comments: 165 pages; added sections on adic sheaves and comparison to schemes.

Subjects: Algebraic Geometry (math.AG); Number Theory (math.NT)

MSC classes: 14F20, 14F05, 14G22, 14G20

Cite as: arXiv:1709.07343 [math.AG], (or arXiv:1709.07343v2 [math.AG] for this version), Submission history: From: Peter Scholze [view email], [v1] Thu, 21 Sep 2017 14:27:30 UTC (133 KB), [v2] Fri, 26 Feb 2021 13:21:49 UTC (143 KB) [Submitted on 21 Sep 2017 (v1), last revised 26 Feb 2021 (this version, v2)]

Motivated by problems on the étale cohomology of Rapoport–Zink spaces and their generalizations, as well as Fargues's geometrization conjecture for the local Langlands correspondence, we develop a six functor formalism for the étale cohomology of diamonds, and more generally small v-stacks on the category of perfectoid spaces of characteristic p. Using a natural functor from analytic adic spaces over Zp to diamonds which identifies étale sites, this induces a similar formalism in that setting, which in the noetherian setting recovers the formalism from Huber's book.

[12] *Dustin Clausen, Peter Scholze*; **Masterclass in Condensed Mathematics;** University of Copenhagen, 9 - 13 November 2020.

The course will present the "Condensed mathematics" currently being developed by Dustin Clausen and Peter Scholze. This theory holds the promise of vastly expanding the reach of geometrical and analytical methods in a broad framework that, in addition to p-adic geometry, includes complex geometry and analysis. Such a unification is entirely new and may well supply the geometrical underpinning to make it possible to attack some of the most important conjectures in mathematics.

The videos of the lectures are uploaded to the YouTube Channel of the GeoTop Centre at Copenhagen University.

[13] Vincent Lafforgue, Aurélien Alvarez; **Actions affines isométriques propres des groupes hyperboliques sur des quotients d'espaces** l_p, *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*. A paraître (2018), (Lien sur 'Arxiv')