Coordenadas polares.

Ejercicio 1.

Demostrar que si un punto $S(x_1, y_1)$ tiene coordenadas polares (r, θ) y un punto $T(x_2, y_2)$ tiene coordenadas $\left(r, \frac{\pi}{2} - \theta\right)$ entonces $x_1 = y_2$ y $y_1 = x_2$

Demostración:

Sean $S(x_1, y_1)$ y $T(x_2, y_2)$ dos puntos en coordenadas cartesianas y sean (r, θ) y $\left(r, \frac{\pi}{2} - \theta\right)$ sus respectivas coordenadas polares, entonces se cumplen las siguientes igualdades.

$$r^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2$$

$$r^2 = {x_2}^2 + {y_2}^2$$

$$\sin(\theta) = \frac{y_1}{r} \dots .(1)$$

$$\cos(\theta) = \frac{x_1}{r} \dots .(2)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{y_2}{r} \dots .(3)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{x_2}{r} \dots (4)$$

Trabajando con (3) tenemos

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + (-\theta)\right)$$

Dado que el $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-\theta) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(-\theta) = \cos(-\theta)$$

Como el coseno es una función par, entonces el signo de θ no importa.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$$

Por (3) tenemos

$$\cos(\theta) = \frac{y_2}{r} \dots (5)$$

Ahora trabajamos con (4)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+(-\theta)\right)$$

Dado que el $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-\theta)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(-\theta)=-\sin(-\theta)$$

Como el seno es una función impar

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-(-\sin(\theta))=\sin(\theta)$$

Por (4) tenemos

$$\sin(\theta)=\frac{x_2}{r}\dots(6)$$

Igualando $(2\ )$ y (5)

$$\frac{x_1}{r}=\frac{y_2}{r}$$

$$x_1=y_2$$

Igualando (1) y (6)

$$\frac{y_1}{r}=\frac{x_2}{r}$$

$$y_1=x_2$$

Por lo tanto $x_1=y_2$ y $y_1=x_2$ queda demostrado.

Ejercicio 2. Deducir dos formas en que la distancia que separa a los puntos P_1 y P_2 cuyas coordenadas son $(r_1, \theta_1)\ y\ (r_2, \theta_2)$ esta dada por:

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

Sean $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ entonces la distancia entre P_1 y P_2 será $d = |\overline{P_1 P_2}|$

FORMA 1.-

Tenemos que la distancia entre dos puntos cuyas coordenadas son $P_1(x_1, y_1)\ \ y\ \ P_2(x_2, y_2)$ en coordenadas rectangulares está dada por

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Haciendo la transformación a coordenadas polares

$$d = \sqrt{(r_1 \cos(\theta_1) - r_2 \cos(\theta_2))^2 + (r_1 \sin(\theta_1) - r_2 \sin(\theta_2))^2}$$

$$d^2 = {r_1}^2 \cos\theta_1^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + r_2^2 \cos(\theta_2)^2 + r_1^2 \sin(\theta_1)^2 - 2r_1 r_2 \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + r_2^2 \sin(\theta_2)^2$$

$$= {r_1}^2(\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2) + r_2^2(\cos(\theta_2)^2 + \sin(\theta_2)^2) - 2r_1 r_2(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2))$$

$$= {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1 r_2 \left(\frac{\cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2}\right) + \left(\frac{\cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_1 + \theta_2)}{2}\right)$$

$$= {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1 r_2 \left(\frac{2\cos(\theta_1 - \theta_2)}{2}\right) = {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Como $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_2 - \theta_1)$ entonces

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

FORMA 2.-

Formaremos un triangulo con vértices en OP_1P_2 tenemos que la distancia del origen "O" al punto "P_1" será r_1, es decir, $|\overline{OP_1}| = r_1$

Y de igual forma la distancia de $|\overline{OP_2}| = r_2$ también nos fijamos en el ángulo P_1OP_2 que será $\theta_1 - \theta_2$, utilizando la ley de los cosenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos(\alpha)$ y que

$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_2 - \theta_1)$

Entonces

$$d = |\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$