Variables aleatorias continuas.

Ejercicio.

El tiempo de vida de un aparato electrónico se puede modelar por una variable aleatoria continua X cuya función de densidad es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

Calcular:

a) El valor de k.

b) La función de distribución.

c) La probabilidad de que el aparato funcione más de dos horas.

d) La proba de que funcione más de seis horas dado que se sabe que lleva funcionando más de 2 horas.

Solución:

a)

Sabemos que una función para que sea de densidad debe cumple con la siguiente igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

Sustituyendo nuestra función

$$\int_{0}^{\infty} ke^{-\frac{x}{2}}\, dx = 1$$

Hacemos un cambio de variable para resolver la integral

$$u = -\frac{x}{2} \qquad du = -\frac{1}{2}dx$$

Continuando con la integral

$$= \int (-2)ke^{u}du = -2k\int e^{u}du = -2ke^{u}] = -2k\, e^{-\frac{x}{2}}\Big] = -2k\left(\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{0}{2}}\right)$$

Como

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0 \qquad y \qquad e^{-\frac{0}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{0}{2}}} = \frac{1}{e^{0}} = \frac{1}{1} = 1$$

Entonces

$$\int_0^\infty ke^{-\frac{x}{2}}dx = -2k(0-1) = 2k = 1$$

Por lo tanto $k = \frac{1}{2}$

b)

La función de distribución se define como

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

En nuestro caso y utilizando el valor de k encontrado en a)

$para\ x > 0$ $$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2}e^{-t/2}dt = -e^{-t/2}\Big] = 1 - e^{-x/2}$$

Por lo que nuestra función de distribución queda de la siguiente forma:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/2}, & x > 0 \end{cases}$$

c)

La variable aleatoria X representa el número de horas de vida de un aparato, por lo tanto

$$P[\text{"}el\ aparato\ funcione\ más\ de\ dos\ horas\text{"}] = P[X > 2]$$

Como

$$F(x) = P[X < x]$$

$$P[X > x] = 1 - F(x)$$

$$P[X > 2] = 1 - F(2) = 1 - \left(1 - e^{-2/2}\right) = e^{-1}$$

d)

$$P[\text{"}el\ aparato\ funcione\ más\ de\ seis\ horas\ dado\ que\ lleva\ mas\ de\ dos\text{"}] =$$

$$P[X > 6|X > 2] = \frac{P[X > 6 \cap X > 2]}{P[X > 2]} = \frac{P[X > 6]}{P[X > 2]} = \frac{e^{-6/2}}{e^{-2/2}} = e^{-3-(-1)} = e^{-2}$$