Seminario de Geometría y Cálculo

Dr. Vinicio Antonio Gómez Gutiérrez

September 2024

1 Sesión 22 de agosto de 2024

Definición Se dice que dos magnitudes a y b son conmensurables si existe c tal que c cabe un número entero de veces en a y en b no deja residuo. Esto es

$$c|a \Rightarrow a = nc$$
$$c|b \Rightarrow b = mc$$

También

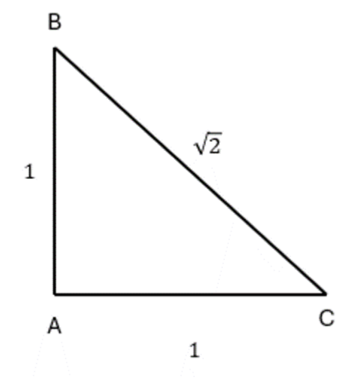
- a,b son conmensurables si y sólo si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{nc}{mc} = \dfrac{n}{m} \in \mathbb{Q}$
- a,b son inconmensurables si $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$

Problema: Demostración geométrica de la irracionalidad de $\sqrt{2}$

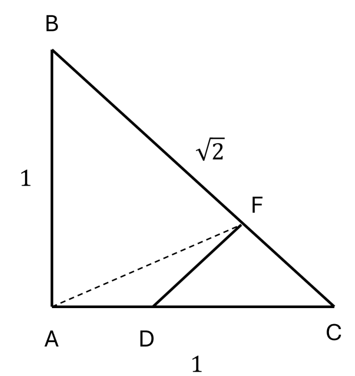
Proof. $\boxed{\text{La idea es mostrar que 1 y } \sqrt{2} \text{ son inconmensurables}}$
Supongamos que existe un segmento HK tal que

- HK divide a 1=AB
- HK divide a $\sqrt{2} = BC$

Geométricamente consideramos un triángulo isóceles de lados 1 e hipotenusa igual a $\sqrt{2}$



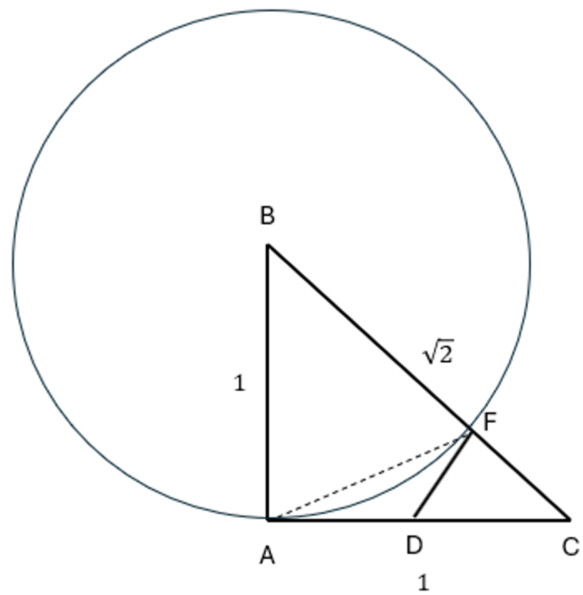
Trazamos F eb BC tal que $BF = 1$



esto implica HK cabe un número entero de veces en FC, por tanto
$BC = n\ HK$ y $BF = m\ HK$ por lo que

$$FC = BC - BF = n\ HK - m\ HK = (n - m)HK$$

Ahora trazamos una circunferencia de radio 1 con centro en B que pase por A



de la figura se deduce que:

$$
\begin{aligned}
AB &= FB \quad (radios)\\
FD &= AD \quad (tangentes)
\end{aligned}
$$

En la figura se puede ver que el cateto del triángulo chico FC es menor que la mitad del cateto del triángulo original AB, y cada vez que construyamos un triángulo más pequeño será de lados menores que la mitad del triángulo anterior.
Además el triángulo pequeño $\triangle\ FDC$ es semejante al triángulo grande $\triangle\ ABC$ pues $\angle ACB$ es común y $\angle CFD$ es recto, por tanto $\angle CDF = \angle ABC$. De manera que $\triangle\ FDC$ es isóceles en consecuencia $FC = FD$.
Tenemos entonces

- HK cabe un número entero de veces en AC
- HK cabe un número entero de veces en AD
- HK cabe un número entero de veces en DC

Esto es HK cabe un número entero de veces en cada lado del triángulo chico.
Este proceso se puede continuar indefinidamente, obteniéndose triángulos isóceles que puedan llegar a ser tan pequeños como queramos, en particular cuyos lados sean más chicos que HK, lo cual es manifiestamente imposible.
Esto lleva a la conclusión de que no puede haber una unidad de longitud HK que mida simultaneamente al 1 (cateto) y a $\sqrt{2}$ (la hipotenusa del triángulo), es decir, que estos dos números no son conmesurables. $\square$

References

[1] González Urbaneja P. M. Pitágoras, el filósofo del número. España: Nivola, 2007.