

La turbulencia.

GGA, profesor jubilado de la FC-UNAM.

18 de octubre de 2021.

Contents

I	I: Matemáticos demuestran la ley universal de la turbulencia.	2
A	Explotando la aleatoriedad, 3 matemáticos logran demostrar que una ley elegante subyace al movimiento caótico de los sistemas turbulentos.	3
A.1	Su demostración en 4 artículos en línea.	3
A.1.1	Es la 1ra. prueba matemática para la ley clave de la turbulencia en mecánica de fluidos.	3
A.1.2	Resumen.	3
A.1.3	Turbulencia hasta el final.	10
A.1.4	Mezclándolo todo.	11
A.1.5	Un enfoque aleatorio.	13
A.1.6	Comprender la mezcla.	14
A.1.7	REFERENCIAS.	15
.0.8		16
.0.9	The First Appendix	16

Part I

I: Matemáticos demuestran la ley universal de la turbulencia.

Appendix A

Explotando la aleatoriedad, 3 matemáticos logran demostrar que una ley elegante subyace al movimiento caótico de los sistemas turbulentos.

A.1 Su demostración en 4 artículos en línea.

A.1.1 Es la 1ra. prueba matemática para la ley clave de la turbulencia en mecánica de fluidos.

A.1.2 Resumen.

La turbulencia es uno de los fenómenos menos comprendidos del mundo físico. Durante mucho tiempo se ha considerado demasiado difícil de entender y más aún de predecir matemáticamente. La turbulencia es la razón por la que las ecuaciones de Navier-Stokes, que describen cómo fluyen los fluidos, son tan difíciles de resolver, que hay una recompensa de un millón de USD para cualquiera que pueda probarlas matemáticamente. Pero ahora, 3 matemáticos han roto tal barrera y han desarrollado la primera prueba matemática ‘rigurosa’ para una ley fundamental de turbulencia.

¿Qué pasaría si los ingenieros pudieran diseñar un mejor chorro con ecuaciones matemáticas que reduzcan drásticamente la necesidad de pruebas experimentales? ¿O qué pasaría si los modelos de predicción meteorológica pudieran predecir detalles en el movimiento del calor del océano antes un huracán? Estas cosas son imposibles ahora, pero podrían ser posibles en

el futuro con una comprensión matemática más completa de las leyes de la turbulencia.

Los matemáticos Jacob Bedrossian, Samuel Punshon-Smith y Alex Blumenthal desarrollaron la primera prueba matemática rigurosa que explica una ley fundamental de la turbulencia. La prueba de la 'ley Batchelor' fue presentada en una reunión de la 'Sociedad de Matemáticas Industriales y Aplicadas' en diciembre de 2019.

Aunque todas las leyes de la física se pueden describir utilizando ecuaciones matemáticas, muchas no están respaldadas por pruebas matemáticas detalladas que expliquen sus principios subyacentes. Un área de la física que se ha considerado demasiado desafiante para explicarla con matemáticas rigurosas es la turbulencia. Visto en el oleaje oceánico, las nubes ondulantes y la estela detrás de un vehículo a toda velocidad, la turbulencia es el movimiento caótico de los fluidos (incluido el aire y el agua) que incluye cambios aparentemente aleatorios en la presión y la velocidad.

La turbulencia es la razón por la que las ecuaciones de Navier-Stokes, que describen cómo fluyen los fluidos, son tan difíciles de resolver que de paso vale decir, hay una recompensa de un millón de dólares para quien pueda probarlas matemáticamente. Para comprender el flujo de fluidos, los científicos primero deben comprender la turbulencia.

"Debería ser posible observar un sistema físico y comprender matemáticamente si una ley física dada es verdadera" (Jacob Bedrossian, coautor de la prueba) "Creemos que nuestra prueba proporciona la base para comprender por qué la 'ley de Batchelor', una ley clave de la turbulencia, es cierta de una manera que ningún trabajo de física teórica ha hecho hasta ahora. Este trabajo podría ayudar a aclarar algunas de las variaciones observadas en los experimentos de turbulencia y predecir los ajustes donde se aplica la ley de Batchelor, así como donde no lo hace".

Desde su introducción en 1959, los físicos han debatido la validez y el alcance de la ley de Batchelor, que ayuda a explicar cómo las concentraciones químicas y las variaciones de temperatura se distribuyen en un fluido. Por ejemplo, revolver la crema en el café crea un gran remolino con pequeños remolinos que se ramifican de él e incluso otros más pequeños que se ramifican de ellos. A medida que la crema se mezcla, los remolinos se hacen más pequeños y el nivel de detalle cambia en cada escala. La ley de Batchelor predice el detalle de esos remolinos a diferentes escalas.

La ley desempeña un papel en cosas tales como los productos químicos que se mezclan en una solución, el agua del río que se mezcla con el agua salada a medida que fluye hacia el océano y el agua cálida de gulfstream que se combina con agua más fría a medida que fluye hacia el norte. A lo largo de los años, se han hecho muchas contribuciones importantes para ayudar a comprender esta ley, incluido el trabajo en UMD de los distinguidos profesores universitarios Thomas Antonsen y Edward Ott. Sin embargo, una prueba matemática completa de la ley de Batchelor ha permanecido esquiva.

"Antes del trabajo del profesor Bedrossian y colegas, la 'ley de Batchelor' era una conjetura" (Vladimir Sverak, profesor de matemáticas en la Universidad de Minnesota que no participó en el trabajo) "La conjetura fue apoyada por algunos datos de experimentos, y uno podría especular sobre por qué tal ley debería mantenerse. Una prueba matemática de la ley puede considerarse como una comprobación de consistencia ideal. También nos da una mejor comprensión de lo que realmente está sucediendo en el fluido, y esto puede conducir a un mayor progreso".

"No estábamos seguros de si esto se podría hacer" (Bedrossian, quien también tiene una cita conjunta con el 'CentroDeComputaciónCientíficaYModelado Matemático' de la UMD) "Se

pensaba que las leyes universales de la turbulencia eran demasiado complejas para abordarla matemáticamente. Pero pudimos resolver el problema combinando la experiencia de múltiples campos”.

Experto en ecuaciones diferenciales parciales, Bedrossian trajo a dos investigadores postdoctorales de la UMD que son expertos en otras tres áreas para ayudarlo a resolver el problema. Samuel Punshon-Smith (Ph.D. '17, matemáticas aplicadas y estadística, y computación científica), ahora profesor asistente de Prager en la Universidad de Brown, es un experto en probabilidad. Alex Blumenthal es un experto en sistemas dinámicos y teoría ergódica, una rama de las matemáticas que incluye lo que comúnmente se conoce como teoría del caos. El equipo representó cuatro áreas distintas de experiencia matemática que rara vez interactúan en este grado. Todos fueron esenciales para resolver el problema.

"La forma en que se ha abordado el problema es realmente creativa e innovadora", dijo Sverak. "A veces, el método de prueba puede ser incluso más importante que la prueba en sí. Es probable que las ideas de los artículos del profesor Bedrossian y sus coautores sean muy útiles en futuras investigaciones".

El nuevo nivel de colaboración que el equipo aportó a este número prepara el escenario para desarrollar pruebas matemáticas para explicar otras leyes de turbulencia no probadas.

"Si esta prueba es todo lo que logramos, creo que hemos logrado algo", dijo Bedrossian. "Pero tengo la esperanza de que esto sea un calentamiento y que esto abra una puerta a decir 'Sí, podemos probar las leyes universales de la turbulencia y no están más allá del ámbito de las matemáticas'. Ahora que estamos equipados con una comprensión mucho más clara de cómo usar las matemáticas para estudiar estas preguntas, estamos trabajando para construir las herramientas matemáticas necesarias para estudiar más de estas leyes".

Comprender los principios físicos subyacentes detrás de más leyes de turbulencia podría eventualmente ayudar a los ingenieros y físicos a diseñar mejores vehículos, turbinas eólicas y tecnologías similares o a hacer mejores predicciones meteorológicas y climáticas. Story Source: Materials provided by University of Maryland.

Imagina un río tranquilo. Ahora imagina un torrente de agua. ¿Cuál es la diferencia entre ambos? Para los matemáticos y los físicos es en concreto: el río liso fluye en una sola dirección, mientras que el torrente fluye en muchas direcciones distintas a la vez.

A los sistemas físicos con este último tipo de *movimiento fortuito* se les llama *turbulentos*. Que su movimiento se desarrolle de tantas maneras diferentes a la vez los hace *difíciles de estudiar matemáticamente*. Es probable que pasen muchas generaciones de matemáticos antes de que los científicos puedan describir un río rugiente con declaraciones matemáticas precisas y exactas.

Pero una nueva demostración que se pretende explorar halla que, si bien ciertos sistemas turbulentos aparecen como rebeldes, en realidad siempre se ajustan a una ley universal relativamente simple. El trabajo de estos 3 matemáticos es una de las descripciones más rigurosas, hasta ahora escritas, de la turbulencia que han surgido desde las matemáticas mismas. Y surge de un nuevo conjunto de métodos que están cambiando la forma en que los investigadores estudian este fenómeno, hasta ahora indomable.

“Bien puede ser el enfoque más prometedor para la turbulencia” (*Vladimir Sverak* - matemático de la Universidad de Minnesota y experto en turbulencia). Este trabajo proporciona una nueva forma de describir patrones en líquidos

en movimiento. Estos nuevos patrones aparecen como evidentes en las rápidas variaciones de temperatura entre puntos cercanos en el océano y la forma frenética y estilizada en que la pintura blanca y negra se mezclan.



Fig.1. George Batchelor Fig.1A. Andrey Nikolaevich Kolmogorov Fig.1B. Vladimir Svierak.

Nuestra historia comienza por 1959, cuando un matemático australiano de nombre

Como editor fundador del *Journal of Fluid Mechanics*, durante más de 40 años, George Batchelor ejerció una influencia prolongada y profunda en un tema de importancia central para las matemáticas aplicadas y la ciencia de la ingeniería.

Su propia investigación fue primero en el fenómeno de la turbulencia, descrito por Einstein como el problema no resuelto más desafiante de la física clásica, y posteriormente por Richard Feynman como el último gran problema no resuelto de la Física Clásica en el campo que se conoció bajo su liderazgo como ‘microhidrodinámica’

Batchelor escribió con una precisión y lucidez excepcionales y, con el ejemplo y su firme pero amable control como editor, desempeñó un papel crucial en el establecimiento de estándares exigentes en mecánica de fluidos.

Como jefe fundador del departamento de matemáticas aplicadas y física teórica en Cambridge, estableció un entorno en el que floreció la investigación en todas las aplicaciones de las matemáticas, y en el que se alentó a generaciones de estudiantes de investigación a desarrollar sus habilidades creativas.

Bajo su liderazgo entre 1959 y 1983, el departamento se convirtió en el centro de una red mundial de investigación colaborativa.

George Keith Batchelor nació y se educó en Melbourne,

Australia. Estudió física y matemáticas en la Universidad de Melbourne, y luego, al comienzo de la Segunda Guerra Mundial, emprendió investigaciones en una serie de problemas prácticos en aerodinámica relacionados con el esfuerzo de guerra. Durante este período, reconoció la turbulencia como el mayor desafío en la aerodinámica, y resolvió dedicar sus energías a ella tan pronto como terminara la guerra.

Escribió a G.I. Taylor, la gran autoridad británica en turbulencias en ese momento, ofreciendo sus servicios. Taylor aceptó supervisar su investigación, y en enero de 1945, junto con su esposa, Wilma, también de Melbourne, Batchelor se embarcó en un viaje maratónico de diez semanas a través de Nueva Zelanda, el Canal de Panamá y Nueva York, y desde allí en un convoy de 80 barcos a través del Atlántico para llegar a Cambridge.

Batchelor era ferozmente ambicioso y totalmente comprometido, progresando muy rápidamente.

Reconociendo la importancia de una teoría publicada por el matemático ruso Kolmogorov en 1941, Batchelor se supo presentar y montar con una crítica al trabajo Kolmogorov en el sexto Congreso Internacional de Mecánica Aplicada, celebrado en París en 1946. Esto lo marcó como una estrella en ascenso, y en 1947 se convirtió en miembro del Trinity College. Durante

los siguientes 15 años, Batchelor publicó una sucesión de estudios cada vez más detallados que exponen la intensa dificultad de comprender la turbulencia, una dificultad solo igualada por su importancia en la aerodinámica, la ingeniería química, la dinámica del océano y la atmósfera, y en la magnetohidrodinámica de las nubes de gas interestelares.

Batchelor hizo contribuciones fundamentales en todos estos campos. Su monografía de investigación de 1953 ‘Homogeneous Turbulence’ prácticamente definió el tema.

A la edad de 33 años, Batchelor había creado un nuevo campo que iba a ofrecer un desafío extremo a las generaciones sucesivas de ingenieros, matemáticos, físicos. Fue elegido miembro de la Royal Society en 1957. trabajo administrativo involucrado en el establecimiento de su departamento en Cambridge fue enorme, y distrajo un poco las energías de Batchelor de la investigación a lo largo de la década de 1960.

Sin embargo, publicó su definitiva Introducción a la Dinámica de Fluidos (1967), un libro de texto de minuciosidad característica que todavía se usa ampliamente para los cursos universitarios.

En el curso de la redacción de este libro, Batchelor reconoció que las técnicas de la teoría de la turbulencia podrían aplicarse igualmente a problemas relacionados con la dinámica de fluidos en los que pequeñas partículas o burbujas están en suspensión.

Desarrolló estas ideas en una poderosa secuencia de artículos a principios de la década de 1970, y así nació la microhidrodinámica.

Percibiendo la necesidad de una mayor cooperación europea en la investigación científica, Batchelor fue instrumental, en 1964, en el establecimiento del Comité Europeo de Mecánica (ahora la Sociedad Europea de Mecánica), que presidió hasta 1987.

También fue durante muchos años miembro del comité del congreso de la Unión Internacional de Mecánica Teórica y Aplicada, y durante la Guerra Fría mantuvo vínculos científicos con colegas soviéticos y de Europa del Este, especialmente en las reuniones bienales sobre mecánica de fluidos celebradas en Polonia durante toda esa época. Editó los cuatro volúmenes de los documentos recopilados de Sir Geoffrey Taylor, y en la década de 1980 encabezó una exitosa campaña de recaudación de fondos para dotar a la Cátedra G.I. Taylor de Mecánica de Fluidos en Cambridge.

En 1996 publicó una biografía de Taylor.

Batchelor recibió la Medalla Real de la Royal Society en 1988, y fue elegido para una serie de academias extranjeras de ciencias, incluida la de Australia, a la que a menudo regresaba.

Su casa en Cambridge fue diseñada sobre estrictos principios científicos: un artículo temprano sobre el espaciado óptimo de las dos hojas de vidrio en ventanas de doble acristalamiento resultó de esta fase de la actividad doméstica. Su esposa murió en 1997.

Le sobreviven tres hijas. George Batchelor, FRS, Profesor Emérito de Matemáticas Aplicadas en Cambridge, nació el 8 de marzo de 1920. Murió el 30 de marzo a los 80 años. *George Keith Batchelor*¹ *predijo que estos patrones siguen un orden exacto y*

¹ *Jorge Batchelor*: Científico de Cambridge que estableció estándares exigentes en mecánica de fluidos.

Como editor fundador del Journal of Fluid Mechanics, durante más de 40 años, George Batchelor ejerció una influencia prolongada y profunda en un tema de importancia central para las matemáticas aplicadas y la ciencia de la ingeniería.

Su propia investigación fue primero en el fenómeno de la turbulencia, descrito por Einstein como el problema no resuelto más desafiante de la física clásica, y posteriormente por Richard Feynman como el último gran problema no resuelto de la Física Clásica en el campo que se conoció bajo su liderazgo como ‘microhidrodinámica’

Batchelor escribió con una precisión y lucidez excepcionales y, con el ejemplo y su firme pero amable control como editor, desempeñó un papel crucial en el establecimiento de estándares exigentes en mecánica de fluidos.

Como jefe fundador del departamento de matemáticas aplicadas y física teórica en Cambridge, estableció un entorno en el que floreció la investigación en todas las aplicaciones de las matemáticas, y en el que se alentó a generaciones de estudiantes de investigación a desarrollar sus habilidades creativas.

Bajo su liderazgo entre 1959 y 1983, el departamento se convirtió en el centro de una red mundial de investigación colaborativa.

George Keith Batchelor nació y se educó en Melbourne,

Australia. Estudió física y matemáticas en la Universidad de Melbourne, y luego, al comienzo de la Segunda Guerra Mundial, emprendió investigaciones en una serie de problemas prácticos en aerodinámica relacionados con el esfuerzo de guerra. Durante este período, reconoció la turbulencia como el mayor desafío en la aerodinámica, y resolvió dedicar sus energías a ella tan pronto como terminara la guerra.

Escribió a G.I. Taylor, la gran autoridad británica en turbulencias en ese momento, ofreciendo sus servicios. Taylor aceptó supervisar su investigación, y en enero de 1945, junto con su esposa, Wilma, también de Melbourne, Batchelor se embarcó en un viaje maratónico de diez semanas a través de Nueva Zelanda, el Canal de Panamá y Nueva York, y desde allí en un convoy de 80 barcos a través del Atlántico para llegar a Cambridge.

Batchelor era ferozmente ambicioso y totalmente comprometido, progresando muy rápidamente.

Reconociendo la importancia de una teoría publicada por el matemático ruso Kolmogorov en 1941, Batchelor se supo presentar y montar con una crítica al trabajo Kolmogorov en el sexto Congreso Internacional de Mecánica Aplicada, celebrado en París en 1946. Esto lo marcó como una estrella en ascenso, y en 1947 se convirtió en miembro del Trinity Collage. Durante los siguientes 15 años, Batchelor publicó una sucesión de estudios cada vez más detallados que exponen la intensa dificultad de comprender la turbulencia, una dificultad solo igualada por su importancia en la aerodinámica, la ingeniería química, la dinámica del océano y la atmósfera, y en la magnetohidrodinámica de las nubes de gas interestelares.

Batchelor hizo contribuciones fundamentales en todos estos campos. Su monografía de investigación de 1953 'Homogeneous Turbulence' prácticamente definió el tema.

A la edad de 33 años, Batchelor había creado un nuevo campo que iba a ofrecer un desafío extremo a las generaciones sucesivas de ingenieros, matemáticos, físicos. Fue elegido miembro de la Royal Society en 1957. trabajo administrativo involucrado en el establecimiento de su departamento en Cambridge fue enorme, y distrajo un poco las energías de Batchelor de la investigación a lo largo de la década de 1960.

Sin embargo, publicó su definitiva Introducción a la Dinámica de Fluidos (1967), un libro de texto de minuciosidad característica que todavía se usa ampliamente para los cursos universitarios.

En el curso de la redacción de este libro, Batchelor reconoció que las técnicas de la teoría de la turbulencia podrían aplicarse igualmente a problemas relacionados con la dinámica de fluidos en los que pequeñas partículas o burbujas están en suspensión.

Desarrolló estas ideas en una poderosa secuencia de artículos a principios de la década de 1970, y así nació la microhidrodinámica.

Percibiendo la necesidad de una mayor cooperación europea en la investigación científica, Batchelor fue instrumental, en 1964, en el establecimiento del Comité Europeo de Mecánica (ahora la Sociedad Europea de Mecánica), que presidió hasta 1987.

También fue durante muchos años miembro del comité del congreso de la Unión Internacional de Mecánica Teórica y Aplicada, y durante la Guerra Fría mantuvo vínculos científicos con colegas soviéticos y de Europa del Este, especialmente en las reuniones bienales sobre mecánica de fluidos celebradas en Polonia durante toda esa época. Editó los cuatro volúmenes de los documentos recopilados de Sir Geoffrey Taylor, y en la década de 1980 encabezó una exitosa campaña de recaudación de fondos para dotar a la Cátedra G.I. Taylor de Mecánica de Fluidos en Cambridge.

En 1996 publicó una biografía de Taylor.

Batchelor recibió la Medalla Real de la Royal Society en 1988, y fue elegido para una serie

reglamentado. *La nueva demostración que aquí se presenta, valida la veracidad de la “ley Batchelor”, como fue conocida tal predicción en su época.*

“La ‘ley Batchelor’ la vemos por todas partes” (Jacob Bedrossian, matemático de la Universidad de Maryland, College Park, que conjuntamente con Alex Blumenthal del Tecnológico de Georgia y Samuel Punshon-Smith de la univ. de Brown. Presentan la nueva prueba “Al demostrar esta ley, obtenemos una mejor comprensión de cuán universal resulta ser”).



Fig.2. Jacob Bedrossian, profesor asistente de la Universidad de Maryland, College Park. Su investigación se centra en el análisis matemático de PDE deterministas y estocásticos que surgen en mecánica de fluidos y física de plasma. Actualmente estoy específicamente interesado en comprender la mezcla, la turbulencia y la estabilidad de estructuras coherentes en mecánica de fluidos 2D y 3D con alto número de Reynolds y efectos cinéticos relacionados con la amortiguación de Landau que surgen en plasmas; **Fig.2A.** Alex Blumenthal, Profesor asistente del Tecnológico de Georgia. Para los jóvenes nerds: Muchos de los sistemas que evolucionan en el tiempo en nuestro mundo evolucionan de acuerdo con leyes "microscópicas" aparentemente simples, por ejemplo, la 3ª ley de Newton en el caso de sistemas puramente mecánicos. Es entonces toda una sorpresa, que estos sistemas sean capaces de exhibir comportamientos extremadamente complicados, aparentemente aleatorios y dinámicos. Considere, por ejemplo, el gas que lo rodea en la habitación en la que se encuentra. A nivel microscópico, las moléculas que componen este gas interactúan entre sí de una manera relativamente simple (y en particular, reversible en el tiempo), mientras que a nivel macroscópico el colectivo de moléculas de gas puede exhibir un comportamiento extremadamente complicado e irreversible en el tiempo (considere cómo se distribuye el humo del incienso a lo largo de una habitación cerrada, ¿alguna vez lo ha visto desmezclarse?). Mi investigación se centra en las propiedades estadísticas de estos sistemas, es decir, en cómo entender la evolución del tiempo (posiblemente bastante complicada o ‘caótica’) de la dinámica a través de la lente de la teoría de la probabilidad (esto tiene un nombre diferente: teoría ergódica). **Fig.2B.** Samuel Punshon-Smith de la Universidad de Brown. Su investigación se centra en el análisis matemático y estudio de modelos

de academias extranjeras de ciencias, incluida la de Australia, a la que a menudo regresaba.

Su casa en Cambridge fue diseñada sobre estrictos principios científicos: un artículo temprano sobre el espaciado óptimo de las dos hojas de vidrio en ventanas de doble acristalamiento resultó de esta fase de la actividad doméstica. Su esposa murió en 1997.

Le sobreviven tres hijas. George Batchelor, FRS, Profesor Emérito de Matemáticas Aplicadas en Cambridge, nació el 8 de marzo de 1920. Murió el 30 de marzo a los 80 años.

estocásticos surgidos en las ciencias físicas. Gran parte de su trabajo implica el estudio del comportamiento a largo plazo y las propiedades de regularidad de las ecuaciones diferenciales parciales estocásticas y la dinámica estocástica de dimensión infinita relacionada con problemas en mecánica de fluidos, teoría cinética y sistemas de partículas. Actualmente está interesado en la teoría ergódica y las propiedades de mezcla caótica de las ecuaciones estocásticas de Navier - Stokes y el efecto que tiene en las estadísticas de turbulencia escalar pasiva. Un tema central en gran parte de su trabajo es el uso de la aleatoriedad para regularizar problemas y probar teoremas que no se sabe que sean ciertos en un entorno determinista. Crédito:

A.1.3 Turbulencia hasta el final.

Qué hubiera dicho el venerable e inflexible Prof. Bachelor al ver sus fotos. Estos ni a corbata llegan y quieren hablar de nudos. Y sus lenguajes no son de científicos, sino de pepenadores. Qué asco, qué vergüenza, ni el barbañan de Kolmogorov que vivió en una sociedad que pretendía ser igualitaria en lo social hubiera llegado tan bajo, ¡a lo que hemos llegado con estos norteamericanos! Si bien las aguas blancas de un río agitado no son el tipo exacto de la turbulencia en cuestión en la nueva demostración, están estrechamente relacionadas y son más familiares. Así que vale la pena pensar en ellos por un momento antes de pasar al tipo específico de turbulencia que los 3 matemáticos analizaron.

Imagínese un fregadero de cocina lleno de agua. Abra el desagüe. El agua en el fregadero comenzará a girar casi como un solo cuerpo. Si se acercara al fluido y midiera su velocidad a escalas más finas, aún se observaría lo mismo: cada porción microscópica del fluido se mueve en sintonía con las demás. “El movimiento es predominantemente a la escala del fregadero en sí” (Blumenthal - también becario postdoctoral en la Universidad de Maryland, College Park)

Ahora imagina que en lugar de simplemente drenar el agua, jalaste del tapón mientras agregabas chorros de agua al fregadero, revolviendo como en un jacuzzi. A simple vista, se pueden observar un puñado de vórtices diferentes girando en el agua. Elija uno de los vórtices y amplíelo. Si usted fuera un matemático tratando de analizar el flujo del sumidero turbulento, podría esperar que cada partícula de agua dentro de ese vórtice elegido se moviera en la misma dirección. Eso facilitaría la tarea de modelar el fluido.

Pero, por desgracia, encontrarías en cambio que el vórtice está formado por muchos vórtices diferentes, cada uno moviéndose a su manera. Hagase zoom en uno de ellos y verá que también está compuesto por muchos vórtices diferentes, y así sucesivamente hasta que los efectos de la fricción interna (o viscosidad) dentro del fluido se hacen cargo y el flujo se suaviza.

Este es un sello distintivo de los sistemas turbulentos: presentan comportamientos distintos anidados entre sí a diferentes escalas. Para describir completamente el movimiento de un sistema turbulento, se necesita una imagen de lo que está ocurriendo en todas estas escalas en cada momento en el tiempo. No puedes ignorar ninguno de ellos:

Saintillan – simulation_600x600.mp4

Esa es una tarea difícil, similar a modelar la trayectoria de las bolas de un billar utilizando todo, desde el movimiento de la Tierra a través de la galaxia hasta las interacciones entre las moléculas de gas alrededor de las bolas.

“Tengo que tomarlo todo de una vez, que es lo que hace que sea increíblemente difícil de modelar” (Jean-Luc Thiffeault - de la Univ. de Wisconsin, que también estudia la turbulencia) Como resultado, los matemáticos han pasado décadas tratando de llegar a una descripción de la turbulencia que especifique exactamente lo que está sucediendo en cada punto de un sistema turbulento, en cada momento en el tiempo. No lo han conseguido. “La turbulencia es demasiado difícil para nosotros como para poder hacer mucho al respecto directamente, de frente” (Thiffeault)

Eso es cierto para los ríos caudalosos y los sumideros de drenaje. También es cierto para la variante específica de turbulencia en la nueva demostración.

A.1.4 Mezclándolo todo.

Un sumidero y el río son ejemplos de turbulencia hidrodinámica. Son turbulentos en el sentido de que la velocidad del fluido, su velocidad y dirección, varía mucho de un punto a otro. El nuevo trabajo trata sobre otras propiedades además de la velocidad que se pueden medir en cada punto de un fluido. Para entender lo que eso significa, piensen en la mezcla de pinturas. Se puede comenzar con un recipiente de pintura blanca. Luego se agregan gotas de pintura negra, digamos una por segundo, revolviendo a medida que avanza. La primera gota aterrizará en la pintura blanca y se destacará como una isla. Pero en poco tiempo, comenzará a mezclarse con la pintura blanca, alargando en tendones cada vez más finos. Las gotas posteriores de pintura negra estarán en diferentes etapas de la misma transformación: estiramiento, alargamiento, incorporación al cuerpo encanecimiento de la pintura.

La forma en que la pintura negra se mezcla con la blanca en esta simulación muestra que se tiene una “turbulencia escalar pasiva”. La ley de Batchelor describe cómo se comportan tales sistemas turbulentos.

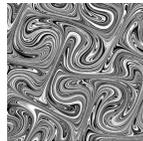


Fig. 3.



Fig. 3A. Crédito:

Aatol/Shutterstock.com

Fig. 3. Qizheng Yan y David Saintillan (UCSD) Saintillan-simulation_600x600.mp4: https://d2r55xnwy6nx47.cloudfront.net/uploads/2020/02/Saintillan-simulation_600x600.mp4. **Fig. 3A.** Durante mucho tiempo se ha observado que la mezcla de líquidos y otros sistemas turbulentos sigue una regla universal conocida como la ‘ley de Batchelor’. Los matemáticos finalmente lo han logrado demostrar.

De la misma manera que la velocidad varía de un punto a otro en el fregadero de agitación, la concentración de pintura negra variará de un punto a otro dentro de la pintura de la mezcla: más concentrada en algunos lugares (con los tendones más gruesos) y menos en otros.

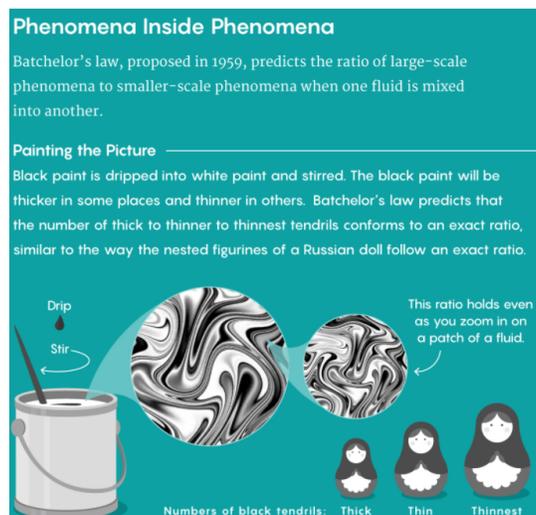
Esta variación es un ejemplo de ‘turbulencia escalar pasiva’. Puedes pensar en ello como lo que sucede cuando mezclas un fluido, considerado el ‘escalar pasivo’, en otro: leche en café, por ejemplo, o pintura negra en blanca.

La ‘turbulencia escalar pasiva’ también caracteriza muchos fenómenos en el mundo natural, como las dramáticas variaciones de temperatura entre los puntos cercanos en el océano. En ese entorno, las corrientes oceánicas ‘mezclan’ las temperaturas de la manera en que la agitación mezcla la pintura negra en la blanca.

La ‘ley Batchelor’ es una predicción sobre la proporción de fenómenos a gran escala (zarcillos gruesos de pintura o bandas gruesas de agua del océano a la misma temperatura) y fenómenos a escalas más pequeñas (zarcillos más delgados) cuando un fluido se mezcla en otro. Se conoce como una ley porque los físicos la han observado en experimentos durante años.

“Desde el punto de vista de la física, eso es lo suficientemente bueno como para llamarlo una ley” (Punshon-Smith-matemático de la Univ. de Brown. Pero antes de este trabajo no ha habido confirmación matemática de que en absoluto se mantenga.

Una breve explicación de la ‘ley de Batchelor’, incluyendo ilustraciones de pintura mezclada a diferentes escalas en una lata de pintura y diferentes matrices rusas.



Lucy Reading-Ikkanda; Qizheng Yan and David Saintillan (UCSD) (insets)
Para tener una idea de lo que Batchelor tenía en mente, hay que volver al ejm. de la pintura. Imagina que has ejecutado el proceso por un tiempo, agregando gotas de pintura negra a medida que revuelves. Ahora congela la

imagen. Verás zarcillos gruesos de pintura negra (pintura que se ha agitado durante la menor cantidad de tiempo), junto con zarcillos más delgados (pintura que se ha agitado por más tiempo) e incluso zarcillos más delgados (pintura que se ha agitado aún más tiempo).

La ley de Batchelor predice que el número de zarcillos gruesos, delgados y aún más delgados se ajusta a una proporción exacta, similar a la forma en que las figurillas anidadas que componen una muñeca rusa siguen una proporción exacta (en ese caso, una muñeca por escala de longitud).

“En un parche dado de líquido, se verán rayas a diferentes escalas porque algunas gotas apenas han comenzado a mezclarse, mientras que otras se han estado mezclando por algún tiempo” (Blumenthal) “La ‘ley Batchelor’ te dice la distribución de los tamaños de esas rayas de pintura negra”. La proporción exacta que predice es complicada de describir, pero los zarcillos más delgados serán más numerosos que los zarcillos más gruesos en una proporción exacta.

La ley predice que la proporción se mantiene incluso cuando se acerca un parche de líquido. Verás exactamente la misma relación entre zarcillos de diferentes tamaños en la lata de pintura y en un pequeño parche de pintura; si haces zoom⁺, en un parche aún más pequeño, aún lo verás. El patrón se ve igual en todas las escalas, al igual que en la turbulencia hidrodinámica, donde cada vórtice contiene otros vórtices.

Es una predicción poderosa, pero también difícil de modelar matemáticamente. La complicada anidación de fenómenos a diferentes escalas de longitud hace imposible describir exactamente la aparición de la ‘ley Batchelor’ en un solo flujo de fluidos.

Pero los autores del nuevo trabajo descubrieron cómo sortear esta dificultad y probar la ley de todos modos.

A.1.5 Un enfoque aleatorio.

Bedrossian, Blumenthal y Punshon-Smith adoptaron un enfoque que considera el comportamiento promedio de los fluidos en todos los sistemas turbulentos. Los matemáticos habían intentado esta estrategia antes, pero nadie logró implementarla con éxito.

El enfoque funciona porque la aleatoriedad a veces hace que sea más fácil hacer predicciones precisas sobre el comportamiento de un sistema. Imagina una pegatina, como en un programa de juegos o en arcade. Deje caer una moneda desde la parte superior, y rebotará de clavija en clavija hasta que se asiente en una de las muchas ranuras en la parte inferior. Es difícil predecir exactamente dónde aterrizará una sola moneda: hay demasiados factores, que influyen en cómo la moneda rebotará en cada clavija.

En su lugar, puede tratar el sistema como aleatorio, reconociendo que en cada clavija, existe la posibilidad de que la moneda rebote a la izquierda y la posibilidad de que rebote a la derecha. Obtenga las probabilidades correctas y podrá hacer predicciones precisas sobre el comportamiento del sistema en su conjunto. Por ejemplo, es posible que las monedas sean mucho más propensas a aterrizar en ciertas ranuras que en otras.

“Lo bueno de la aleatoriedad es que puedes hacer cosas como promediar” (Thiffeault) “Promediar es una idea muy robusta en el sentido de que no le importan muchos de los detalles”.

Entonces, ¿qué significa esto para la turbulencia y la mezcla de pintura? Debido a que las declaraciones exactas y deterministas están fuera del alcance de las matemáticas, es más útil imaginar que las fuerzas que actúan sobre la pintura ocurren al azar, a veces revolviéndola de esta manera, a veces revolviéndola de esa manera, sin un patrón subyacente a la agitación. Esto se conoce como el enfoque aleatorio o estocástico. Permite a los matemáticos adoptar una visión estadística de alto nivel y examinar lo que sucede en este tipo de sistemas en general, sin atascarse en los detalles de cada detalle.

“Un poco de aleatoriedad te permite difamar las dificultades”, dijo Punshon-Smith.

Y eso es lo que finalmente permitió a los tres matemáticos probar la ley de Batchelor.

A.1.6 Comprender la mezcla.

Una forma de probar una ley física es pensar en las circunstancias que anularían la ley. Si puedes probar que esas circunstancias nunca suceden, vuelves a probar que la ley siempre se mantiene. En este caso, el equipo se dio cuenta de que la agitación tendría que producir efectos muy específicos para evitar las rayas predichas por la ley de Batchelor.

Su prueba de la ley procede sobre cuatro [1-4] documentos publicados en línea entre septiembre de 2018 y noviembre de 2019. Los tres primeros [1-3] se centraron en comprender, y descartar, movimientos particulares en la pintura de mezcla que evitarían que la predicción de Batchelor se hiciera realidad. Demostraron que incluso si se intentaba inventar un fluido perfectamente diseñado para derrotar la ‘ley Batchelor’, el patrón aún resurgiría.

“Lo principal que hay que entender es que el fluido no puede conspirar contra sí mismo” (Bedrossian)

Por ejemplo, la ‘ley Batchelor’ fallaría si el proceso de mezcla produjera vórtices permanentes, o remolinos, en la pintura. Esos remolinos atraparían un poco de pintura negra en un solo lugar, como escombros atrapados en un vertedero al borde de un arroyo, y la pintura no se mezclaría.

“Dentro de un vórtice como ese, las trayectorias de las partículas no son caóticas; no se separan rápidamente, porque van por ahí juntas” (Bedrossian) “Si su sistema no se mezcla a la velocidad correcta, no se obtendrá la ‘ley Batchelor’”.

En su primer artículo [1], los matemáticos se centraron en lo que sucede durante el proceso de mezcla a dos puntos de pintura negra que comienzan el proceso uno al lado del otro. Demostraron que los puntos siguen caminos caóticos y se van en sus propias direcciones. En otras palabras, los puntos cercanos nunca pueden quedar atrapados en un vórtice que los mantendrá cerca para siempre.

“Las partículas se mueven juntas inicialmente” (Blumenthal) “pero finalmente se separan y van en direcciones completamente diferentes”.

En los documentos segundo [2] y tercero [3], se analizaron más ampliamente el proceso de mezcla. Demostraron que en un fluido caótico, en términos generales, la pintura en blanco y negro se mezcla lo más rápido posible. Esto estableció además que el fluido turbulento no forma los tipos de imperfecciones locales (vórtices) que impedirían que la elegante imagen global descrita por la ley de Batchelor fuera cierta.

En estos 3 1os. artículos, los autores hicieron las matemáticas duras necesarias para demostrar que la pintura se mezcla de una manera completa y caótica. En el cuarto [4], demostraron que en un fluido con esas propiedades de mezcla, la ‘ley Batchelor’ se sigue como consecuencia.

La demostración es una de las afirmaciones matemáticamente rigurosas más fuertes jamás hechas sobre sistemas turbulentos. Quizás aún más importante, abre el camino para un nuevo flujo de conocimientos matemáticos. La turbulencia es un fenómeno caótico, casi aleatorio en su movimiento. Los 3 matemáticos descubrieron cómo combatir la aleatoriedad con la aleatoriedad misma. Es casi seguro que otros en el campo seguirán su ejemplo.

“Su gran contribución es darnos un marco en el que ahora se puedan probar las cosas” (Thiffeault) “Creo que la aleatoriedad es una de las pocas formas de hacer un modelo de turbulencia que matemáticamente podamos entender”.

A.1.7 REFERENCIAS.

Bibliography

- [1] *Bedrossian, Jacob; Blumenthal, Alex; Punshon-Smith, Samuel, 2020. "A regularity method for lower bounds on the Lyapunov exponent for stochastic differential equations." arXiv preprint arXiv: 2007.15827. Submitted. [arxiv]*
- [2] *Bedrossian, Jacob; Blumenthal, Alex; Punshon-Smith, Samuel, 2019. "The Batchelor spectrum of passive scalar turbulence in stochastic fluid mechanics." arXiv preprint arXiv: 1911.11014. Submitted. [arxiv]*
- [3] *Bedrossian, Jacob; Blumenthal, Alex; Punshon-Smith, Samuel, 2019. "Almost-sure enhanced dissipation and uniform-in-diffusivity exponential mixing for advection-diffusion by stochastic Navier-Stokes." arXiv preprint arXiv: 1911.01561. Submitted. [arxiv]*
- [4] *Bedrossian, Jacob; Blumenthal, Alex; Punshon-Smith, Samuel, 2019. "Almost-sure exponential mixing of passive scalars by the stochastic Navier-Stokes equations." arXiv preprint arXiv: 1905.03869. Submitted. [arxiv]*

A.1.8

.0.9 The First Appendix

The appendix fragment is used only once. Subsequent appendices can be created using the Chapter Section/Body Tag.